KŘIVKOVÝ INT. 2. DRUHU, POTENCIÁL 10.4.2017
ÚMFSI VUT

Ověřte, zda je vektorové pole $\vec{F} = (\overset{P}{x\sin 2y}, \overset{Q}{x^2\cos 2y})$ potenciální, najděte potenciál φ a pomocí potenciálu vypočtěte $\int_{\vec{\Gamma}} x\sin 2y\,dx + x^2\cos 2y\,dy$, kde $\Gamma = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y = 2x-3,\ -1\le x\le 3\}$, u které je bod $[3,3]$ počátečním bodem.

a) $\vec{F}$ je potenciální $\iff \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos 2y \cdot 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cdot\cos 2y\cdot 2$$

$\Rightarrow$ ano, $\vec{F}$ je potenciální

b) Hledáme potenciál φ, pro který platí $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\varphi} = \vec{F}$
$$(\varphi'_x, \varphi'_y) = (P, Q)$$

Tedy má platit

$\varphi'_x = P \Rightarrow \varphi'_x = x\cdot\sin 2y$ | integruji podle x

$$\varphi = \int x\cdot\sin 2y\,dx = \sin 2y\cdot\frac{x^2}{2} + C(y)$$

$\varphi'_y = Q$

$\varphi'_y = x^2\cos 2y$ | integruji podle y

$$\varphi = \int x^2\cos 2y\,dy = x^2\cdot\frac{\sin 2y}{2} + C(x)$$

Pro φ tedy musí platit $\varphi = \dfrac{x^2}{2}\sin 2y + C$.

c) Je-li $\vec{F}$ potenciální, potom $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}\,\vec{ds} = \varphi(\text{koncový bod}) - \varphi(\text{poč. bod})$

$$\int_{\vec{\Gamma}} x\sin 2y\,dx + x^2\cos 2y\,dy = \left[\frac{x^2}{2}\sin 2y\right]_{[3,3]}^{[-1,-5]} =$$

$$= \frac{(-1)^2}{2}\sin(2\cdot(-5)) - \frac{3^2}{2}\sin(2\cdot 3) = \frac{\sin(-10)}{2} - \frac{9\cdot\sin 6}{2} = 1{,}529$$