Verze 6. března 2017

6. Derivace

Po limitě a spojitosti je derivace dalším základním pojmem diferenciálního počtu. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je číslo označované $f'(x_0)$, které vypovídá o chování funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0. Vezmeme-li derivaci $f'(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b), je derivace funkce opět funkcí. Derivace, pokud existuje, je tedy zobrazení, které funkci $f(x)$ a bodu x_0 přiřadí číslo $f'(x_0)$, případně funkci $f(x)$ na intervalu (a, b) přiřadí funkci na stejném intervalu.

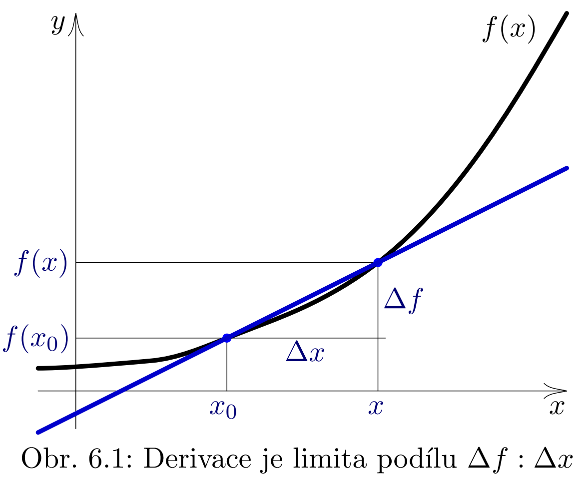
6A. Pojem derivace funkce

Geometricky lze říci, derivace funkce v bodě je směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě. Pokud je kladná, funkce v okolí je rostoucí, pokud je záporná, funkce v okolí klesá.

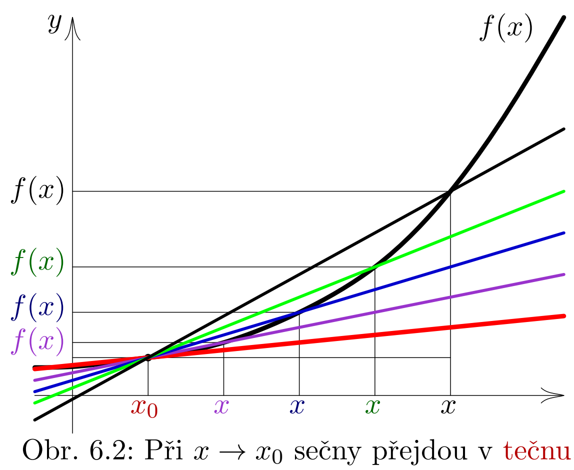
Směrnice přímky je poměr přírůstku Δy hodnot závislé proměnné ke přírůstku hodnot Δx nezávislé proměnné, tedy tangens orientovaného úhlu, který svírá tečna ke grafu funkce s „vodorovnou“ osou x. Protože tečnu v bodě neumíme vyjádřit přímo, uvažujeme sečny grafu funkce v bodě a blízkém bodě. Když se tyto body blíží k sobě, sečny přecházejí v tečnu. Konkrétně: v případě derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 vezmeme sečnu grafu funkce v bodě x_0 a v „blízkém“ bodě $x = x_0 + h$. Body grafu $[x_0, f(x_0)]$ a bod $[x, f(x)]$ vlevo či vpravo od x_0 určují sečnu grafu funkce f. Její směrnice je podíl

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

kde $h = \Delta x$. „Blíží-li“ se $x \to x_0$, tj. $\Delta x = h \to 0$, sečna přechází v tečnu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0. Existuje-li limita pro $h \to 0$, dostáváme směrnici tečny, tj. derivaci funkce v x_0:



Obr. 6.1: Derivace je limita podílu $\Delta f : \Delta x$.



Obr. 6.2: Při $x \to x_0$ sečny přejdou v tečnu.

Definice 6.1. (Derivace funkce) Nechť $f(x)$ je funkce a x_0 vnitřní bod definičního oboru funkce f. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je číslo označované $f'(x_0)$ rovné limitě

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pokud tato limita (konečná) existuje, řekneme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci.

Derivaci označujeme „jménem“ funkce s apostrofem, například f', nebo ve tvaru zlomku se symboly d a „jmény“ funkce a proměnné, podle které se derivuje. Podobně jako u funkce připojujeme bod, ve kterém derivaci uvažujeme:

$$f' \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad f'(x_0) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\,.$$

Poznámky 6.2.

(a) V obrázcích se kreslí obvykle $h > 0$, tj. $x > x_0$. V definici však vyžadujeme existenci limity oboustranné, proto stejnou limitu vyžadujeme i pro h záporné jdoucí k nule zleva.

(b) Derivaci funkcí po řadě $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$, $\Phi(x)$ v bodech $x, a, 3, \pi$ značíme

$$g'(x)\,,\ h'(a)\,,\ F'(3)\,,\ \Phi'(\pi) \ \text{ nebo } \ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,,\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(a)\,,\ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(3)\,,\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}(\pi)\,.$$

(c) Pokud $p(s)$ je funkce proměnné s potom v bodě $s = c$ derivaci zapíšeme $p'(c) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}(c)$. Ve fyzice proměnná t má obvykle význam času. Derivace podle času t se pak místo apostrofu často označuje tečkou: $\dot{p}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t)$.

(d) V definici výraz $x \to x_0$ ve jmenovateli můžeme přepsat pomocí proměnné $h = x - x_0 \to 0$:

$$f'(x_0) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 nebo x lze ekvivalentně definovat limitami

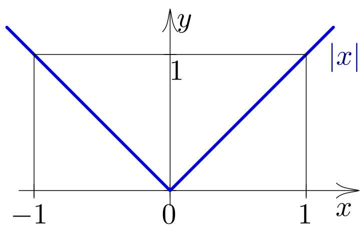
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,, \qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

a derivace například funkce $h(x)$ v bodě 2 je $h'(2) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{h(2+t) - h(2)}{t}$.

(e) Pokud limita neexistuje nebo není konečná, říkáme, že derivace neexistuje.
V případě funkce absolutní hodnoty, viz Obr. 6.3,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

oboustranná limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ neexistuje, protože jednostranné limity existují, ale jsou různé: limita zleva je -1 a limita zprava 1. Funkce proto nemá derivaci v bodě $x = 0$.



Obr. 6.3: Funkce $f(x) = |x|$.

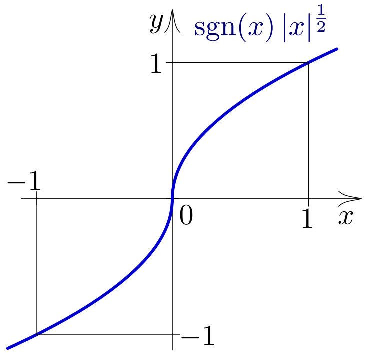
(f) Také funkce odmocniny prodloužená na lichou funkci, viz Obr. 6.4,

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & \text{pro } x \geq 0, \\ -|x|^{\frac{1}{2}} & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

v nule nemá derivaci, protože limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\frac{1}{2}}}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|^{\frac{1}{2}}} = \infty$$

sice existuje, ale není konečná.

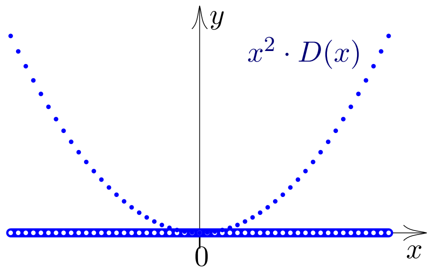


Obr. 6.4: Odmocnina prodloužená na lichou funkci.

(g) Zajímavá je funkce $f(x) = x^2 \cdot D(x)$, viz Obr. 6.5, s Dirichletovou funkci $D(x)$

$$f(x) = x^2 \cdot D(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \text{ racionální} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá v $x_0 = 0$ a podle definice má v nule i derivaci rovnou nule. V ostatních bodech spojitá není a nemá tam ani derivaci.

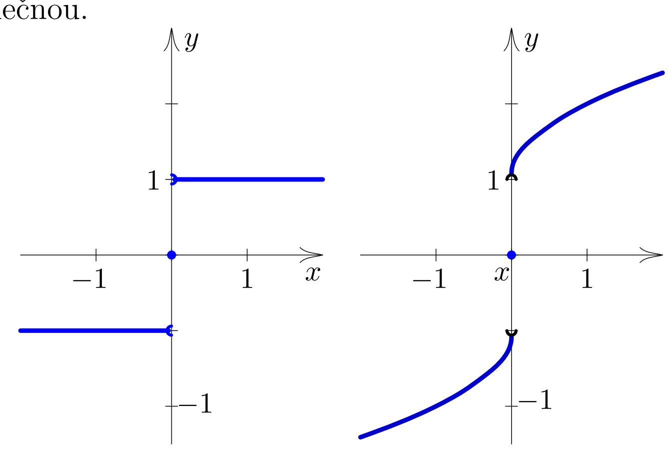


Obr. 6.5: Funkce, která má v bodě nula derivaci rovnou nule.

(h) Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě derivaci, je v tomto bodě spojitá. Tvrzení platí, protože v definici derivaci vyžadujeme limitu konečnou.

Pokud je limita v definice derivace nekonečná, funkce může být spojitá, jako v druhém příkladu Poznámky 6.2 (f). Může ale být i nespojitá, například funkce znaménka $\operatorname{sgn}(x)$ nebo funkce $\operatorname{sgn}(x)(1 + |x|^{1/2})$, viz Obr. 6.6, které jsou nespojité v bodě nula.

(i) Pokud bychom (jako někteří autoři) připustili nekonečnou limitu v definici derivace, potom by funkce mající (nekonečnou) derivaci v bodě by v tomto bodě nemusela být spojitá.



Obr. 6.6: Nespojité funkce s nekonečnou „derivací“

(j) Ještě typografická poznámka. Symbol d se tiskne v tzv. antikvě, tj. stojatým (románským) písmem podobně jako funkce např. $\sin, \cos$, aby se odlišila od proměnných, které se píší v tzv. matematické italice, tj. kurzívě. Např. tg je funkce tangens, ale tg je součin proměnných t a g. Vysázíme-li $\dfrac{d\,f}{d\,x}$, není to derivace, ale podíl, který je roven $\dfrac{f}{x}$.

Dosud jsme mluvili o derivaci v jednom bodě. Pojem derivace rozšíříme na pojem derivace na otevřeném intervalu. V případě uzavřeného intervalu $I = \langle a, b\rangle$ musím doplnit pojem jednostranné derivace zleva a zprava, kdy limita definující derivaci je pouze jednostranná:

Definice 6.3. (**Derivace funkce na intervalu**)
Řekneme, že funkce má derivaci na intervalu $I = (a, b)$, má-li derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Derivace funkce na intervalu je opět funkce s hodnotami derivace v každém bodě intervalu. O takové funkci říkáme také, že je **diferencovatelná**.

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci zprava, případně zleva, jestliže existují jednostranné limity

$$f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Řekneme, že funkce $f(x)$ má derivaci na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b \rangle$, pokud má jednostrannou derivaci zprava v bodě a, derivaci zleva v bodě b a (oboustrannou) derivaci v každém vnitřním bodě intervalu (a, b).

Příklady 6.4.

(a) Derivace konstantní funkce $f(x) = c$ je nulová funkce. Skutečně,

$$[f(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0\,.$$

(b) Spočítejme derivaci $f(x) = x^2$. Pomocí vzorce $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ dostáváme:

$$[f(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

(c) Spočítejme derivaci $f(x) = x^3$. Pomocí vzorce $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$ dostáváme:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h((x+h)^2 + (x+h)x + x^2)}{h} = \lim_{h \to 0} ((x+h)^2 + (x+h)x + x^2) = 3x^2.$$

(d) Definice derivace funkce $f(x) = 1/x$ dává

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h\,x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{x(x+h)} = -\lim_{h \to 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}.$$

(e) Pro derivaci odmocniny $f(x) = \sqrt{x}$ dostáváme podobný výsledek. Zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ a vzorec $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ dává

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Výsledek lze zapsat ve tvaru $[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$.

V příkladech jsme spočítali derivaci funkce $x^2, x^3, \frac{1}{x} = x^{-1}$ a $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Všechny tyto případy lze shrnout do jednoho vzorce:

Věta 6.5. Derivace mocniny x^p je $p \cdot x^{p-1}$ v bodech, kde je daná funkce definovaná, tj. obecně

$$[x^p]' = p \cdot x^{p-1} \qquad x \in (0, \infty) \text{ pro všechna } p \in \mathbb{R},$$

přičemž v případě $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ vzorec platí pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$,
v případě $p = -1, -2, -3, \dots$ vzorec platí pro všechna $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
v ostatních případech vzorec platí jenom na intervalu $(0, \infty)$.

Důkaz. Pro $p = 2, 3, -1$ jsme výpočty provedli v předchozích příkladech. Pro celá kladná $p = n$ je důkaz založen na vzorci $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})$, který dává

$$(x+h)^n - x^n = (x+h-x)\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right) .$$

Člen $x + h - x = h$ se zkrátí s h v jmenovateli a pro $h \to 0$ druhá závorka má za limitu $n \cdot x^{n-1}$.

Důkaz pro záporná celá p lze udělat podobnými triky. Pro racionální p se zlomek rozšíří jako v případě odmocniny. Případ iracionálních p lze odvodit pomocí spojitosti nebo pomocí derivace exponenciální a logaritmické funkce $x^p = \mathrm{e}^{\ln(x^p)} = \mathrm{e}^{p \ln x}$, které odvodíme později. □

Derivace druhého řádu a vyšších řádů

Pokud funkce má derivaci ve všech bodech intervalu, tato derivace tvoří funkci na intervalu a tuto derivaci lze opět znovu derivovat v bodě, případně na intervalu. Tímto způsobem zavádíme derivace vyšších řádů.

Definice 6.6. **(Derivace vyšších řádů)** Nechť funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x)$ v každém bodě nějakého okolí bodu x_0. Potom druhá derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je limita

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} .$$

Vedle označení $f''(x_0)$ se užívá i označení $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$.

Pokud druhá derivace $f''(x)$ existuje v každém bodě intervalu (a, b), tyto derivace tvoří novou funkci zvanou druhá derivace funkce $f(x)$ na intervalu (a, b).

Nechť funkce $f(x)$ má druhou derivaci $f''(x)$ v každém bodě x nějakého okolí bodu x_0. Potom třetí derivace $f'''(x)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je limita

$$f'''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x_0 + h) - f''(x_0)}{h} .$$

Vedle označení $f'''(x_0)$ a $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(x_0)$ se užívá i označení $f^{(3)}(x_0)$, kde řád derivace se označuje číslem v závorce, aby se derivace odlišila od mocniny funkce.

Pokud třetí derivace existuje v každém bodě intervalu (a, b), tyto derivace tvoří novou funkci zvanou třetí derivace funkce na intervalu (a, b).

Takto lze definovat dále derivaci čtvrtou, pátou, atd.:

Nechť funkce $f(x)$ má k-tou derivaci $f^{(k)}(x)$ v každém bodě x nějakého okolí bodu x_0, potom $(k+1)$-derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je limita

$$f^{(k+1)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k)}(x_0+h) - f^{(k)}(x_0)}{h} .$$

Množinu funkcí s derivacemi do řádu k (včetně) na intervalu I se označuje $C^k(I)$.

Poznámky:

(a) Zdůrazněme, že nutnou podmínkou druhé derivace v bodě x je existence první derivace v nějakém okolí bodu x. Podobně pro existenci derivace řádu $k+1$ v bodě x je nutné, aby existovala derivace k-tého řádu (a všech řádů nižších) v okolí tohoto bodu.

(b) Pokud funkce má první derivaci jenom v jednom bodě, druhá derivace v tomto bodě už není definovaná. Například funkce $x^2 \cdot D(x)$ má první derivaci (rovnou nule) jenom v bodě 0, druhou derivaci už nemá v žádném bodě.

(c) Funkce mocniny x^p mají derivace všech řádů, například pro $p = 3$ je

$$[x^3]' = 3\,x^2\,, \quad [x^3]'' = [3\,x^2]' = 6\,x\,, \quad [x^3]''' \equiv [x^3]^{(3)} = 6\,, \quad [x^3]^{(4)} = 0, \quad \ldots$$

(d) Funkce může mít derivaci k-tého řádu a derivace řádu $k+1$ už nemusí existovat. Například funkce $f(x) = |x^3| \equiv \operatorname{sgn}(x)\,x^3$ má derivaci prvního řádu $f'(x) = 3\,x^2\operatorname{sgn}(x)$, druhého řádu $f''(x) = 6\,|x| \equiv 6\,x\cdot\operatorname{sgn}(x)$ ale v nule už nemá derivaci třetího řádu, protože v bodě nula sice existují jednostranné limity, jsou však různé.

(e) Funkce x^p pro $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ mají derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$, od řádu $p+1$ jsou už všechny další derivace nulové. Naproti tomu pro ostatní p funkce x^p má na $(0, \infty)$ derivace všech řádů, které jsou však všechny navzájem různé.

(f) Existuje jenom jedna skupina funkcí, které mají derivace všech řádů, a které se při derivování nemění. Jsou to násobky funkce exponenciální $f(x) = c\,\mathrm{e}^x$, kde c je libovolná konstanta. Tyto funkce (jak dokážeme v příštím odstavci) mají všechny derivace stejné $[c\,\mathrm{e}^x]^{(k)} = \mathrm{e}^x$. Mezi nimi je i funkce nulová, jejíž všechny derivace jsou také funkce nulové.

6B. Výpočet derivace

V předchozích příkladech jsme počítali derivaci funkcí přímo podle definice tím, že jsme počítali limitu z definice derivace. Protože tento přístup je náročný, použijeme obvyklý matematický přístup, který spočívá v tom, že určíme derivace elementárních funkcí a pomocí určitých pravidel derivaci dané funkce převedeme na derivace elementárních funkcí, které už derivovat umíme.

Základní pravidla derivování

Mezi základní pravidla patří derivace skalárního násobku, součtu a rozdílu funkcí, součinu a podílu funkcí. Derivování je operace lineární ve smyslu, že derivace násobku, součtu i rozdílu funkcí je násobek, součet a rozdíl derivací. Skutečně, s využitím definice derivace a pravidel pro počítání limit můžeme odvodit pravidlo o derivování násobku funkce:

$$[c \cdot f(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)\,.$$

Podobně odvodíme pravidlo o derivaci součtu funkcí. Přeskupením členů a rozdělením limity na součet dvou limit dostáváme tvrzení:

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+(g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)\,.$$

Pravidlo o derivování rozdílu funkcí lze odvodit analogicky, plyne však z předchozích tvrzení zapíšeme-li rozdíl $f(x) - g(x)$ jako $f(x) + (-1) \cdot g(x)$. Odvodili jsme následující tvrzení:

Věta 6.7. (Derivace násobku, součtu a rozdílu funkcí)
Buď $c \in \mathbb{R}$ a $f(x), g(x)$ reálné funkce, které mají v bodě x derivace $f'(x)$ a $g'(x)$. Potom platí:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)\,,$$

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)\,,$$

$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)\,.$$

Pokud funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace ve všech bodech nějakého intervalu, potom uvedené rovnosti platí na celém intervalu.

Pravidlo, že limita součinu funkcí je součin limit funkcí však pro derivace neplatí, **derivace součinu funkcí není součin derivací**. Pravidlo pro derivaci součinu dvou funkcí je složitější. Definice derivace dává:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}\,,$$

v čitateli zlomku ubereme a přidáme výraz $f(x)\cdot g(x+h)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h},$$

vytkneme společné členy

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x+h) + f(x)\cdot [g(x+h)-g(x)]}{h},$$

využijeme pravidla o limitě součtu a součinu dvou funkcí a přejdeme k limitám:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Odvodili jsme pravidlo: Derivace součinu dvou funkcí je derivace první funkce násobená druhou (nederivovanou) funkcí plus první funkce (nederivovaná) násobená derivací druhé funkce:

Věta 6.8. (Derivace součinu funkcí)
Buď $f(x)$ a $g(x)$ reálné funkce, které mají v bodě x derivace $f'(x)$ a $g'(x)$. Potom platí:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Pokud funkce mají derivace na intervalu $I=(a,b)$, potom rovnost platí na celém intervalu.

Poznámky:

(a) Jako cvičení opakovaným použitím pravidla odvoďte derivaci součinu tří funkcí:

$$[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x).$$

(b) Konstanta je také funkce, takže derivace součinu konstanty a funkce lze provést také jako derivace součinu funkcí. Protože derivace konstanty je nulová, výsledek vyjde stejně, jen výpočet je zbytečně složitější. Proto $f(x)\cdot c$ i $f(x)/c$ derivujte jako násobek funkce.

Zbývá odvodit derivaci podílu dvou funkcí. Zde musíme předpokládat, že limita funkce $g(x)$ je v bodě x různá od nuly. Potom funkce $g(x)$ je různá od nuly i v nějakém okolí bodu x. Opět podle definice derivace a rozdílu zlomků platí:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

v čitateli zlomku ubereme a přidáme výraz $f(x)\cdot g(x)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

vytkneme společné členy a využijeme vlastností limit a přejdeme k limitám

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot [g(x)-g(x+h)]}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)}\cdot \frac{1}{g(x)}\cdot \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) - f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Odvodili jsme pravidlo, že (pro nenulový jmenovatel) derivace podílu dvou funkcí je rovna derivaci čitatele násobené (nederivovaným) jmenovatelem minus (nederivovaný) čitatel násobený derivací jmenovatele, vše dělené druhou mocninou (nederivovaného) jmenovatele.

Věta 6.9. (Derivace podílu funkcí)
Buď $f(x), g(x)$ reálné funkce, které mají v bodě x derivace $f'(x), g'(x)$ a jmenovatel $g(x)$ je různý od nuly. Potom platí:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$$

Pokud obě funkce mají derivace v nějakém intervalu, přičemž v celém intervalu platí $g(x) \neq 0$, potom rovnost platí v celém intervalu.

Derivace goniometrických funkcí

Derivace funkce sinus Využitím vzorce pro rozdíl $\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2} \cdot \sin\frac{u-v}{2}$ a z definice derivace plyne

$$[\sin x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,.$$

První limita je rovna $\cos x$. Druhá, díky limitě $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, kterou jsme dokázali na konci předchozí kapitoly, je rovna jedné. Ukázali jsme, že $[\sin x]' = \cos x$.

Derivace funkce kosinus Pomocí vzorce $\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2} \cdot \sin\frac{u-v}{2}$, z definice derivace a přeskupením členů dostáváme

$$[\cos x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,.$$

První limita je rovna $-\sin x$, druhá je rovna jedné, odkud plyne $[\cos x]' = -\sin x$.

Poznamenejme, že derivace funkcí $\sin x$ a $\cos x$ lze odvodit také pomocí známějších vzorců

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \quad \text{a} \quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y\,,$$

dá to však „více práce“.

Derivaci funkce tangens dostaneme pomocí pravidla pro derivaci podílu funkcí:

$$[\operatorname{tg} x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]' \cdot \cos x - \sin x \cdot [\cos x]'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Derivaci funkce kotangens dostaneme podobně

$$[\operatorname{cotg} x]' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{[\cos x]' \cdot \sin x - \cos x \cdot [\sin x]'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Odvodili jsme následující vzorce pro derivace goniometrických funkcí:

Věta 6.10. (Derivace goniometrických funkcí) Platí

$$[\sin x]' = \cos x \quad \text{a} \quad [\cos x]' = -\sin x \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}\,,$$

$$[\mathrm{tg}\, x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{pro každé } \; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \equiv (k+\tfrac{1}{2})\,\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

$$[\mathrm{cotg}\, x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{pro každé } \; x \neq k\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Pravidlo pro derivaci složené funkce

Mějme funkci $g(x)$ na intervalu (a, b) s hodnotami na intervalu (A, B) a funkci $F(\xi)$ na intervalu (α, β). Pokud obor hodnot $\mathcal{H}(g) = (A, B)$ je částí definičního oboru (α, β) funkce F, lze tyto funkce složit. Dostáváme funkci složenou $\Phi = F \circ g : (a, b) \to \mathbb{R}$ definovanou

$$\Phi : x \in (a, b) \mapsto (F \circ g)(x) \equiv F(g(x)) \in \mathbb{R}\,.$$

Předpokládejme, že funkce $g(x)$ není konstantní v okolí bodu x, tj. $g(x+h) \neq g(x)$ pro všechna $h \neq 0$. Potom zlomek v definici derivace složené funkce rozšíříme výrazem $g(x+h) - g(x)$

$$[(F \circ g)(x)]' \equiv [F(g(x))]' = \lim_{h\to 0} \frac{F(g(x+h)) - F(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(g(x+h)) - F(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

a rozdělíme na součin dvou limit. Druhá limita $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ je definice derivace $g'(x)$. Díky spojitosti funkce $g(x)$ pro $h \to 0$ platí také $g(x+h) \to g(x)$. Označíme-li $g(x+h) = \xi$ a $g(x) = \xi_0$, první limitu lze přepsat

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(g(x+h)) - F(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{\xi\to\xi_0} \frac{F(\xi) - F(\xi_0)}{\xi - \xi_0} = F'(\xi_0) = F'(g(x))\,.$$

V případě, že funkce $g(x)$ je konstantní, platí $g'(x) = 0$ a odvozený vzorec platí také. Odvodili jsme, že derivace složené funkce je derivace vnější funkce v hodnotě vnitřní funkce násobená derivací vnitřní funkce:

Věta 6.11. (Derivace složené funkce) Nechť funkce $g(x)$ má derivaci v bodě x a funkce $F(\xi)$ derivaci v bodě $\xi_0 = g(x)$. Potom složená funkce $(F \circ g)(x) \equiv F(g(x))$ má derivaci v bodě x a platí

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}(F \circ g)}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,.$$

Nechť $g(x)$ je funkce definovaná na intervalu (a, b). Je-li obor hodnot funkce $g(x)$ podmnožinou definičního oboru funkce $F(\xi)$ a obě funkce jsou diferencovatelné, uvedená rovnost platí na celém intervalu (a, b).

Opakovaným užitím pravidla o derivaci složené funkce dostaneme pro derivaci funkce složené ze tří nebo čtyř funkcí (které lze složit a každou lze derivovat):

$$[h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)\,,$$

$$[f_4(f_3(f_2(f_1(x))))]' = f_4'(f_3(f_2(f_1(x))) \cdot f_3'(f_2(f_1(x)) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)\,.$$

Využití pravidla. V každém z příkladů si uvědomte, která funkce je vnitřní a která vnější:

(a) $[\sin(x^2)]' = \cos(x^2) \cdot (2x)$

(b) $[\cos^2 x]' \equiv [(\cos x)^2]' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$

(c) $(2x+1)^{100} = 100(2x+1)^{99} \cdot [2x+1]' = 100(2x+1)^{99} \cdot 2$

(d) Derivace funkce složené ze tří (vnitřní $x \mapsto \frac{1}{x}$, prostřední $z \mapsto \sin z$ a vnější $\xi \mapsto \xi^3$):

$$\left[\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)\right]' \equiv \left[\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^3\right]' = 3\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right).$$

Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí

Derivace exponenciální funkce se základem e plyne přímo z limity $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, kterou jsme dokázali na konci předchozí kapitoly:

$$[\mathrm{e}^x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x.$$

V případě obecné exponenciální funkce se základem $a > 0$ položíme $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ a použijeme pravidlo pro derivaci složené funkce

$$[a^x]' = \left[\left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x\right]' = \left[\mathrm{e}^{\ln a \cdot x}\right]' = \mathrm{e}^{\ln a \cdot x} \cdot [\ln a \cdot x]' = \mathrm{e}^{\ln a \cdot x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Věta 6.12. (Derivace exponenciálních funkcí) Pro $a > 0$ a všechna reálná x platí:

$$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x, \qquad [a^x]' = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a \equiv a^x \cdot \ln a.$$

Derivace přirozeného logaritmu $\ln x \equiv \log_{\mathrm{e}} x$ se obvykle odvozuje jako derivace funkce inverzní k funkci e^x, lze ji však odvodit i přímo pomocí limity $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, kterou jsme dokázali na konci předchozí kapitoly. Pomocí rovnosti

$$\ln(x+h) = \ln(x \cdot (1 + \tfrac{h}{x})) = \ln x + \ln(1 + \tfrac{h}{x})$$

můžeme výraz v definici derivace upravit na tvar

$$[\ln x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln x + \ln(1+\frac{h}{x}) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

využili jsme přitom výše uvedenou limitu s proměnnou $\frac{h}{x}$.

Derivace logaritmické funkce se základem a plyne ze vztahu $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$. Protože $\ln a$ je konstanta, platí $[\log_a x]' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$. Odvodili jsme tvrzení:

Věta 6.13. (Derivace logaritmických funkcí) Pro $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ a $x \in (0,\infty)$ platí:

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}, \qquad [\log_a x]' = \frac{1}{\ln a \cdot x}.$$

Poznámky:

(a) Za základ přirozených logaritmů byla zvolena konstanta e právě proto, aby při derivování platilo $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x$.

(b) Podívejme se na derivování funkcí typu $[f(x)]^{g(x)}$. Použitím pravidel pro derivace složených funkcí dostáváme:

(i) pokud je exponent $g(x)$ konstantní, výraz derivujeme jako obecnou mocninu: ($f(x) > 0$ a $g(x) = p$ libovolné)

$$[(f(x))^p]' = p \cdot (f(x))^{p-1} \cdot f'(x)\,,$$

(ii) pokud je exponent závislý na x, funkci vždy převedeme na tvar s exponenciální funkcí. V případě $a^{g(x)}$ ($a > 0$, $g(x)$ libovolné)

$$\left[a^{g(x)}\right]' = \left[\mathrm{e}^{\ln a \cdot g(x)}\right]' = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x)\,,$$

(iii) v obecném případě ($f(x) > 0$ a $g(x)$ libovolné)

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \left[\mathrm{e}^{\ln(f(x))\cdot g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + \ln(f(x)) \cdot g'(x)\right).$$

(c) Například $[x^x]' = [\mathrm{e}^{x\cdot\ln x}]' = \mathrm{e}^{x\cdot\ln x}(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}) = x^x \cdot (\ln x + 1)\,.$

(d) Nyní můžeme odvodit derivaci obecné mocniny x^p pro iracionální p. Buď $x > 0$. Potom

$$[x^p]' = \left[\mathrm{e}^{\ln x^p}\right]' = \left[\mathrm{e}^{p\ln x}\right]' = \mathrm{e}^{p\ln x}\cdot[p\,\ln x]' = x^p\,p\,\frac{1}{x} = p\,x^{p-1}\,.$$

Derivace inverzní funkce

Buď $y = f^{-1}(x)$ funkce inverzní k funkci $x = f(y)$. Derivováním složené funkce $f \circ f^{-1}$ dávající identitu $f(f^{-1}(x)) = x$ dostáváme výraz

$$\left[f(f^{-1}(x))\right]' = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)\,,$$

který se rovná jedné, protože $x' = 1$. Pokud derivace $(f'(f^{-1}(x))$ je nenulová, můžeme vyjádřit derivaci inverzní funkce $f^{-1}(x)$ pomocí derivace původní funkce $f(y)$, ale v bodě $y = f^{-1}(x)$. Odvodili jsme tak tvrzení:

Věta 6.14. (Derivace inverzní funkce) Buď $y = f^{-1}(x)$ funkce inverzní k prosté funkci $x = f(y)$. Potom platí

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$

Aplikujme větu na funkci $y = f^{-1}(x) \equiv \ln x$ inverzní k funkci $x = f(y) \equiv \mathrm{e}^y$ s derivací $f'(y) = \mathrm{e}^y$. Derivováním rovnosti $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ dostáváme $\mathrm{e}^{\ln x}\cdot[\ln x]' = 1$, odkud plyne

$$[\ln x]' = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}\,,$$

což je v souladu s Větou 6.13.

Derivace cyklometrických funkcí

Cyklometrické funkce $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$ jsou funkce inverzní ke goniometrickým funkcí $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$. Jejich derivaci určíme pomocí předchozí věty.

Funkce arkus sinus $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$ definovaná na $\langle -1, 1\rangle$ je inverzní k funkci $x = f(y) = \sin y$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Její derivace je

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\,.$$

Abychom mohli vyčíslit $\cos(\arcsin x)$, musíme vyjádřit funkci $\cos x$ pomocí $\sin x$. Z rovnosti $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ plyne $|\cos y| = \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos y$ kladný, proto $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ a díky rovnosti $\sin(\arcsin x) = x$ pro $x \in (-1, 1)$ platí

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \qquad x \in (-1, 1)\,.$$

Funkce arkus kosinus $y = f^{-1}(x) = \arccos x$ definovaná na $\langle -1, 1\rangle$ je inverzní k funkci $x = f(y) = \cos y$ na intervalu $y \in \langle 0, \pi\rangle$. Její derivaci lze spočítat podobně jako derivaci funkce $\arcsin x$. Rychlejší je však využít vztahu $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, odkud ihned plyne $[\arccos x]' = -\,[\arcsin x]'$, tedy

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \qquad x \in (-1, 1)\,.$$

Funkce arkus tangens $y = f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x$ definovaná na $(-\infty, \infty)$ je inverzní k funkci $x = f(y) = \operatorname{tg} y$ na intervalu $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Její derivace je

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x)\,.$$

Abychom mohli vyčíslit $\cos(\operatorname{arctg} x)$, musíme vyjádřit funkci $\cos y$ pomocí $\operatorname{tg} y$. Pomůžeme si geometrií pravoúhlého trojúhelníka ΔABC. Ve standardním označení je $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Zvolíme-li $b = 1$, platí $a = \operatorname{tg}\alpha$ a $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$. Proto $\cos^2\alpha = (\frac{b}{c})^2 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$. Vzorec však platí pro libovolné y, jak ověříme výpočtem:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \cos^2 y\,.$$

Díky rovnosti $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ dostáváme derivaci funkce $\operatorname{arctg} x$:

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{x^2 + 1}\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,.$$

Derivaci **funkce arkus kotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$ lze spočítat podobně, ale jednodušší je využít vztahu $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, odkud plyne $[\operatorname{arccotg} x]' = -\,[\operatorname{arctg} x]'$, tedy

$$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{x^2 + 1}\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,.$$

Odvodili jsme vzorce pro derivaci cyklometrických funkcí:

Věta 6.15. (Derivace cyklometrických funkci)

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad x \in (-1,1)\,, \qquad [\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad x \in (-1,1)\,,$$

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{x^2+1}\,, \qquad x \in (-\infty,\infty)\,, \qquad [\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{x^2+1}\,, \qquad x \in (-\infty,\infty)\,.$$

Poznámka: Funkce $\arcsin x$ a $\arccos x$ jsou definovány na uzavřeném intervalu $\langle -1,1\rangle$, derivaci však mají jen v otevřeném intervalu $(-1,1)$. Tato derivace má v krajních bodech intervalu nekonečné jednostranné limity

$$\lim_{x\to -1+} [\arcsin x]' = \infty\,, \qquad \lim_{x\to 1-} [\arcsin x]' = \infty\,,$$

$$\lim_{x\to -1+} [\arccos x]' = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 1-} [\arccos x]' = -\infty\,.$$

Derivace hyperbolických funkcí

Pro úplnost doplňme ještě derivace hyperbolických funkcí. Snadno lze spočítat derivace hyperbolického sinu i kosinu. Funkce jsou definované na celém $\mathbb{R}$ vztahy

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

Pomocí vzorečků $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x$ a $[\mathrm{e}^{-x}]' = -\mathrm{e}^{-x}$ dostáváme

$$[\sinh x]' = \left[\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right]' = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x\,, \quad [\cosh x]' = \left[\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right]' = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x\,.$$

Hyperbolické funkce $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$ jsou definovány podobně jako goniometrické $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 0\,.$$

Derivace funkce $\operatorname{tgh} x$ lze spočítat přímo derivováním exponenciální funkce

$$[\operatorname{tgh} x]' = \left[\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right]' = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}\,,$$

nebo pomocí odvozené derivace $\sinh x$ a $\cosh x$ a vztahu $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$[\operatorname{tgh} x]' = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}\,.$$

Derivaci $\operatorname{cotgh} x$ spočítejte jako cvičení sami. Odvodili jsme vzorečky, které jsou velmi podobné vzorcům pro derivace goniometrických funkcí

Věta 6.16. (Derivace hyperbolických funkcí)

$$[\sinh x]' = \cosh x\,, \quad x \in (-\infty,\infty)\,, \qquad [\cosh x]' = \sinh x\,, \quad x \in (-\infty,\infty)$$

$$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}\,, \quad x \in (-\infty,\infty)\,, \qquad [\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}\,, \quad x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)\,.$$

Souhrn pravidel derivování funkcí

Jednotlivé „základní“ funkce lze spojovat pomocí několika operací: skalární násobek, součet, rozdíl, součin a podíl funkcí, navíc funkce lze skládat. Přitom je třeba si uvědomit, jak jsou jednotlivé funkce a operace do sebe vloženy, která je vnitřní a která jsou vnější.

Věta 6.17. (Základní pravidla derivování kombinace funkcí)

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)\,,$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)\,,$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\,,$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}\,,$$

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}(F \circ g)}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,.$$

Derivace elementárních funkcí jsou v následující tabulce:

Věta 6.18. (Derivace elementárních funkcí)

(1) $[c]' = 0\,,$

(2) $[x^p]' = p \cdot x^{p-1}\,, \qquad x \in (0, \infty), \quad (p \in \mathbb{R})\,,$

(3) $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,,$

(4) $[a^x]' = \ln a \cdot a^x\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (a > 0\,, a \neq 1)\,,$

(5) $[\ln x]' = \frac{1}{x}\,, \quad x > 0\,,$

(6) $[\log_a x]' = \frac{1}{\ln a \cdot x}\,, \quad x > 0\,, \quad (a > 0, \,, a \neq 1)\,,$

(7) $[\sin x]' = \cos x\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,,$

(8) $[\cos x]' = -\sin x\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,,$

(9) $[\mathrm{tg}\, x]' = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad x \neq (k + \frac{1}{2})\pi\,, \; k \in \mathbb{Z}\,.$

(10) $[\mathrm{cotg}\, x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, \qquad x \neq k\pi\,, \; k \in \mathbb{Z}\,.$

(11) $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad x \in (-1, 1)\,,$

(12) $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad x \in (-1, 1)\,,$

(13) $[\mathrm{arctg}\, x]' = \frac{1}{x^2+1}\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,,$

(14) $[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\frac{1}{x^2+1}\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,.$

6C. Další pojmy

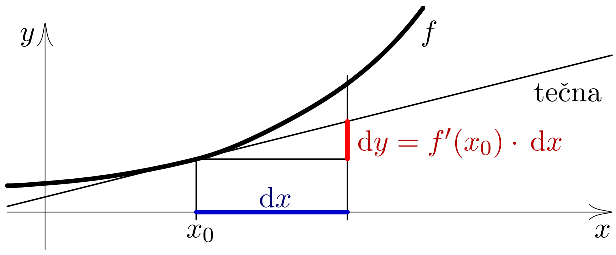
Diferenciály funkce

Podle definice je derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 směrnice tečny ke grafu funkce v bodě x_0. Toho lze využít pro napsání rovnice tečny:

Věta 6.19. **(Rovnice tečny)** Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Potom tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je číslo. Naproti tomu diferenciál d funkce $f(x)$ v bodě x_0 je **zobrazení**, které přírůstku $\mathrm{d}x$ přiřadí přírůstek $\mathrm{d}y$ na tečně ke grafu funkce v bodě x_0, tj. přírůstek $\mathrm{d}x$ násobený hodnotou derivace $f'(x_0)$, viz Obr. 6.7:



Obr. 6.7: Diferenciál je přírůstek funkce na tečně.

Definice 6.20. **(Diferenciál funkce)** Nechť funkce $y = f(x)$ má derivaci v bodě x_0. Potom diferenciál $\mathrm{d}f$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je zobrazení, které přírůstku $\mathrm{d}x$ proměnné x přiřadí přírůstek hodnoty $\mathrm{d}y$ na tečně:

$$\mathrm{d}f \;:\; \mathrm{d}x \longmapsto \mathrm{d}y = f'(x_0)\cdot \mathrm{d}x \qquad \text{přesněji} \qquad (\mathrm{d}f)(x_0)\,\mathrm{d}x = f'(x_0)\cdot \mathrm{d}x\,.$$

Poznámky:

(a) Diferenciál udává, o kolik se přibližně změní hodnota funkce $f(x)$, změníme-li proměnnou x o $\mathrm{d}x$. Například je-li $f(x) = \sin x$, potom $\mathrm{d}f(a) = \cos x_0 \cdot \mathrm{d}x$, konkrétně pro $x_0 = 0$ a $\mathrm{d}x = 0,1$ je $\mathrm{d}f(0) = \cos(0)\cdot 0,1 = 1\cdot 0,1 = 0,1\,.$

(b) Často se diferenciál píše ve tvaru $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\cdot \mathrm{d}x$, tj. bez proměnné $\mathrm{d}x$. V matematice se malý přírůstek místo $\mathrm{d}x$ obvykle označuje h:

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h\,.$$

(c) Spočítejme například diferenciál funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{6}$ obecně a pro $\mathrm{d}x = \frac{1}{10}$:

$$\mathrm{d}f\big(\tfrac{\pi}{6}\big) = \sin'\big(\tfrac{\pi}{6}\big)\mathrm{d}x = \cos\big(\tfrac{\pi}{6}\big)\cdot \mathrm{d}x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot \mathrm{d}x\,, \qquad \mathrm{d}f\big(\tfrac{\pi}{6}\big)\,\tfrac{1}{10} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{1}{10} = \tfrac{\sqrt{3}}{20}\,.$$

Druhý diferenciál a diferenciály vyšších řádů

Analogicky jako první diferenciál pomocí druhé derivace zavedeme diferenciál druhý. Druhá derivace funkce v bodě (pokud existuje) je číslo, zatímco druhý diferenciál je zobrazení, které $\mathrm{d}x \equiv h$ přiřadí druhou derivaci násobenou druhou mocninou přírůstku $\mathrm{d}x$:

Definice 6.21. (Druhý diferenciál funkce) Diferenciál $d^2 f$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je zobrazení, které přírůstku dx proměnné x přiřadí číslo:

$$d^2 f \; : \; dx \longmapsto dy = f''(x_0) \cdot (dx)^2 , \qquad \text{tj.} \qquad d^2 f(x_0)(dx) = f''(x_0) \cdot (dx)^2 .$$

Poznámky:

(a) Na rozdíl od prvního diferenciálu, druhý diferenciál nelze přímo geometrický popsat. Později pomocí prvního, druhého a dalších diferenciálů zkonstruujeme tzv. Taylorův polynom, který v okolí bodu x_0 bude aproximovat hodnoty funkce $f(x)$.

(b) Spočítejme druhý diferenciál funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $a = \frac{\pi}{6}$ obecně a pro $dx = 0.1$:

$$d^2 f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \equiv \sin''\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \cdot (dx)^2 = -\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \cdot (dx)^2 = -\tfrac{1}{2} \cdot (dx)^2 , \qquad d^2 f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \cdot 0{,}1^2 = -\tfrac{1}{200} .$$

Diferenciál k-tého řádu v bodě x_0 je součin k-té derivace v bodě x_0 a k-té mocniny dx:

Definice 6.22. (Diferenciál k-tého řádu) Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 k-tou derivaci. Diferenciál k-tého řádu $d^k f$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je zobrazení, které přírůstku dx přiřadí:

$$d^k f(x_0) \; : \; dx \longmapsto dy = f^{(k)}(x_0) \cdot (dx)^k , \quad \text{tj.} \quad d^k f(x_0)\, dx = f^{(k)}(x_0) \cdot (dx)^k .$$

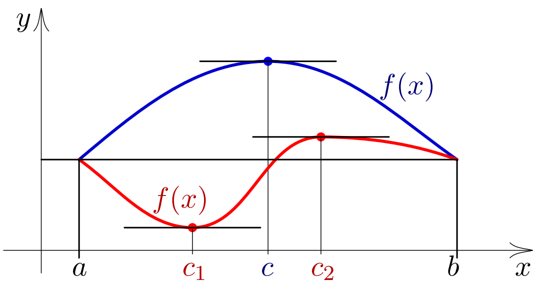
Diferenciály vyšších řádů využijeme při aproximaci funkce pomocí Taylorova polynomu.

Věty o střední hodnotě

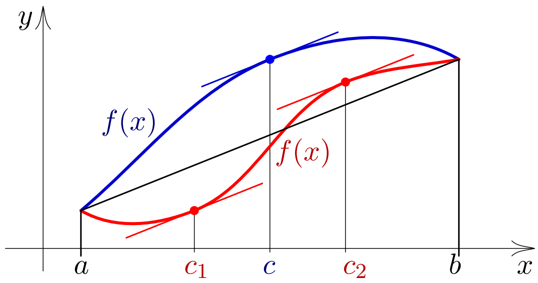
Víme, že funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $I = \langle a, b \rangle$ nabývá všech hodnot mezi hodnotami $f(a)$ a $f(b)$. Speciálně, pokud hodnoty $f(a)$, $f(b)$ mají opačná znaménka, potom existuje alespoň jedno $c \in (a, b)$, takové, že $f(c) = 0$.

Podobné tvrzení platí i pro derivaci funkce. Pokud funkce má derivaci na intervalu (a, b), která je na jednom konci intervalu kladná a na druhém konci záporná, potom existuje uvnitř intervalu alespoň jeden bod, ve kterém je derivace nulová:

Věta 6.23. (Rolleova věta) Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, která má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$, a navíc platí $f(a) = f(b)$.
Potom existuje alespoň jedno číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.



Obr. 6.8: Rolleova věta o nulové derivaci.



Obr. 6.9: Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Vypuštěním předpokladu $f(a) = f(b)$ dostáváme následující větu:

Věta 6.24. (Lagrangeova věta o střední hodnotě) Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, která má derivaci v každém bodě x intervalu (a, b).
Potom existuje alespoň jedno číslo $c \in (a, b)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)\,.$$

Poznámky:

(a) Tvrzení Rolleovy věty lze charakterizovat také slovy: V intervalu (a, b) existuje bod, ve kterém je tečna ke grafu funkce rovnoběžná s osou x. Langrangeova věta o střední hodnotě zase tvrdí, že v intervalu (a, b) existuje bod, ve kterém je tečna ke grafu funkce rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.

(b) Naznačme myšlenku důkazu Rolleovy věty. Pro konstantní funkci tvrzení splňuje každý bod intervalu. Pokud funkce $f(x)$ není konstantní na celém intervalu (a, b), alespoň v jednom vnitřním bodě nabývá své maximum nebo minimum. To je obecná vlastnost funkce, která je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu. Protože funkce má derivaci v každém bodě, v bodě maxima nebo minima tato derivace musí být nulová, jak ukážeme později. $\square$

(c) Nechť funkce $f(x)$ splňuje předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Položme

$$f^*(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Snadno lze ověřit, že platí $f^*(b) = f^*(a) = f(a)$. Z Rolleovy věty plyne existence $c \in (a, b)$ splňující

$$0 = (f^*)'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,,$$

odkud plyne tvrzení. $\square$

(d) Pozor, bez předpokladu, že funkce má derivaci v každém bodě intervalu (a, b), věta neplatí: například funkce $|x|$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ splňuje $f(-1) = f(1) = 1$, ale v žádném bodě $c \in (a, b)$ neplatí $f'(c) = 0$, derivace $f'(x)$, nabývá pouze hodnot 1 a -1, v bodě 0 derivace neexistuje.

(e) Věta o střední hodnotě je užitečná v řadě aplikací. Jejím důsledkem je tvrzení, že pokud $f'(x) > 0$ v intervalu (a, b), potom je v tomto intervalu rostoucí. Skutečně, podle předchozí věty o střední hodnotě pro každé $a \le x_1 < x_2 \le b$ existuje $\xi \in (x_1, x_2)$, že platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)\,.$$

Protože derivace $f'(x)$ je kladná ve všech bodech intervalu, je kladná i v bodě ξ. Díky $x_1 < x_2$ platí proto $f(x_1) < f(x_2)$. Body x_1, x_2 byly libovolné, funkce $f(x)$ je tedy v daném intervalu rostoucí.

Podobně lze dokázat, že je-li derivace na intervalu záporná, funkce je klesající. $\square$