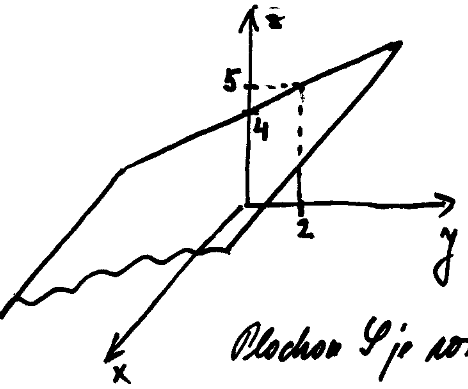
PLOŠNÝ INT. 1. DRUHU (VÝPOČET OBSAHU PLOCHY DANÉ EXPLICITNĚ)

4.5.2017
ÚM FSI VUT

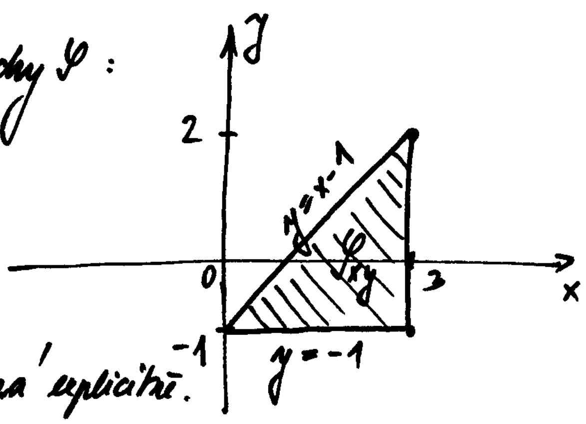
Vypočtěte obsah plochy $z=\frac{1}{2}y+4$ nad trojúhelníkem, který leží v půdorysně a má vrcholy $[0,-1]$, $[3,-1]$, $[3,2]$.

VZOREC pro výpočet obsahu plochy pomocí plošného integrálu 1. druhu:

$$\iint_{\mathcal{S}} 1\,dS$$



půdorys plochy $\mathcal{S}$:



Plochou $\mathcal{S}$ je rovina $z=\underbrace{\frac{1}{2}y+4}_{g(x,y)}$ daná explicitně.

Nachystáme si normálu:

$$\vec{n}=(-g'_x,-g'_y,1)=\left(-0,-\frac{1}{2},1\right)$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Obsah plochy $\mathcal{S}$:

$$\iint_{\mathcal{S}} 1\,dS=\iint_{\mathcal{S}_{xy}} 1\cdot|\vec{n}|\,dx\,dy=\int_0^3\left(\int_{-1}^{x-1} 1\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\,dy\right)dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\int_0^3\Big[y\Big]_{-1}^{x-1}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^3 x-1-(-1)\,dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^3 x\,dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=\frac{9\sqrt{5}}{4}\doteq 5$$