Ověřte, zda je vektorové pole $\vec{F} = \left(\overset{P}{\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2}}, \overset{Q}{\frac{1}{y}}, \overset{R}{-\frac{x}{z^2} - \frac{1}{1+z^2}}\right)$ potenciální, najděte jeho potenciál φ a pomocí potenciálu vypočtěte $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}\,\vec{ds}$, kde Γ je úsečka s poč. bodem $A[2,1,-1]$ a koncovým bodem $B[2,1,3]$.

a) $\vec{F} = (P,Q,R)$ je potenciální $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{F}} = \vec{o} = (0,0,0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{F}} = \nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{x^2} & \frac{1}{y} & -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{1+z^2} \end{pmatrix} = \cancel{\ }$$

$$= \left(0-0\,;\ (-1)z^{-2} - \left(\frac{1}{-z^2}\right);\ 0-0\right) = (0,0,0) = \vec{o} \Rightarrow \vec{F} \text{ je potenciální}$$

b) Hledáme potenciál φ, pro který platí $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\varphi} = \vec{F}$

$$(\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z) = (P,Q,R)$$

Tedy má platit

$$\varphi'_x = \frac{1}{z} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{z}x - \frac{x^{-1}}{-1} + C(y,z) = \frac{x}{z} + \frac{1}{x} + C(y,z)$$

$$\varphi'_y = \frac{1}{y} \Rightarrow \varphi = \ln|y| + C(x,z)$$

$$\varphi'_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow \varphi = -x \cdot \frac{z^{-1}}{-1} - \mathrm{arctg}\, z + C(x,y) = \frac{x}{z} - \mathrm{arctg}\, z + C(x,y)$$

Pro φ tedy musí platit $\varphi = \frac{x}{z} + \frac{1}{x} + \ln|y| - \mathrm{arctg}\, z + C$

c) $$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}\,\vec{ds} = \varphi(B) - \varphi(A) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \ln 1 - \mathrm{arctg}\, 3 - \left(\frac{2}{-1} + \frac{1}{2} + \ln 1 - \mathrm{arctg}(-1)\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + 2 - \mathrm{arctg}\, 3 - \frac{\pi}{4} \doteq 0{,}63$$