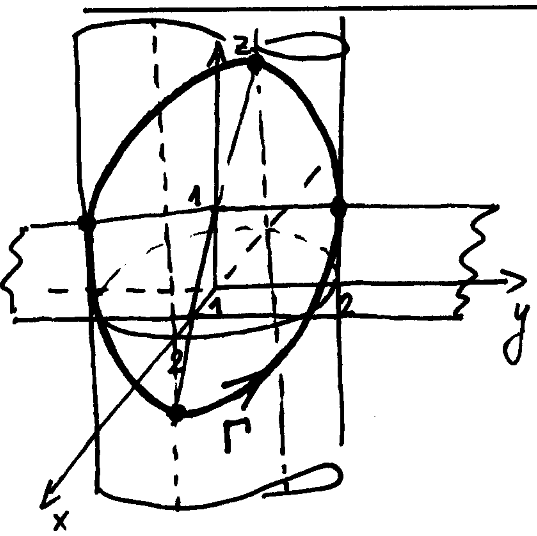
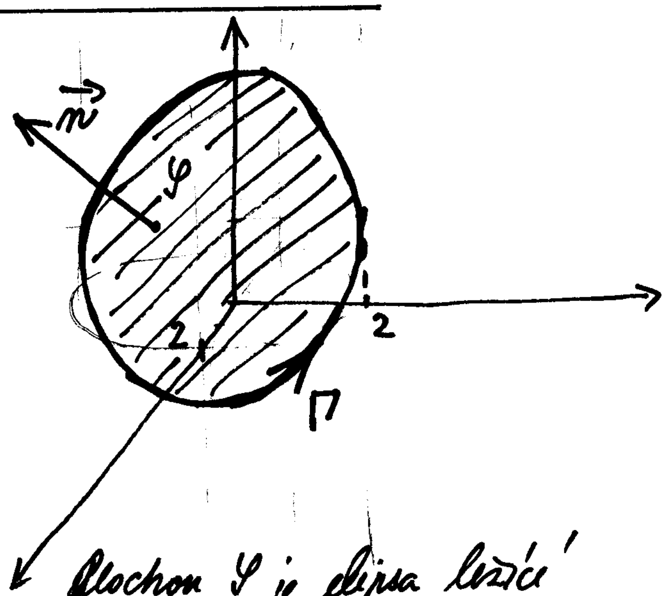
Pomocí Stokesovy věty spočtěte $\int_{\vec{\Gamma}} \overset{P}{y^2}dx + \overset{Q}{yz^2}dy + \overset{R}{xz}dz$, kde Γ je elipsa, která vznikne jako průnik válcové plochy $x^2+y^2=4$ s rovinou $x+z=1$. Γ je orientována kladně.



$\Longrightarrow$



Plochou φ je elipsa ležící v rovině $z=1-x$, orientace normály je dána orientací Γ.

Stokesova věta

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}\,\vec{ds} = \iint_{\vec{\varphi}} \vec{\mathrm{rot}\,\vec{F}}\,\vec{dS}$$

$$\vec{\mathrm{rot}\,\vec{F}} = \nabla \times \vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & yz^2 & xz \end{pmatrix} = (0-2yz, 0-z, 0-2y) = (-2yz, -z, -2y)$$

$$\int_{\vec{\Gamma}} y^2dx + yz^2dy + xz\,dz \overset{\text{Stokesova věta}}{=\!=\!=} \iint_{\vec{\varphi}} (-2yz, -z, -2y)\,\vec{dS}$$

φ je dána explicitně rovnicí $z = \underbrace{1-x}_{f(x,y)}$

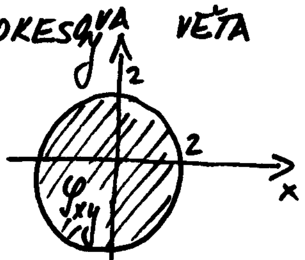
$$\vec{n} = (-f'_x, -f'_y, 1) = (-(-1), 0, 1) = (1,0,1)$$

$$= \iint_{\varphi_{xy}} (-2y(1-x), -(1-x), -2y)\cdot(1,0,1)\,dx\,dy = \iint_{\varphi_{xy}} -2y+2xy-2y\,dx\,dy =$$

φ_{xy} půdorys plochy φ

skalární součin

PLOŠNÝ INTEGRÁL 2. DRUHU, STOKESOVA VĚTA



$$= \iint_{S_{xy}} -4y + 2xy \, dx dy \overset{S_{xy} \text{ je kruh,}}{=\!=}$$

proto transformujeme do polárních souřadnic

$x = \rho\cos\varphi$ $\qquad 0 \le \rho \le 2$

$y = \rho\sin\varphi$ $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

jakobián $= \rho$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(-4\cdot\underbrace{\rho\sin\varphi}_{y} + 2\cdot\underbrace{\rho\cos\varphi}_{x}\underbrace{\rho\sin\varphi}_{y} \right)\cdot \underbrace{\rho}_{\text{jakobián}} \, d\varphi \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \rho \left(\int_0^{2\pi} \left(-4\rho\sin\varphi + \rho^2 \underbrace{2\sin\varphi\cos\varphi}_{\sin 2\varphi} \right) d\varphi \right) d\rho \;=\!=$$

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

$\int \sin 2\varphi \, d\varphi = \frac{-\cos 2\varphi}{2}$

$$= \int_0^2 \rho \cdot \left[-4(-\cos\varphi) + \rho^2\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right) \right]_0^{2\pi} d\rho =$$

$$= \int_0^2 \rho \left(4\cdot\cos 2\pi - \frac{\rho^2}{2}\cos(2\cdot 2\pi) - \left(4\cdot\cos 0 - \frac{\rho^2}{2}\cos(2\cdot 0) \right) \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \rho \cdot 0 \, d\rho = \int_0^2 0 \, d\rho = \underline{\underline{0}}$$