Extrémy funkcí více proměnných

1. Nalezněte lokální extrémy funkce:
   a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;
   Výsledek: Stacionární body $A = [0,0]$ - nenastává extrém, $B = [1,1]$ - ostré lokální minimum.
   b) $u = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$;
   Výsledek: Stacionární body $A = [1,1,1]$- nenastává extrém, $B = [2,1,4]$ - minimum.
   c) $z = \mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;
   Výsledek: Stacionární bod $A = [-4,-2]$ - nastává maximum, $B = [-4,2]$, $C = [0,0]$ - nenastává extrém.
   d) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$;
   Výsledek: Stacionární body $A = [1,0]$, $B = [-1,0]$, $C = [0,1]$, $D = [0,-1]$- nenastává extrém,
   $E = [\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $F = [-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$ - minimum,
   $G = [-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $H = [\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$ - maximum.
   e) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;
   Výsledek: Stacionární body $A = [0,0]$ - ostré lokální maximum,
   $B = [0,1]$, $C = [0,-1]$, $D = [\frac{1}{2},0]$, $E = [-\frac{1}{2},0]$ - nenastává extrém,
   $F = [\frac{1}{2},1]$, $G = [\frac{1}{2},-1]$, $K = [-\frac{1}{2},1]$, $L = [-\frac{1}{2},-1]$ - nastává minimum.
   f) $f = x^2 + \frac{2y^2}{x} + 4y$; *Výsledek:* Minimum v bodě $[1,-1]$.
   g) $z = 6xy - x^3 - y^2 + 2$; *Výsledek:* $S_1[0,0]$ není extrém, $S_2[6,18]$ je o. l. max
   h) $z = x^2 + y^3$; *Výsledek:* $S_1[0,0]$ není extrém, rozhodneme podle definice
   i) $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$;
   Výsledek: V $B[0,0]$ neexistují parc. derivace. Rozhodneme podle definice a je zde o. l. max.
   j) $z = 2 + x^2 + x^2y^2$; *Výsledek:* Stac. body leží na ose y, tj. $S[0,c]$, kde $c \in \mathbb{R}$.
   Rozhodneme podle definice, že jde o neostré l. min

2. Určete lokální extrémy funkce:
   (a) $u(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$. *[$[\frac{1}{2},1,1]$ o. l. min., $[-\frac{1}{2},-1,-1]$ o. l. max.]*
   (b) $f(x,y) = 4x^3 + 8y^3 - 24xy + 3$ *[stac. body $A = [0,0]$ a $B = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}]$, v B je o. l. min.]*
   (c) $f(x,y) = xy(6 - x - y)$ *[stac. body $A = [0,0]$, $B = [6,0]$, $C = [0,6]$, $D = [2,2]$, v D je o. l. max.]*
   (d) $f(x,y) = \left(x^2 - 2y + 1\right)^2$ *[stac. body leží na parabole $x^2 - 2y + 1 = 0$ a jde o neostrá minima]*
   (e) $f(x,y) = 2 - \sqrt[3]{(x-y)^2}$ *[parc. derivace neexistují v bodech $y = x$ a jde o neostrá maxima]*
   (f) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ *[stac. body $A = [0,0,-1]$, $B = [24,-144,-1]$, v B je o. l. min]*

3. Určete lokální extrémy funkcí:
   a) $f(x,y) = x^2 + y^4$; *Výsledek:* Ostré lokální minimum v bodě $[0,0]$.
   b) $f(x,y) = x^2 + x^2y^2$; *Výsledek:* Stacionární body $[0,c]$, kde $c \in \mathbb{R}$. Neostré lokální minimum v bodě $[0,0]$.
   c) $f(x,y) = x^2 + y^3$; *Výsledek:* Stacionárním bodem je $[0,0]$, ale extrém tam nenastane.
   d) $f(x,y) = x^2 \cdot y^2$; *Výsledek:* Neostré lokální minimum v bodě $[0,0]$.
   e) $f(x,y) = x^2 - y^2$; *Výsledek:* Jde o sedlo; stac. bodem je $[0,0]$, extrém zde nenastane.
   f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; *Výsledek:* Jde o kužel, stac. body neexistují, v bodě $[0,0]$ je globální minimum.

4. Určete vázané extrémy následujících funkcí:
   a) $z = 6 - 4x - 3y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$;
   Výsledek: $A = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$, $\lambda = \frac{5}{2}$ - minimum, $B = [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$, $\lambda = -\frac{5}{2}$ - maximum.
   b) $f(x,y) = xy - x + y - 1$ za podmínky $x + y = 1$;
   Výsledek: Stacionární bod $A = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ - Lagrangeovou metodou nelze o vázaném extrému rozhodnout, avšak pokud z vazební podmínky vyjádříme y a dosadíme je do funkce $f(x,y)$ zjistíme, že v bodě A nastává vázané lokální maximum.
   c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$;
   Výsledek: Stacionární body $A = [2,-2]$, pro $\lambda = -2$ - lokální maximum,
   $B = [0,0]$, pro $\lambda = 0$ - lokální minimum.
   d) $f(x,y,z) = z^2 + x^2 + y^2$ za podmínek $x + y - 3z + 7 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$;
   Výsledek: Stacionární bod $A = [0,-1,2]$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ - vázané lokální minimum.
   e) $f(x,y) = x + y$ za podmínky $g(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$;
   Výsledek: Stacionární body $A = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pro $\lambda = \sqrt{2}$ - minimum,
   $B = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$, pro $\lambda = -\sqrt{2}$ - maximum.

f) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 5$, vazební podmínkou je přímka daná body $A[1,2]$ a $B[-3,1]$.
Výsledek: V bodě $S_1[\frac{7}{15}, 2]$ je o. v. l. min.

g) $f(x,y) = x^2 + 3xy^3 - xy$, vazební podmínkou je přímka daná body $A[0,0]$ a $B[3,2]$.
Výsledek: V bodě $S_1[0,0]$ je o. v. l. min.

h) $f(x,y) = x^2 + y^2$, vazební podmínkou je elipsa $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$.
Výsledek: V bodech $S_1[0,1]$ a $S_2[0,-1]$ je o. v. l. min, v bodech $S_3[2,0]$ a $S_4[-2,0]$ je o. v. l. max, ale musíme rozhodovat podle definice.

5. Určete vázané extrémy funkce:

(a) $f(x,y) = 2x + y + 6$ za podmínky $x^2 + y^2 - 5 = 0$.
[$A = [-2,-1]$ o. v. l. min., $B = [2,1]$ o. v. l. max.]

(b) $f(x,y) = 6 + xy$ za podmínky $x - y - 2 = 0$. *[$A = [1,-1]$ o. v. l. min.]*

(c) $f(x,y) = x + \frac{1}{2}y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$.
[$A = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ o. v. l. max.,$B = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ o. v. l. min.]

(d) $f(x,y) = x^2 y$ za podmínky $y = \mathrm{e}^x$. *$A = [-2, \mathrm{e}^{-2}]$ o. v. l. max., $B = [0,1]$ o. v. l. min.]*

(e) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$ za podmínky, která je dána přímkou AB, kde $A[1,2]$ a $B[-3,-1]$.
[$[-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$ v. l. max.]

(f) $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy + 2$ za podmínky, která je dána přímkou AB, kde $A[2,-2]$ a $B[2,3]$.
[$[2,1]$ v. l. min.]

(g) $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.
[pro $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ je $[0,3]$ v. l. max., pro $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ je $[0,-1]$ v. l. min.]

(h) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.
[$[2,-2]$ v. l. max. a $[0,0]$ v. l. min.]

(i) $u(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $a > b > c > 0$ za podmínky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
[$[\pm 1, 0, 0]$ o. v. l. min., $[0,0,,\pm 1]$ o. v. l. max. a $[0,\pm 1, 0]$ extrém není]

6. Určete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M:

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $M : |x| + |y| \leq 1$;
Výsledek: Minimum v bodě $[0,0]$, maximum v bodech $[\pm 1, 0]$ a $[0, \pm 1]$.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $M : x^2 + y^2 \leq 25$;
Výsledek: Minimum v bodě $[3,-4]$, maximum v bodě $[-3,4]$.

c) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y$, $M : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$;
Výsledek: Maximum v bodech $[0,0]$ a $[2,2]$, minimum v bodech $[2,0]$ a $[0,2]$.

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, M je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,-3]$, $[-3,0]$;
Výsledek: Minimum v bodě $[-1,-1]$, maximum v bodech $[0,-3]$ a $[-3,0]$.

e) $f(x,y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-x^2}$, M je čtverec o vrcholech $[-1,0]$, $[1,0]$, $[1,2]$, $[-1,2]$;
Výsledek: Maximum v bodech $[0,0]$ a $[0,2]$, minimum v bodech $[1,1]$ a $[-1,1]$.

f) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$, M je trojúhelník s vrcholy $A[2,-3]$, $B[3,-3]$, $C[2,4]$.
Výsledek: G. max. je v bodě $[2,0]$ a g. min. v bodě $C = [2,4]$.

7. Určete globální extrémy funkce f na množině M:

(a) $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 2y$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y| \wedge x^2 + y^2 \leq 20\}$.
[$A = [2,1]$, $B = [4,2]$, $C = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $D = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $E = [0,0]$, $F = \left[\sqrt{10}, \sqrt{10}\right]$, $G = \left[\sqrt{10}, -\sqrt{10}\right]$, g. max. je v G a g. min je v A]

(b) $f(x,y,z) = x + y + z$ na množině $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq x \geq y^2 + z^2\}$.
[$A = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $B = \left[1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $C = \left[1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, g. max. je v B, g. min. je v A]

(c) $f(x,y) = 6 - x^2 - y^2$, M je trojúhelník $\triangle ABC$, kde $A[5,3]$, $B[7,-1]$, $C[5,-1]$.
[g. max v bodě $[5,0]$, $f(5,0) = -19$ a g. min. v bodě $B[7,-1]$, $f(B) = -44$]

(d) Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na M tvořené trojúhelníkem daným souřadnými osami a tečnou ke grafu funkce $y = \frac{4}{x}$ v bodě $[2,2]$.
[$[0,4]$ a $[4,0]$ g.min. a $[1,1]$ g.max.]

(e) Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $z = (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. *[*$[0, \pm 1]$ *g.max. a* $[0, 0]$ *g. min]*

8. Slovní úlohy na extrémy:

a) Na parabole $y^2 = 4x$ nalezněte bod, který je nejblíže přímce $x - y + 4 = 0$.
Výsledek: Bod na parabole je $[1, 2]$, bod na přímce je $[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$.

b) Nalezněte kvádr největšího objemu, jestliže délka jeho úhlopříčky je rovna $2\sqrt{3}$.
Výsledek: Je to krychle o straně 2.

c) Nalezněte poloměr r a výšku h kužele s největším objemem, aby jeho plášť byl roven S.
Výsledek: $r = \frac{\sqrt{S}}{3^{1/4}\sqrt{\pi}}$, $h = \frac{\sqrt{2S}}{3^{1/4}\sqrt{\pi}}$.

d) Určete kvádr, který má při daném povrchu K maximální objem.
Výsledek: Je to krychle o straně $x = \sqrt{\frac{K}{6}}$.

e) Najděte taková čtyři reálná nezáporná čísla se součtem h, aby jejich součin byl největší.
Výsledek: $x = y = z = u = \frac{h}{4}$.

f) Určete poloměr r a výšku h válce, který má při daném povrchu K maximální objem.
Výsledek: $h = 2r = 2\sqrt{\frac{K}{6\pi}}$.

g) Mezi všemi trojúhelníky o daném obvodu $2p$ nalezněte trojúhelník s maximálním obsahem.
Výsledek: $x = y = z = \frac{2}{3}p$.