Verze 16. prosince 2016

5. Limita a spojitost

Diferenciální počet a integrální počet tvoří klasický základ Matematické analýzy. Diferenciální počet zkoumá lokální chování zejména funkcí. K jeho základním pojmům patří *limita* a *spojitost*. Začneme připomenutím definice limity posloupnosti.

5A. Limita posloupnosti

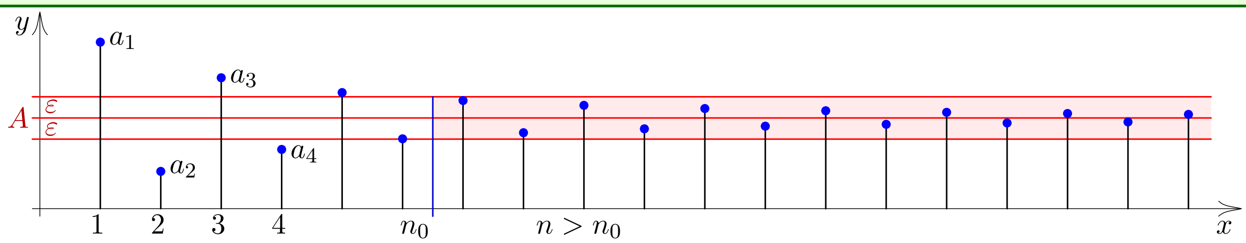
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ je funkce definovaná na množině přirozených číslech, její n-tý člen se zapisuje a_n. Pokud se hodnoty a_n při rostoucím n „blíží“ k nějaké hodnotě A, potom řekneme, že číslo A je limitou této posloupnosti. Definice říká, že pro libovolně malé kladné $\varepsilon > 0$, které reprezentuje požadovanou přesnost, od jistého n_0 všechny další hodnoty a_n, $n > n_0$ jsou k A blíže než ε, tj. odchylka $|a_n - A|$ od limity A je menší požadovaná přesnost ε:

Definice 5.1. (**Limita posloupnosti**)
Řekneme, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je číslo A, což zapisujeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, jestliže:

Pro každé kladné ε existuje přirozené n_0, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$.

Pomocí kvantifikátoru $\forall$ – „pro všechna“ a $\exists$ – „existuje“ podmínku lze zapsat:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ že pro } \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \text{ platí } |a_n - A| \le \varepsilon\,.$$



Obr. 5.1: Číslo A je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pokud pro každé $n > n_0$ je rozdíl $|a_n - A|$ menší než ε.

Jestliže hodnoty a_n rostou „nade všechny meze“, řekneme, že limita je nekonečno:

Definice 5.2. (**Nevlastní limity posloupnosti**)
Řekneme, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je nekonečno, jestliže:

Pro každé kladné K existuje přirozené n_0, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n > K$,

$$\text{tj. } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, K > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ že pro } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \text{ platí } a_n > K\,.$$

Podobně limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je minus nekonečno, jestliže:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, K > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ že pro } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \text{ platí } a_n < -K\,.$$

Později se nám bude hodit následující důležitá věta:

Věta 5.3. Každá neklesající posloupnost $\{a_n\}$ má limitu. Buď je shora omezená a má nějakou konečnou limitu A, nebo je neomezená a má za limitu nekonečno.

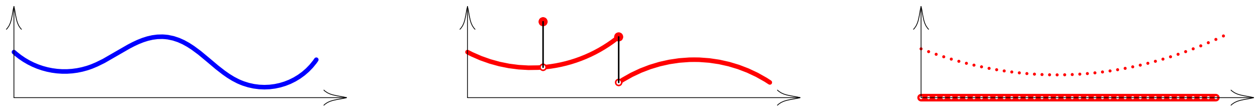
Důkaz. Posloupnost je neklesající, pokud pro každé n platí $a_n \leq a_{n+1}$. Pokud je posloupnost shora omezená, její supremum je číslo $A \in \mathbb{R}$. Podle definice suprema pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože posloupnost je neklesající, pro všechna n větší než n_0 je $a_n \geq a_{n_0}$. Na druhé straně však a_n nemůže být větší než supremum A, a proto $A - \varepsilon \leq a_{n_0} < a_n \leq A$, tedy A je limitou posloupnosti $\{a_n\}$.

Pokud posloupnost je shora neomezená, potom pro každé $K > 0$ existuje nějaké n_0 takové, že $a_{n_0} > K$. Protože posloupnost je neklesající, pro všechna větší n platí také $a_n > K$. □

Poznámka: Podobně každá nerostoucí posloupnost má limitu. Buď je zdola omezená, pak je limita reálné číslo, nebo má za limitu minus nekonečno.

5B. Limita a spojitost funkce

Grafem funkce $\sin x$ nebo $\cos x$ je „spojitá čára", naproti tomu graf funkce $\operatorname{sgn}(x)$ (má hodnotu 1 pro $x > 0$, hodnotu -1 pro $x < 0$ a 0 pro $x = 0$) tvoří „přetržená čára". Říkáme, že funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je „funkce nespojitá v bodě $x = 0$". Podobně každá „nepřetržená čára" jdoucí zleva doprava je grafem nějaké spojité funkce. Z obrázku je intuitivně „vidět", která funkce je spojitá a která nespojitá, zdá se, že je to „zřejmé". Charakterizovat spojitost matematickými prostředky, tzv. definovat, už tak snadné není.



Obr. 5.2: Příklady funkce spojité a funkcí nespojitých.

Několik století matematikové „pracovali" se spojitými funkcemi, derivovali je i integrovali. Když se však přišlo na zvláštní funkce, které měly neočekávané vlastnosti, přišla potřeba spojitou funkci definovat přesně. První rigorózní definici limity a tím i spojitosti formuloval v roce 1817 Bernard Bolzano[1] v roce 1817. Začneme s definicí **limity** funkce v bodě.

Definice limity funkce

Intuitivní definice limity říká: Limita funkce $f(x)$ v bodě x_0 je číslo A,

ke kterému se hodnota $f(x)$ „blíží", když x se „blíží" k x_0.

Nutno však definovat, co to znamená „blížit se". Limitu popisuje tzv. „epsilon-delta" definice:

Definice 5.4. (Limita funkce – epsilon-delta definice)
Buď $f(x)$ funkce definovaná v nějakém okolí bodu x_0 (v bodě x_0 nemusí být definovaná), například na množině $M = (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \setminus \{x_0\}$ pro nějaké $\Delta > 0$.

Řekneme, že **funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu A**, pokud

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in M$ splňující $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$, zapsáno pomocí symbolů:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in M$ splňující $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Limitu funkce $f(x)$ v bodě x_0 rovnou číslu A zapisujeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, pokud existuje číslo A, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

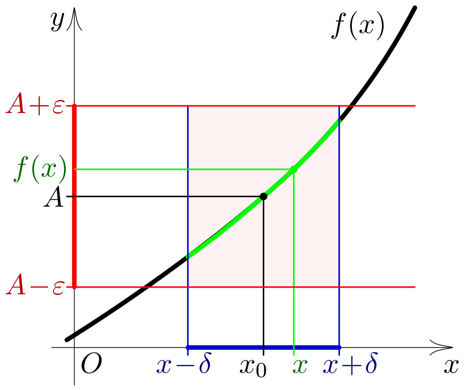
[1] Bernard Bolzano (1781-1848) byl český německy mluvící matematik, logik, filozof a teolog italského původu žijící v Praze.

Poznámky 5.5.

(a) Definice nevyžaduje, aby funkce byla definována v bodě x_0, funkce zde může ale nemusí být definována.

(b) Bod x_0 i limita A jsou (konečná) čísla, mluvíme proto o tzv. vlastní limitě ve vlastním bodě. Později budeme definovat nevlastní, tj. nekonečnou limitu, nebo limitu v nevlastním bodě, tj. v nekonečnu.

(c) Číslo δ závisí na ε. Obvykle čím menší zvolíme ε, tím menší nutno vzít δ. Číslo δ může být jakkoliv malé, musí však být kladné.



Obr. 5.3: Definice limity: Hodnoty $f(x)$ z $\delta-$okolí x_0 musí ležet v $\varepsilon-$okolí A.

(d) Jaký je smysl definice? Kladné číslo ε je „přesnost“ a kladné číslo δ udává v jaké vzdálenosti δ od bodu x_0 je tato přesnost dosažena, tj. chyba $|f(x) - A|$ je menší než požadovaná přesnost ε. Pro libovolně malé kladné ε existuje dostatečně malé kladné δ, definice tak zaručuje „nekonečnou přesnost“.

(e) Vzdálenost δ závisí na přesnosti ε. Pro jednoduchost uvažujme funkci $f(x) = \frac{1}{2}x+1$ a bod $x_0 = 1$. Potom limitou je $A = \frac{3}{2}$. Skutečně, pro požadovanou přesnost $\varepsilon = 0.1$ stačí zvolit $\delta = 0.2$, pro $\varepsilon = 0.001$ volíme $\delta = 0.002$, pro $\varepsilon = 10^{-6}$ je $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$ atd.

(f) V definici mají význam malá kladná ε, protože platí-li podmínka pro malé ε, platí i pro každé větší ε. Na druhé straně platí-li podmínka pro nějaké kladné δ, bude platit i pro každé menší kladné δ.

(g) Bod x_0 v definici limity se často označuje jako bod a. Potom funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in M \;\; \text{splňující} \;\; 0 < |x - a| < \delta \quad \text{platí} \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Pro obecnější definici limity zavedeme pojem okolí bodu:

Definice 5.6. (Okolí bodu)
Otevřený interval $V = (l, p)$ nazveme **okolím bodu** x_0, pokud x_0 je vnitřním bodem V, tj. $l < x_0 < p$. Speciálně pro $r > 0$ interval $(x_0 - r, x_0 + r)$ nazveme r**-okolí bodu** x_0.

Množinu všech okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{O}(x_0)$.

Pro úplnost zavedeme ještě levé a pravé okolí, které budeme potřebovat později:

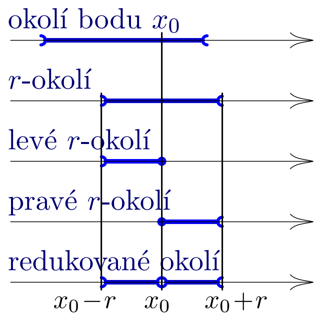
Pro každé $(l < x_0 < p)$ je interval $(l, x_0\rangle$ **levým okolím** a $\langle x_0, p)$ **pravým okolím bodu** x_0.

Okolí bodu x_0 bez bodu x_0 se nazývá redukované, také ryzí nebo prstencové okolí.

Poznámky 5.7.

(a) V definici r-okolí je r poloměr okolí. Proto δ-okolím bodu x_0 je interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a podobně ε-okolím bodu A je interval $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

(b) V definici limity potřebujeme tzv. redukované (ryzí, prstencové) okolí bodu x_0, tj. okolí bez bodu x_0. Obvykle přidáním přívlastku se pojem zužuje ale zůstává pojmem, například celé číslo je číslo, omezená množina je množina.



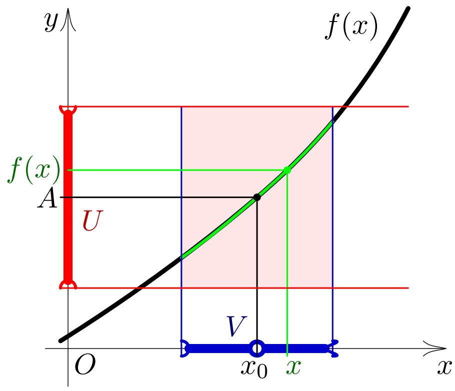
Obr. 5.4: Okolí bodu x_0.

Z tohoto hlediska je pojem redukovaného okolí ne zcela logický, protože redukované okolí bodu x_0 už není okolím bodu x_0. Podobně také levé nebo pravé okolí bodu není okolím bodu x_0.

Pomocí pojmu okolí definici můžeme přepsat ve tvaru

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$, že $\forall\, x,\ x \neq x_0$ z δ-okolí bodu x_0
hodnoty $f(x)$ leží v ε-okolí limity A.

Výraz „pro každé $\varepsilon > 0$“ a „ε-okolí“ lze nahradit výrazem „pro každé okolí bodu x_0“. Podobně „existuje $\delta > 0$“ a „δ-okolí“ lze nahradit výrazem „existuje okolí limity A“, viz Obr. 5.5. Zápis definici limity tak můžeme zjednodušit na:



Obr. 5.5: Definice pomocí okolí: Hodnoty f z okolí V leží v okolí U.

Definice 5.8. (Limita funkce pomocí okolí)
Buď $f(x)$ funkce definovaná v nějakém redukovaném okolí bodu x_0.

Řekneme, že **funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu** A, jestliže

Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu x_0, že každé $x \in V \setminus \{x_0\}$, splňuje $f(x) \in U$,

nebo zapsáno pomocí symbolů:

$$\forall\, U \in \mathcal{O}(A) \quad \exists\, V \in \mathcal{O}(x_0)\ \forall\, x \in V \setminus \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in U.$$

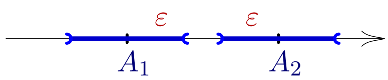
U každého nového pojmu nás zajímá, zda existuje a kolik jich je. Pro limitu platí:

Věta 5.9. (Jednoznačnost) Limita (pokud existuje) je určena jednoznačně .

Poznamenejme, že tvrzení o jednoznačnosti platí nejen pro limity funkce v bodě ale i pro jednostranné limity, nevlastní limity a limity v nevlastních bodech, které zavedeme později.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Kdyby funkce $f(x)$ měla v bodě x_0 dvě různé limity A_1 a A_2, potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje δ-okolí bodu x_0, že hodnoty funkce $f(x)$ na tomto okolí leží jak v ε-okolí limity A_1 tak i v ε-okolí limity A_2. Zvolíme-li však $\varepsilon > 0$ menší než $\frac{1}{2}|A_1 - A_2|$, docházíme ke sporu: hodnoty nemohou současně ležet v ε-okolí bodu A_1 i v ε-okolí bodu A_2, protože tato okolí mají prázdný průnik, viz Obr. 5.5. nebo nerovnost

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \leq |A_1 - f(x)| + |f(x) - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < |A_1 - A_2|\,.$$



Obr. 5.6: Limita, pokud existuje, nemůže mít dvě různé hodnoty A_1 a A_2. Skutečně, pro malé ε hodnota $f(x)$ nemůže ležet v okolí bodu A_1 i A_2, protože okolí jsou disjunktní.

Definice spojité funkce

Pojem limity umožňuje definovat funkci spojitou:

Definice 5.10. (**Funkce spojitá**)
Řekneme, že **funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0**, jestliže platí následující tři podmínky:

(a) funkce $f(x)$ je **definovaná v nějakém okolí bodu x_0**

(b) **existuje limita funkce $f(x)$ v bodě x_0**, tj. existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

(c) a tato **limita se rovná funkční hodnotě**, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dále řekneme, že **funkce $f(x)$ je spojitá v otevřeném intervalu I**, pokud je **spojitá v každém bodě** tohoto intervalu.

Poznámky 5.11.

(a) První dvě podmínky se často vynechávají, protože jsou implicitně obsaženy ve třetí: abychom mohli mluvit o rovnosti limity a hodnoty funkce, limita musí existovat. A limita funkce v bodě existuje, jen když je funkce definovaná v okolí tohoto bodu.

(b) Protože funkce spojitá v bodě x_0 musí být definovaná v okolí V bodu x_0 (včetně bodu x_0) a limita se rovná $f(x_0)$, nevylučujeme bod x_0 z okolí bodu x_0. Definici spojitosti pak můžeme přepsat v $\varepsilon - \delta$ tvaru

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé x, $|x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

nebo pomocí okolí

Pro každé okolí U bodu $f(x_0)$ existuje okolí V bodu x_0, že pro každé $x \in V$ platí $f(x) \in U$.

(c) Spojitou funkci lze definovat také pomocí konvergentních posloupností tzv. **Heineho definice**: Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v definičním oboru funkce $f(x)$ platí:

jestliže x_n konverguje k x_0, potom také $f(x_n)$ konverguje k $f(x_0)$,

zapsáno pomocí symbolů: $x_n \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0)$.

(d) Pokud funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, podle definice její limita v bodě x_0 je rovna funkční hodnotě $f(x_0)$. Lze tedy pořadí limity a funkce „zaměnit“:

$$f\Big(\lim_{x\to x_0} x\Big) = \lim_{x\to x_0} f(x)\,.$$

Příklady 5.12.

(a) Polynomy, funkce e^x, $\cos x$, $\sin x$ jsou spojité v každém bodě, funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ i racionální lomené funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru. Funkce $\arcsin x$ a $\arccos x$ jsou spojité jen v bodech intervalu $(-1,1)$, v bodech ± 1 nejsou spojité, protože nejsou definovány v „oboustranném“ okolí. Později zavedeme pojem jednostranné limity a spojitosti v krajním bodě $x = -1$ zprava a bodě $x = 1$ zleva, a dostaneme funkce spojité na uzavřeném intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

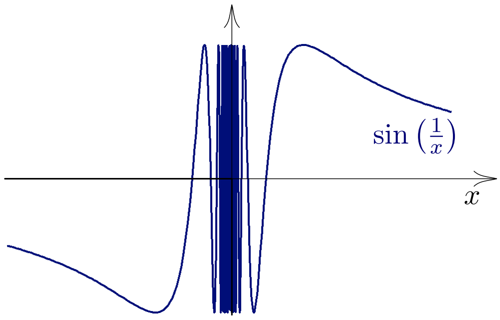
(b) Kdy neexistuje limita v bodě x_0, i když funkce je definovaná v jeho okolí?

(i) Když funkce je „přetržená“, tj. zleva se funkční hodnoty blíží k jinému číslu než zprava, například funkce znaménka $\mathrm{sgn}(x)$ v okolí bodu 0, kdy zleva se hodnoty „blíží“ k -1 a zprava k $+1$.

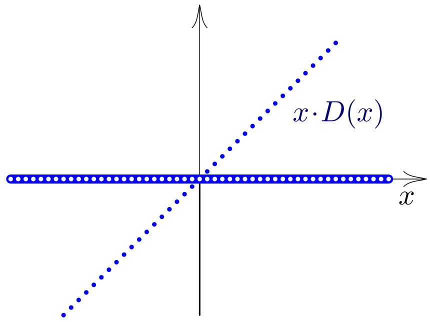
(ii) Když hodnoty funkce „utečou“ do nekonečna, například funkce $\frac{1}{x^2}$ v okolí bodu nuly. Později tuto situaci popíšeme jako „nekonečnou“ limitu. V případě $\frac{1}{x}$ v bodě nula to budou jenom dvě různé jednostranné nekonečné limity.

(iii) Speciální případem je funkce $\sin(\frac{1}{x})$, viz Obr. 5.7. Funkce má limitu a je spojitá v každém bodě kromě bodu nula. V každém okolí $(-\delta, \delta)$ bodu nula tato funkce nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Proto už pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nenajdeme žádné $\delta > 0$, pro které by podmínka (c) z definice limity byla splněna.

(iv) Funkce Dirichletova $D(x)$, která má hodnotu 1 v racionálních x a 0 v iracionálních x, není spojitá ani nemá limitu v žádném bodě, protože v každém okolí každého bodu se vyskytují jak hodnoty 0, tak hodnoty 1.



Obr. 5.7: Funkce sin $\left(\frac{1}{x}\right)$ je nespojitá v nule, všude jinde je spojitá.



Obr. 5.8: Funkce $f(x) = x \cdot D(x)$ je spojitá v nule, jinde je nespojitá.

(c) Kdy funkce není spojitá v bodě x_0? Existuje několik situací:

(i) Funkce není v bodě x_0 nebo v jeho okolí definovaná.

(ii) Funkce je definovaná v okolí bodu x_0 kromě bodu x_0 a má v bodě x_0 limitu. Potom funkci lze dodefinovat v bodě x_0 touto limitou a dostaneme funkci spojitou. Říkáme, že je to odstranitelná nespojitost.

(iii) Funkce je definovaná v okolí x_0, limita existuje, ale není rovna funkční hodnotě $f(x_0)$. Opět předefinováním funkční hodnoty v bodě x_0 dostaneme funkci spojitou.

(iv) Funkce je definovaná v celém okolí, ale limita neexistuje. Potom nespojitost nelze odstranit a nezáleží na tom, zda je funkce definovaná v bodě x_0 nebo není. V tomto případě nespojitost není odstranitelná.

(d) Existují však funkce, které intuitivně „od pohledu“ nejsou spojité, ale podle definice spojité jsou. Například součin x a Dirichletovy funkce $f(x) = x \cdot D(x)$, viz Obr. 5.8, tj.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \text{ racionální,} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

Tato funkce má limitu 0 v bodě 0 a je proto v bodě $x = 0$ spojitá. Skutečně, pro $\varepsilon > 0$ stačí zvolit $\delta = \varepsilon$, pro které už podmínka: $|x - 0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ je splněna, protože rozdíly $|x - 0|$ v $x \in \mathbb{Q}$ i $|0 - 0|$ v $x \notin \mathbb{Q}$ jsou už menší než $\varepsilon = \delta$. V ostatních bodech však limita neexistuje (stačí zvolit $\varepsilon = \frac{x}{2}$), proto ani funkce zde není spojitá.

Jednostranné limity a spojitost

Pojem limity a spojitosti rozšíříme pro případ, kdy funkce je definovaná jenom v levém nebo pravém redukovaném okolí bodu x_0 (nebo nás funkce v opačném okolí nezajímá), abychom například mohli mluvit o spojitosti funkce na uzavřeném intervalu. Zavedeme limitu funkce v x_0 zleva a zprava tím, že podmínku omezíme na levé nebo pravé redukované okolí bodu x_0: podmínku budeme vyžadovat v jednostranném okolí místo oboustranného okolí.

Definice 5.13. (**Jednostranné limity a spojitost – epsilon-delta definice**)
Řekneme, že funkce $f(x)$ definovaná v nějakém levém redukovaném okolí bodu x_0 **má limitu A v bodě x_0 zleva**, jestliže

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$

a zapisujeme $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$. Podobně funkce $f(x)$ definovaná na nějakém pravém redukovaném okolí bodu x_0 **má limitu A v bodě x_0 zprava**, jestliže

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$

a zapisujeme $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$. Dále řekneme, že funkce $f(x)$ definovaná v nějakém levém okolí bodu x_0 je **spojitá v bodě x_0 zleva**, jestliže

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

a funkce $f(x)$ definovaná v pravém okolí bodu x_0 je **spojitá v bodě x_0 zprava**, jestliže

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pomocí levého a pravého okolí lze definice jednostranné limity a spojitosti přepsat:

Definice 5.14. (**Jednostranné limity a spojitost – definice pomocí okolí**)
Buď $f(x)$ funkce definovaná v levém (pravém) redukovaném okolí bodu x_0.

Řekneme, že **funkce $f(x)$ má limitu A v bodě a zleva(zprava)**, pokud

$\forall\, U$-okolí bodu A $\exists\, V$-levé (pravé) okolí bodu x_0, že $\forall x \in V$, $x \neq x_0$ platí $f(x) \in U$.

Buď $f(x)$ funkce definovaná v levém (pravém) okolí bodu x_0 včetně bodu x_0.
Řekneme, že **funkce $f(x)$ je v bodě x_0 spojitá zleva(zprava)**, pokud

$\forall\, U$-okolí bodu $f(x_0)$ $\exists\, V$-levé (pravé) okolí bodu x_0, že $\forall\, x \in V$ platí $f(x) \in U$.

Řekneme, že funkce je spojitá na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b \rangle$, jestliže ve vnitřních bodech intervalu je spojitá (oboustranně) a v koncových bodech a a b je spojitá jednostranně: v bodě a spojitá zprava a v bodě b spojitá zleva.

Věta 5.15.
(a) Pokud existuje limita (oboustranná), existují i obě limity jednostranné a jsou si rovny.
(b) Pokud jsou jednostranné limity různé, potom (oboustranná) limita neexistuje. Pokud obě jednostranné limity existují a jsou stejné, existuje i limita a rovná se jednostranným.
(c) Podobně, je-li funkce spojitá zleva i zprava, je spojitá.

5C. Vlastnosti limit a spojitosti

Pokud funkce $f(x)$ je spojitá (nebo jednostranně spojitá) v bodě x_0, potom limita je rovna funkční hodnotě $f(x_0)$. Pokud je funkce dána jako kombinace elementárních funkcí, polynomů, atd., lze při určování limit využít jejich vlastností. Jen ve speciálních případech, např. typu Dirichletovy funkce, limitu nutno vyšetřovat podle definice. Vlastnosti, které lze využít při vyšetřování limit, shrneme ve větě. Zatím předpokládáme, že všechny limity jsou konečné.

Věta 5.16. (**Vlastnosti limit**) Obvyklé operace zachovávají limitu:

(a) **Limita násobku limit je násobek limit**. Pokud limita na pravé straně rovnosti existuje, existuje i limita na levé straně a pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)\,.$$

(b) **Limita součtu a součinu limit je součet a součin limit**. Pokud existují limity vpravo, existuje i limita vlevo a platí rovnost:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\,, \quad \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

(c) **Limita podílu je podíl limit**: pokud existují limity vpravo a **limita ve jmenovali je různá od nuly**, potom existuje i limita vlevo a platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\,, \qquad (\text{pokud} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0)\,.$$

(d) **Limita složené funkce je rovna složené funkci limit**, pokud **vnitřní funkce je spojitá v bodě x_0** a existují limity vpravo: Jestliže $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$ a $\lim_{y\to y_0} f(y) = A$, potom existuje limita složené funkce a platí:

$$\lim_{x\to x_0} (f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y) = A\,, \quad \text{kde} \;\; y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

Poznámky 5.17.

(a) Důkazy všech tvrzení jsou jednoduché a podobné, ukažme si důkaz alespoň tvrzení (b) o součtu limit. Předpokládejme, že existují limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$.

Buď $\varepsilon > 0$. Chceme najít δ, aby pro každé x z redukovaného δ-okolí bodu x_0 platilo

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < \varepsilon\,.$$

Podle definice limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ pro $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ existuje δ_1, že pro každé $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_1$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon_1$. Podobně z definice limity $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ existuje δ_2, že pro každé $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_2$ platí $|g(x) - B| < \varepsilon_2$.

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pro každé $x \neq x_0$ z δ-okolí bodu x_0 platí

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)| = |(f(x)-A)+(g(x)-B)| \leq |f(x)-A|+|g(x)-B| < \varepsilon_1+\varepsilon_2 = \varepsilon\,.$$

(b) Při limitě podílu je podstatný předpoklad, že limita funkce $g(x)$ ve jmenovateli je nenulová. Potom funkce $g(x)$ je v jistém okolí také nenulová a podíl je tak definován.

Pokud by limita funkce $g(x)$ ve jmenovateli byla nulová a $g(x)$ v okolí nenulová, podíl by byl definován, ale limita by mohla být libovolné číslo $A \in \mathbb{R}$, případně nevlastní nebo nemusí existovat. Například pro $f(x) = Ax$ a $g(x) = x$ platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{Ax}{x} = A.$$

Nechť $g(x) = x$. Položíme-li $f(x) = x^2$, limita podílu $f(x)/g(x)$ pro $x \to 0$ bude nulová, v případě $f(x) = \pm\sqrt{|x|}$ limita podílu bude $\pm\infty$ a v případě $f(x) = x \sin(1/x)$ limita podílu nebude existovat.

(c) Při limitě $x \to x_0$ složené funkce $f(g(x))$ je podstatná podmínka spojitosti vnitřní funkce $g(x)$ v bodě x_0. Kdyby totiž $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$ a $g(x_0) = B$, $A \neq B$, potom $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(A)$, zatímco hodnota složená funkce je $f(B)$.

Například jestliže $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a $g(\xi) = \xi^2$, potom $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sgn}(x))^2 = 1$, zatímco $(\operatorname{sgn}(\lim_{x\to 0} x))^2 = (\operatorname{sgn}(0))^2 = 0 \neq 1$.

Při vyšetřování spojitosti opět možno využít podobné vlastnosti:

Věta 5.18. (**Určování spojitosti funkce**) Obvyklé operace zachovávají spojitost funkcí:

(a) Násobek, součet a součin funkcí spojitých v bodě (na intervalu) je funkce spojitá v bodě (na intervalu).

(b) Podíl funkcí spojitých v bodě (na intervalu) je funkce spojitá, pokud funkce ve jmenovateli je různá od nuly v bodě (na intervalu).

(c) Složením spojitých funkcí dostaneme funkci spojitou, pokud složená funkce je definovaná, tj. obor hodnot vnitřní funkce je částí definičního oboru vnější funkce.

Podrobněji: je-li $g(x)$ spojitá na intervalu $\mathcal{D}(g) = (a, b)$ s oborem hodnot $\mathcal{H}(g) = (c, d)$ a $f(y)$ spojitá na $\mathcal{D}(g) = (A, B)$, přičemž $(c, d) \subset (A, B)$, tj. $\mathcal{H}(g) \subset \mathcal{D}(f)$, potom složená funkce $f(g(x))$ je spojitá na (a, b).

5D. Limity nevlastní a v nevlastních bodech

Dosud jsme mluvili o vlastních limitách ve vlastních bodech $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, tj. kdy bod x_0 i limita A byla (reálná, tj. konečná) čísla. Abychom pojem limity rozšířili i na nevlastní (tj. nekonečné) limity i limity v nevlastních bodech, tj. v kladném i záporném nekonečnu, zavedeme pojem okolí nekonečna:

Definice 5.19. (**okolí nekonečna**) Libovolný interval (K, ∞), kde $K > 0$, nazveme **okolím nekonečna**, resp. **K-okolí nekonečna**. Množinu všech okolí nekonečna označíme $\mathcal{O}(\infty)$.

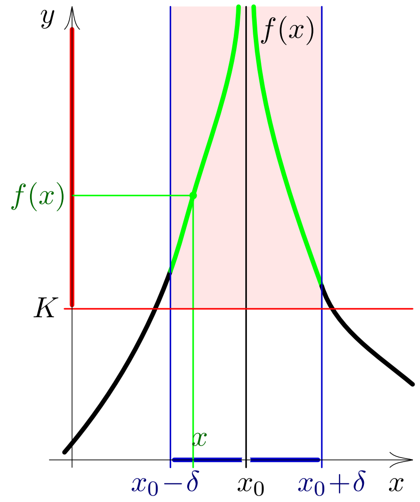
Podobně libovolný interval $(-\infty, -K)$ nazveme **okolím minus nekonečna**, případně **K-okolím minus nekonečna**. Množinu všech těchto okolí označíme $\mathcal{O}(-\infty)$.

Poznámky 5.20.

(a) V případě r-okolí bodů jsme požadovali vždy kladný poloměr $r > 0$, hlavní význam měla malá r.

V případě okolí nekonečna požadavek $K > 0$ není nutný. V definici mají hlavní význam velká K, připustíme-li K záporná, význam definice se nezmění: například pro $K = -10$ pokud $f(x)$ je v okolí $(10, \infty)$ je i ve větším okolí $(-10, \infty)$.

Vždy předpokládáme, že funkce $f(x)$ je definovaná v okolí bodu x_0, případně levém nebo pravém okolí. Pomocí okolí nekonečna zavedeme nevlastní (nekonečné) limity ve vlastním bodě x_0 tím, že okolí A nahradíme okolím nekonečna:



Obr. 5.9: Nevlastní limita v x_0.

Definice 5.21. (**Nevlastní limity**)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \ \text{ platí } f(x) > K\,,$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, U \in \mathcal{O}(\infty) \ \ \exists V \in \mathcal{O}(x_0), \ \ \forall x \in V \ x \neq x_0 \ \text{ platí } \ f(x) \in U$$

pomocí okolí a analogicky limitu minus nekonečno

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \ \text{ platí } f(x) < -K\,.$$

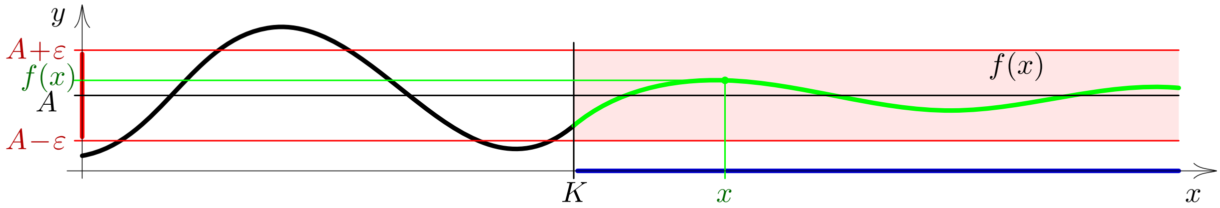
Definici nevlastní limity v bodě x_0 zleva nebo zprava dostaneme tím, že místo celého okolí bodu x_0 bereme jenom levé nebo pravé okolí.

V definici konečné limity A v nevlastních bodech $x \to \infty$ nebo $x \to -\infty$ okolí bodu x_0 nahradíme okolím plus nebo minus nekonečna:

Definice 5.22. (**Limity v nevlastních bodech**)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists L > 0 \ \ \forall x > L \ \text{ platí } |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists L > 0 \ \ \forall x < -L \ \text{ platí } |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$



Obr. 5.10: Limita v nevlastním bodě. Pro $x > K$ hodnoty $f(x)$ leží v ε-pásu limity A.

Pro úplnost ještě uveďme definici nevlastní limity v nevlastním bodě, například

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0 \ \ \exists\, L > 0 \ \ \forall x > L \ \text{ platí } f(x) < -K\,.$$

Jako cvičení vytvořte definice ostatních případů limit, např. $x \to -\infty$ a $\lim f(x) = -\infty$.

Obecná definice limity

Pomocí pojmů okolí bodu i nekonečna můžeme všechny případy zapsat v jedné definici:

Definice 5.23. (**Limita funkce**) Buď $x_0 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a $A \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Potom

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathbf{A}) \quad \exists \mathbf{V} \in \mathcal{O}(\mathbf{x_0}) \quad \forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{x_0},\ \mathbf{x} \in \mathbf{V} \quad \text{platí} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{U}\,,$$

v případě jednostranné limity v bodě x_0 bereme odpovídající jednostranná okolí bodu x_0.

Limita posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ je speciálním případem funkce definované na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$. Její limita, viz Definice 5.1 resp. 5.2 je limita v nevlastním bodě, tj. pro $n \to \infty$ a $A \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \quad \text{platí} \quad |a_n - A| < \varepsilon\,.$$

nebo pomocí okolí:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, U \in \mathcal{O}(A) \quad \exists\, V \in \mathcal{O}(\infty) \quad \forall\, n \in V \cap \mathbb{N} \quad \text{platí} \quad a_n \in U\,.$$

Pokud posloupnost má konečnou limitu, říkáme, že posloupnost je konvergentní.
Definici nevlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jistě již dokážete napsat sami.

Uveďme dvě vlastnosti limit posloupnosti, které plynou z definice.

Věta 5.24. (a) Limita posloupnosti je určena jednoznačně.

(b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost s limitou A. Potom každá vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ je také konvergentní a má stejnou limitou A.

Vlastnosti nevlastních limit

Limity v nevlastních bodech $x \to \pm\infty$ mají stejné vlastnosti jako limity ve vlastních bodech a lze s nimi počítat jako s jednostrannými limitami ve vlastních bodech. S nevlastními limitami je nutno počítat opatrně. Pro operace s nevlastními limitami platí:

Věta 5.25. (**Pravidla počítání s nevlastními limitami**) Pro reálné číslo A platí:

(a) Součet: $A + \infty = \infty + A = \infty + \infty = \infty\,,$ $\quad A - \infty = -\infty + A = -\infty - \infty = -\infty\,.$

(b) Násobek a součin: je-li $A > 0$ potom $A \cdot \infty = \infty$ a $A \cdot (-\infty) = -\infty\,.$
Je-li $A < 0$ potom $A \cdot \infty = -\infty$ a $A \cdot (-\infty) = \infty.$
Navíc $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ a $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.$

(c) Podíl: Je-li A konečné, potom $\frac{A}{\infty} = 0.$

Jestliže $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ a v okolí bodu x_0 platí $g(x) > 0$, potom

$$\text{pro } A > 0 \text{ je } \lim_{x \to x_0} \frac{A}{g(x)} = \infty \quad \text{a} \quad \text{pro } A < 0 \text{ je } \lim_{x \to x_0} \frac{A}{g(x)} = -\infty.$$

Podobně, pokud v okolí $g(x) < 0$, potom $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A}{g(x)} = -\operatorname{sgn}(A) \cdot \infty$.

Pokud funkce $g(x)$ mění v bodě x_0 znaménko, potom tvrzení platí pro jednostranné limity, například: je-li $\lim_{x \to x_0-} g(x) = 0$ a v levém okolí bodu x_0 platí $g(x) > 0$, potom pro $A > 0$ je $\lim\limits_{x \to x_0-} \dfrac{A}{g(x)} = \infty$.

(d) Mocnina: Pro $A > 1$ platí $A^{\infty} = \infty$ a $A^{-\infty} = 0$.
Pro $A \in (0, 1)$ platí obráceně $A^{\infty} = 0$ a $A^{-\infty} = \infty$.

(e) Záměna proměnné (složená funkce), například pokud $y = \frac{1}{x}$ potom

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{y \to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{y \to \infty} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Varování: V případě tzv. **neurčitých výrazů** výše uvedeným způsobem nelze určit limitu z jednotlivých limit. Mezi **neurčité výrazy** patří:

$$\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}.$$

V těchto případech musíme limitu počítat buď úpravou výrazu nebo použít tzv. „l'Hospitalovo pravidlo“, se kterým se seznámíme později.

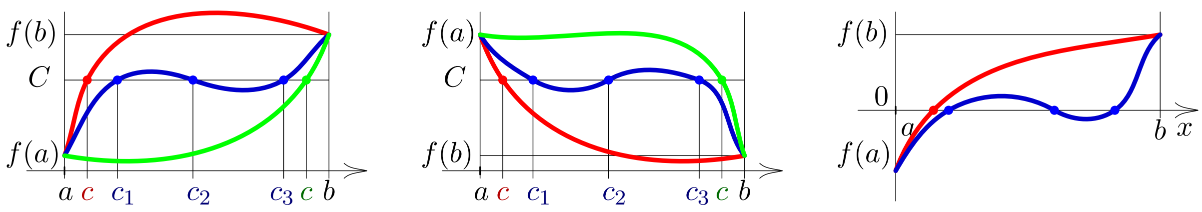
5E. Vlastnosti spojitých funkcí

Spojité funkce mají řadu důležitých vlastností, uveďme některé z nich. Hodnoty funkce spojité na intervalu tvoří tzv. souvislou množinu – množina hodnot „nemá díry“:

Věta 5.26. Buď $f(x)$ funkce spojitá na intervalu $I = \langle a, b \rangle$.

(a) Potom funkce $f(x)$ nabývá všech hodnot mezi $f(a) = A$ a $f(b) = B$, tj.
$\forall\, C \in \langle A, B \rangle$ (resp. $\forall\, C \in \langle B, A \rangle$) existuje alespoň jedno $c \in \langle a, b \rangle$ takové, že $f(c) = C$.

(b) Speciálně, pokud hodnoty funkce v koncích intervalu mají opačná znaménka, tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom rovnice $f(x) = 0$ má alespoň jedno řešení, tj. existuje alespoň jedno $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



Obr. 5.11: Funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá libovolné hodnoty C mezi $f(a)$ a $f(b)$ v alespoň jednom bodě $c \in \langle a, b \rangle$. Pokud $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom rovnice $f(x) = 0$ má alespoň jedno řešení.

Náznak důkazu druhého tvrzení.. Nechť $f(a) < 0 < f(b)$. Označme M množinu všech čísel $s \in I$ takových, že $f(x) < 0$ pro každé $x \in \langle a, s\rangle$. Protože $f(a) < 0$, množina M obsahuje alespoň bod a. Jako každá neprázdná množina i množina M své má suprémum, které označíme c. Protože $f(b) > 0$, platí $c < b$.

Jaká je hodnota $f(c)$? Kdyby $f(c) > 0$, potom pro $\varepsilon \in (0, f(c))$ existuje δ-okolí, ve kterém je také $f(x) > 0$. To je ve sporu s tím, že $f(x) < 0$ pro každé $x < c$.

Na druhé straně, kdyby $f(c) < 0$, potom opět díky spojitosti by bylo $f(x) < 0$ i v nějakém pravém okolí bodu c, což opět není možné. Proto $f(c) = 0$.

Případ $f(a) > 0 > f(b)$ lze dokázat podobně, nebo situaci převést na předchozí případ pomocí funkce $f^*(x) = -f(x)$.

První tvrzení plyne z druhého. Buď C mezi hodnotami $f(a)$ a $f(b)$. Potom posunutá funkce $f^*(x) = f(x) - C$ splňuje podmínku $f^*(a) \cdot f^*(b) < 0$ a druhé tvrzení dává existenci c takového $f^*(c) = f(c) - C = 0$ odkud plyne $f(c) = C$. □

Poznámka: Obě tvrzení jsou názorná, viz Obr. 5.11. Druhé z nich se využívá při řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$, protože podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$ zaručuje existenci kořene spojité funkce $f(x)$ v intervalu (a, b).

Další vlastností spojitých funkcí je jejich omezenost a existence extrémů.

Věta 5.27. (Omezenost a existence absolutních extrémů)
Buď $f(x)$ funkce spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $I = \langle a, b\rangle$. Potom

(a) funkce $f(x)$ je omezená shora i zdola, tj. existují reálná čísla $K < L$ taková, že

$$K < f(x) < L \quad \forall x \in I\,,$$

(b) funkce $f(x)$ na intervalu I nabývá svého minima i maxima, tj. existují čísla $c, d \in I$ taková, že

$$f(c) = \min_{x\in I} f(x)\,, \quad f(d) = \max_{x\in I} f(x), \qquad \text{tj.} \qquad f(c) \le f(x) \le f(d)\,,\ \forall x \in I$$

Poznámky 5.28.

(a) Pozor, podmínku omezenosti intervalu I nelze vynechat, bez ní tvrzení neplatí. Například funkce $f(x) = x$ je spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$, ale není omezená ani nemá maximum ani minimum. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na $(-\infty, \infty)$ je sice omezená, ale nemá minimum ani maximum.

(b) Také podmínku uzavřenosti intervalu I nelze vynechat. Například funkce $\operatorname{tg} x$ je spojitá na omezeném intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ale není zde omezená, nemá ani minimum ani maximum.

Důkaz. Naznačme důkaz existence maxima. Využijeme přitom tvrzení: Každá posloupnost v uzavřeném omezeném intervalu I obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou v I.

Tvrzení lze snadno dokázat pomocí půlení intervalu I, protože vždy v jedné polovině intervalu zůstává nekonečně mnoho hodnot.

Vraťme se k důkazu. Označme M obraz zobrazení f, tj. množinu všech hodnot funkce $f(x)$

na intervalu I. Množina M je neprázdná a má proto své suprémum m, které je konečné číslo, pokud množina je shora omezená, nebo nekonečno, pokud množina je neomezená.

Z definice suprema existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$. Díky výše uvedenému tvrzení posloupnost $\{x_n\}$ obsahuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $x^* \in I$. Díky spojitosti funkce $f(x)$ z $x_{n_k} \to x^*$ plyne $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$. Ale limitou $f(x_n)$ a proto i $f(x_{n_k})$ je supremum m. Platí tedy $f(x^*) = m$. Čímž jsme dokázali, že supremum m je konečné a $f(x^*) = m$ je maximum $f(x)$ na intervalu I. □

5F. Tři důležité limity

Spočítáme tři limity typu $[\frac{0}{0}]$. Výpočet je jednak instruktivní, na druhé straně výsledek využijeme v další kapitole při odvozování derivace elementárních funkcí.

Věta 5.29. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,.$$

Výpočet první limity. Výpočet první limity je založen na nerovnosti

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,.$$

Nerovnost plyne z následujícího obrázku. Uvažujme úhel $\measuredangle AOB$ velikosti $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ v radiánech v rovině s osami y, z, s vrcholem v počátku a počátečním ramenem v poloose y. Označme $O = [0, 0]$ počátek, průsečík vodorovné osy s jednotkovou kružnicí $A = [1, 0]$, průsečík druhého ramene úhlu s jednotkovou kružnicí $B = [\cos x, \sin x]$ a průsečík $C = [1, \operatorname{tg}(x)]$ ramene úhlu s kolmicí $y = 1$, viz Obr. 5.12.

Na obrázku jsou tři útvary:

(a) trojúhelník $T_1 = \Delta AOB$ se základnou OA délky 1 a výškou $\sin x$. Jeho plošný obsah je $\frac{1}{2}\sin x$;

(b) kruhová výseč V s rameny $0A$ a $0B$ a obloukem AB délky x. Její plošný obsah je $\frac{1}{2}x$ a

(c) pravoúhlý trojúhelník $T_2 = \Delta OAC$ se základnou OA délky 1 a výškou AC. Jeho plošný obsah je $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$.

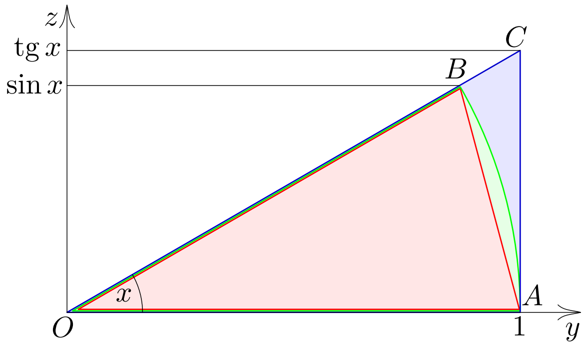
Protože $T_1 \subset V \subset T_2$ pro jejich obsahy platí

$$|T_1| < |V| < |T_2| \quad \text{tj.} \quad 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Převrácené hodnoty dávají

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}\,.$$

Vynásobíme-li nerovnost výrazem $\sin x$, dostáváme $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, odkud plyne dokazovaná limita pro $x \to 0$ zprava, protože pro $x \to 0$ platí $\cos x \to 1$. Protože funkce $x, \sin x, \operatorname{tg} x$ jsou funkce liché, opačné nerovnosti platí pro x jdoucí k nule zleva, čímž je dokázána oboustranná limita. □



Obr. 5.12: K výpočtu první limity. Z inkluzí $T_1 \subset V \subset T_2$
plyne nerovnost $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Idea výpočtu druhé limity. Eulerovo číslo e je dáno jako limita posloupnosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$. Lze dokázat, že tato posloupnost je rostoucí. Také lze dokázat, že posloupnost $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ je klesající a má za limitu opět Eulerovo číslo e. Proto pro každé n platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n .$$

Pro $x_n = \frac{1}{n}$ umocněme výrazy na x_n-tou, tj. udělejme z nich n-té odmocniny:

$$1+\frac{1}{n} < \mathrm{e}^{x_n} < 1+\frac{1}{n-1} .$$

Nyní stačí odečíst jedničku a podělit kladným x_n, tj. násobit n. Dostáváme:

$$1 < \frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n} < \frac{n}{n-1} = 1+\frac{1}{n-1} \;\longrightarrow\; 1 .$$

Pro $n \to \infty$ platí $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, čímž je limita dokázána pro $x_n = \frac{1}{n} \to 0+$.

Poznamenejme, že jsme dokázali, že limita platí pro posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$ jdoucí k nule zprava. Pro úplný důkaz by bylo potřeba dokázat, že limita platí pro všechna $x \to 0$ a také pro x jdoucí k nule zleva. □

Výpočet třetí limity. Tuto limitu lze snadno převést na druhou. Protože $\ln x$ je funkce inverzní k funkci e^x, platí $\ln(1+x) = y$ právě když $\mathrm{e}^y = 1+x$. Rovnost platí pro x, y v okolí nuly, přičemž $x \to 0$ právě když $y \to 0$. Přepíšeme-li výraz v třetí limitě pomocí y, dostáváme výraz v druhé limitě:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\mathrm{e}^y-1} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}\right)^{-1} = 1 .$$

□