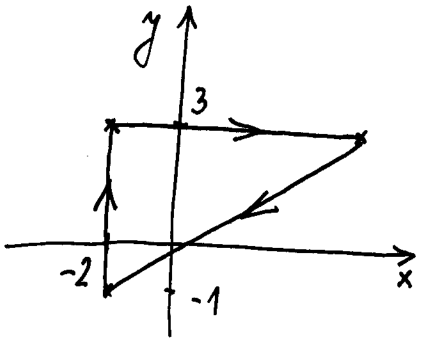
KŘIVKOVÝ INT. 2. DRUHU (PRÁCE SÍLY PO UZAVŘENÉ KŘIVCE)

15.5.2017 ÚM FSI VUT

Spočtěte práci vektorové funkce $\vec{F} = (2xy - x^2, y^2 - x + 1)$ podél křivky Γ, která je dána jako trojúhelník s vrcholy $[-2,3]$, $[4,3]$, $[-2,-1]$ a orientace je dána po směru oběhu hodinových ručiček.



Je vidět, že křivka Γ je uzavřená, je tedy možné uvažovat následovně:

1) Kdyby bylo vektorové pole $\vec{F}$ potenciální, potom by práce po uzavřené křivce byla rovna 0 a nemuseli bychom nic počítat.

Zkusme zjistit, zda je $\vec{F} = (\overset{P}{2xy - x^2}, \overset{Q}{y^2 - x + 1})$ potenciální:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= -1 \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 2x \end{aligned}\right\} \text{ ne, bohužel není potenciální}$$

2) Máme k dispozici Greenovu větu, která křivkový integrál po uzavřené křivce převede na dvojný integrál, což může být velmi výhodné využít v případech, kdy je Γ sjednocením několika křivek a výpočet pomocí definice přes jednotlivé křivky je pracný.

Greenova věta:
$$\oint_{\vec{\Gamma}} (P,Q)\, d\vec{s} = \iint_M \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy,$$

kde Γ je orientována kladně vzhledem k M, tj. Γ je orientována proti oběhu hodinových ručiček.

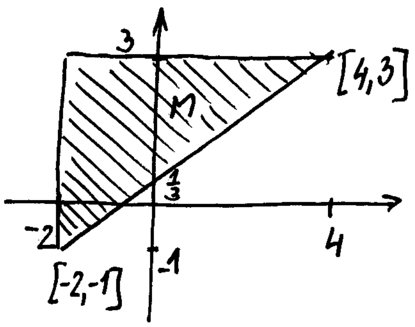
KŘIVKOVÝ INT. 2. DRUHU (PRÁCE SÍLY PO UZAVŘENÉ KŘIVCE)

15.5.2017 UM FSI VUT

2/2

$$\text{Tedy} \int_{\vec{\Gamma}} (\underbrace{2xy - x^2}_{P}, \underbrace{y^2 - x + 1}_{Q})\, d\vec{s} = \ominus \iint_M \underbrace{-1 - 2x}_{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}\, dx\,dy =$$

orientace naší křivky Γ je záporná vzhledem k M



$M: \; -2 \le x \le 4$

$\underbrace{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}_{} \le y \le 3$

$y = kx + q$

$-1 = k\cdot(-2) + q$

$3 = k \cdot 4 + q$

$-4 = k\cdot(-6)$

$k = \frac{2}{3}$

$-1 = -2\cdot\frac{2}{3} + q$

$-\frac{3}{3} + \frac{4}{3} = q$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$$= -\int_{-2}^{4}\left(\int_{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}^{3} -1 - 2x \, dy\right) dx = -\int_{-2}^{4}\Big[-y - 2xy\Big]_{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}^{3} dx = -\int_{-2}^{4} -3 - 6x - \left(-\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) - 2x\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)\right) dx =$$

$$= -\int_{-2}^{4} -3 - 6x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{4x^2}{3} + \frac{2x}{3}\, dx = -\int_{-2}^{4} \frac{4}{3}x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{8}{3}\, dx =$$

$$= -\left[\frac{4}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{14}^{\,7}}{3}\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{8}{3}x\right]_{-2}^{4} = -\left(\frac{256}{9} - \frac{112}{3} - \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{9} - \frac{28}{3} + \frac{16}{3}\right)\right) =$$

$$= -(32 - 44) = 12$$