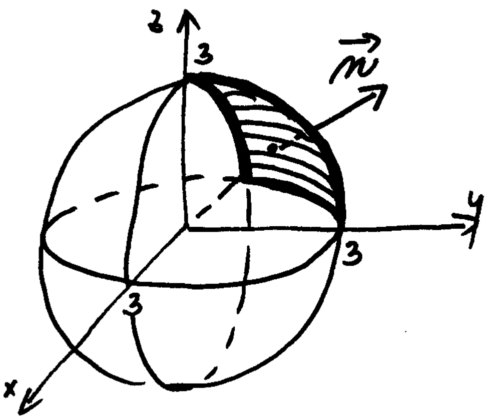
PLOŠNÝ INTEGRÁL 2. DRUHU (PLOCHA DANÁ EXPLICITNĚ)

Vypočtěte $\iint\limits_{\vec{\varphi}} (z, z, 3)\, d\vec{S}$, kde φ je část sféry $x^2+y^2+z^2=9$ omezená podmínkami $x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. Normála míří ven.



Plochu φ je možné vyjádřit explicitně ve tvaru $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, což by mohlo u integrace způsobit problémy, proto se sféra obvykle parametrizuje. Ale zkusme se odvážně držet toho explicitního vyjádření! :)

Nachystáme si normálu:

$$\vec{n} = (-g'_x, -g'_y, 1) = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\cdot(-2x), -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}(-2y); 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right)$$

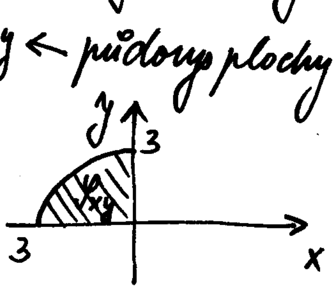
Rozhodneme o orientaci vypočtené normály:

Zřejmě platí
$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_{zadaná} &= (\dots, \dots, +\dots) \\ \vec{n}_{vypočtená} &= (\dots, \dots, 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \oplus$$

$$\iint\limits_{\vec{\varphi}} (z,z,3)\, d\vec{S} \overset{\text{DEFINICE}}{=} \oplus \iint\limits_{\varphi_{xy}} \left(\sqrt{9-x^2-y^2}, \sqrt{9-x^2-y^2}, 3\right) \underset{\text{skalární součin}}{\cdot} \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\varphi_{xy}} x + y + 3\; dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + 3)\cdot \underbrace{\rho}_{\text{jakobián}}\, d\varphi \right) d\rho =$$

φ_{xy} ← půdorys plochy φ:



polární souřadnice

$x = \rho\cos\varphi$ $\quad 0 \le \rho \le 3$

$y = \rho\sin\varphi$ $\quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$

jakobián $= \rho$

$$= \int_0^3 \rho \left[\rho \cdot \sin\varphi + \rho \cdot (-\cos\varphi) + 3\varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\rho =$$

$$= \int_0^3 \rho \left(0 + \rho(-(-1)) + 3\pi - \left(\rho \cdot 1 + 0 + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) d\rho =$$

$$= \int_0^3 \rho \left(3\pi - \frac{3}{2}\pi \right) d\rho = \frac{3}{2}\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^3 = \frac{3}{2}\pi \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{4}\pi$$