7C. Průběh funkce

Využití prvních derivací

Znaménko derivace funkce v daném intervalu určuje, zda je funkce rostoucí nebo klesající, viz Definice 4.9. Uvažujme funkci $f(x)$ v intervalu I. Může to být interval otevřený $I = (a, b)$ nebo uzavřený $I = \langle a, b\rangle$, případně $I = (a, b\rangle$ nebo $I = \langle a, b)$. Může být omezený, jestliže $-\infty < a < b < \infty$, nebo neomezený, když $a = -\infty$ nebo $b = \infty$. Nechť $x_1, x_2 \in I$ jsou dva body splňující $x_1 < x_2$. Podle Věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)\,.$$

Jestliže derivace $f'(x)$ je kladná v intervalu I, potom také $f'(\xi) > 0$ a $f(x_1) < f(x_2)$, tj. funkce je rostoucí v intervalu I. Pokud je derivace záporná, funkce je klesající. Dostáváme tak tvrzení:

Věta 7.16. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I a má derivaci $f'(x)$ v (a, b). Platí:

(a) $f'(x) > 0$ v intervalu (a, b), pak funkce $f(x)$ je rostoucí na I,

(b) $f'(x) < 0$ v intervalu (a, b), pak funkce $f(x)$ je klesající na I,

(c) $f'(x) \geq 0$ v intervalu (a, b), právě když funkce $f(x)$ je neklesající na I,

(d) $f'(x) \leq 0$ v intervalu (a, b), právě když funkce $f(x)$ je nerostoucí na I.

Poznámky 7.17.

(a) Předpokládáme, že funkce je spojitá na celém intervalu, tj. včetně jednostranné spojitosti v případných koncových bodech. Derivaci vyžadujeme jenom ve vnitřních bodech intervalu.

(b) Pozor, v případě (a) a (b) obrácená implikace obecně neplatí: funkce rostoucí na intervalu I nemusí mít kladnou derivaci, například funkce $f(x) = x^3$ na intervalu $I = \langle -1, 1\rangle$ je rostoucí na celém intervalu, ale $f'(x) = 3\,x^2$ je v nule nulová. Funkce $f(x) = -x^3$ je protipříkladem obrácené implikace (b).

(c) Jak zjistíme znaménko funkce? Uvažujme funkci spojitou na intervalu. Pokud v intervalu funkce nemá žádný nulový bod, tj. bod, kde $f(x) = 0$, potom funkce je v celém intervalu buď kladná nebo záporná. Stačí proto určit znaménko hodnoty funkce v jednom bodě, protože uvnitř intervalu se znaménko měnit nemůže, byl by tam nulový bod.

Podobně postupujeme při zjišťování znaménka derivace. Pokud derivace je také funkce spojitá na celém intervalu, může měnit znaménko jenom ve stacionárních bodech, tj. bodech, kde je derivace nulová, tj. $f'(x) = 0$. Stačí proto na intervalech, kde je $f'(x)$ nenulová, zjistit znaménko derivace vyčíslením hodnoty derivace v jednom bodě intervalu.

(d) Při vyšetřování znaménka funkce (nebo derivace) vyznačíme na reálné ose body, kde funkce (nebo derivace) není definovaná nebo není spojitá, a body, kde je nulová. Získáme tím intervaly, ve kterých funkce (nebo derivace) má stejné znaménko. Ve vyznačených bodech funkce často mění znaménko, může se však stát, že funkce (nebo derivace) na sousedních intervalech má stejné znaménko. Při vyšetřování znaménka funkce využíváme také skutečnosti, že součin kladných hodnot je kladný. Pokud je v součinu lichý počet záporných hodnot, součin je záporný. Pokud počet záporných hodnot v součinu je sudý, součin je opět kladný.

Extrémy

Důležitými charakteristikami funkce jsou její extrémy, tj. maxima a minima. Extrémy rozlišujeme absolutní (globální) na množině D, kdy nerovnost $f(x) \leq f(x_0)$ v případě maxima a nerovnost $f(x) \geq f(x_0)$ v případě minima platí pro všechna $x \in D$ a lokální, kdy nerovnost platí pouze v nějakém okolí bodu x_0.

Definice 7.18. (Extrémy) Buď $f(x)$ funkce na množině D. Řekneme, že funkce $f(x)$

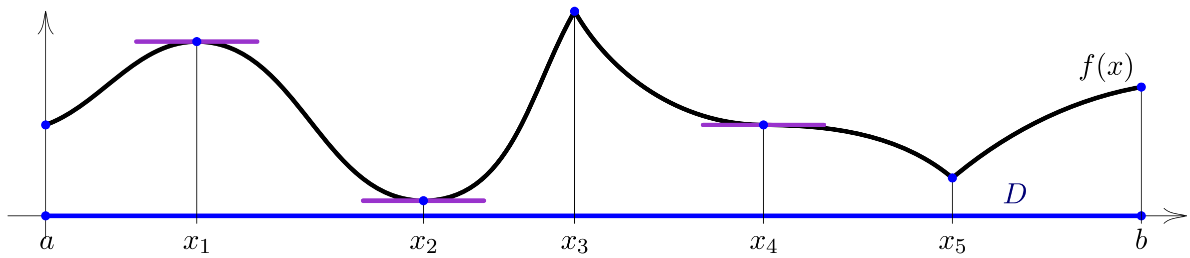
(a) má na množině D absolutní maximum M, jestliže existuje $x_0 \in D$ takové, že $f(x_0) = M$ a nerovnost $f(x) \leq M$ platí pro všechna $x \in D$,

(b) má na množině D absolutní minimum M, jestliže existuje $x_0 \in D$ takové, že $f(x_0) = M$ a nerovnost $f(x) \geq M$ platí pro všechna $x \in D$,

(c) má v bodě x_0 lokální maximum m, jestliže existuje okolí O bodu x_0 takové, že nerovnost $f(x) \leq f(x_0) = m$ platí pro všechna $x \in O \cap D$,

(d) má v bodě x_0 lokální minimum m, jestliže existuje okolí O bodu x_0 takové, že nerovnost $f(x) \geq f(x_0) = m$ platí pro všechna $x \in O \cap D$.

Pokud v podmínce platí ostrá nerovnost pro každé $x \neq x_0$, mluvíme o ostrém maximu nebo minimu, v případě neostré nerovnosti o neostrém maximu nebo minimu.



Obr. 7.3: Funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ má absolutní maximum v bodě x_3, absolutní minimum v x_2, lokální maxima v a, x_1, x_3, b, lokální minima v x_2, x_5, stacionární body jsou x_1, x_2, x_4 .

Připomeňme, že nestačí uvést bod x_0, ve kterém je lokální nebo absolutní extrém, ale i příslušnou hodnotu $f(x_0)$.

Jak je to s existencí a počtem extrémů? Pokud funkce má absolutní maximum nebo minimum, potom tato hodnota je jednoznačně určena. Funkce jí však může nabývat ve více bodech, například funkce $\cos x$ na $\mathbb{R}$ nabývá svého absolutního maxima $M = 1$ v nekonečně mnoha bodech $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ a absolutního minima $m = -1$ v bodech $x = (2k + 1)\pi$.

Funkce však nemusí mít absolutní ani lokální maximum nebo minimum. Je to například v případě, kdy funkce není omezená na množině D, jako je tomu u funkce $f(x) = x$ na $(-\infty, \infty)$ nebo $\operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ani omezená funkce však nemusí mít absolutní ani lokální extrém, může se to stát tehdy, když bod, ve kterém je extrém, už v množině D není – rostoucí funkce na otevřeném intervalu nemá žádné extrémy.

Spojitá funkce na omezené uzavřené množině však má vždy absolutní minimum i maximum.

Lokální extrémy ve vnitřních bodech

Věta 7.19. Jestliže spojitá funkce $f(x)$ má ve vnitřním bodě x_0 množiny D maximum nebo minimum a má v tomto bodě derivaci $f'(x_0)$, potom tato derivace je nulová.

Pokud derivace $f'(x_0)$ je ve vnitřním bodě x_0 intervalu různá od nuly, potom funkce $f(x)$ je v okolí x_0 rostoucí nebo klesající a proto nemá v tomto bodě žádný extrém.

Definice 7.20. Body, ve kterých je derivace $f'(x)$ nulová, nazýváme stacionární body.

Body „podezřelé“ z toho, že v nich může být extrém, proto jsou:

(a) stacionární body, tj. body, kde derivace je nulová, tj. $f'(x) = 0$,

(b) body, kde derivace $f'(x)$ neexistuje.

Mimo vnitřních bodů extrém může být i v hraničním bodě množiny D, tj. krajním bodě intervalu nebo v izolovaném bodě množiny D.

Jak určit, zda funkce má ve stacionárním bodě x_0 maximum nebo minimum? Pokud $f(x)$ je rostoucí vlevo od bodu x_0 a klesající vpravo od bodu x_0, potom $f(x)$ má bodě x_0 lokální maximum. V případě, kdy $f(x)$ je klesající vlevo a rostoucí vpravo od bodu x_0, funkce $f(x)$ má v bodě x_0 minimum:

Věta 7.21. Buď $f(x)$ funkce definovaná v okolí bodu x_0.

(a) Jestliže $f(x)$ je v levém okolí bodu x_0 rostoucí a v pravém klesající $(\nearrow x_0 \searrow)$, potom má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

(b) Jestliže $f(x)$ je v levém okolí bodu x_0 klesající a v pravém rostoucí $(\searrow x_0 \nearrow)$, potom má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

(c) Jestliže $f(x)$ je v levém i pravém okolí x_0 rostoucí $(\nearrow x_0 \nearrow)$, nebo v levém i pravém okolí klesající $(\searrow x_0 \searrow)$, potom v bodě x_0 funkce nemá lokální extrém.

K rozhodnutí, zda ve stacionárním bodě, kde $f'(x_0) = 0$, je extrém, může posloužit druhá derivace. Pokud $f''(x)$ je v bodě x_0 kladná, potom první derivace je v okolí bodu x_0 rostoucí, v levém okolí bodu x_0 je záporná a funkce $f(x)$ klesající, v pravém okolí kladná a funkce rostoucí – v bodě x_0 je tedy ostré lokální minimum. Podobná úvaha vede k závěru, že jestliže $f''(x_0) < 0$, první derivace je klesající a funkce má v bodě x_0 ostré lokální maximum:

Věta 7.22. Nechť spojitá funkce $f(x)$ má ve vnitřním bodě x_0 nulovou derivaci $f'(x_0) = 0$ a druhá derivace $f''(x_0)$ existuje. Potom platí:

(a) $f''(x_0) > 0$ pak $f(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální minimum,

(b) $f''(x_0) < 0$ pak $f(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

(c) V případě $f''(x_0) = 0$ nelze rozhodnout, tj. extrém v x_0 může, ale také nemusí být.

Poznámky 7.23. Podívejme se na případ, kdy $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ podrobněji a popišme, jak lze využít derivace vyšších řádů, pokud existují:

(a) V bodě x_0 může být:

(i) lokální minimum, například $f(x) = (x - x_0)^4$,

(ii) lokální maximum, například $f(x) = -(x - x_0)^4$,

(iii) žádný extrém, například $f(x) = (x - x_0)^3$.

(b) V případě $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ může rozhodnout třetí derivace. Jestliže $f'''(x_0) \neq 0$, potom funkce nemá v bodě x_0 extrém. Skutečně, pomocí Taylorova polynomu třetího stupně můžeme psát $f(x) = \frac{1}{3!} f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3 + o(x - x_0)^3$, funkce je v okolí x_0 rostoucí nebo klesající a proto funkce zde nemůže mít extrém.

Pokud však $f'''(x_0) = 0$ rozhodnout může znaménko čtvrté derivace. Taylorův polynom dává $f(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0) \cdot (x - x_0)^4 + o(x - x_0)^5$ a v případě $f^{(4)}(x_0) > 0$ je v bodě x_0 ostré lokální minimum, v případě $f^{(4)}(x_0) < 0$ je v bodě x_0 ostré lokální maximum.

(c) Jestliže v bodě x_0 jsou všechny čtyři derivace nulové a pátá nenulová, potom zde není extrém. V případě pěti nulových derivací v bodě x_0 může rozhodnout derivace šestá, atd.

Lokální extrémy v hraničních bodech

Každý omezený uzavřený interval interval $\langle a, b\rangle$ má dva hraniční body, intervaly $(-\infty, b\rangle$ a $\langle a, \infty)$ mají jeden hraniční bod. V hraničním bodě může být lokální extrém, derivace zde však nemusí být nulová.

Následující podmínky zajišťují lokální extrémy v těchto hraničních bodech:

Věta 7.24. Nechť a je levý koncový bod intervalu a funkce $f(x)$ je rostoucí (klesající) v nějakém pravém okolí $\langle a, a + \delta)$ bodu a, potom v bodě a funkce $f(x)$ má ostré lokální minimum (maximum). V pravém koncovém bodě b intervalu analogický platí:

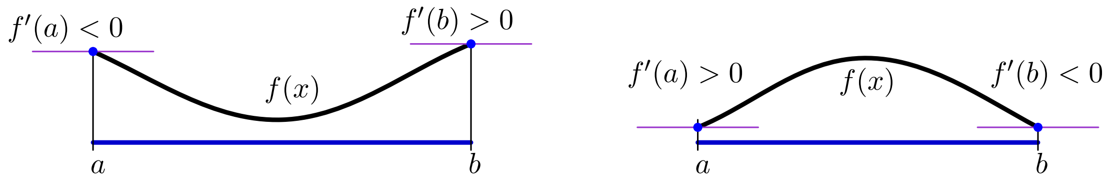
Pokud funkce $f(x)$ je rostoucí (klesající) v nějakém levém okolí $(b - \delta, b\rangle$, potom v bodě a funkce $f(x)$ má ostré lokální maximum (minimum).

Pokud je funkce v okolí jenom neklesající nebo nerostoucí, extrém nemusí být ostrý.

Pokud v levém koncovém bodě a intervalu existuje kladná (záporná) jednostranná limita derivace $\lim_{x\to a+} f'(x)$, potom v bodě a je ostré lokální minimum (maximum).

Analogicky v pravém koncovém bodě b jestliže jednostranná limita $\lim_{x\to b-} f'(x)$ je kladná (záporná), potom v bodě b je ostré lokální maximum (minimum).

Pokud limita derivace v koncovém bodě je nulová, potom extrém může být ostrý i neostrý nebo nemusí existovat.



Obr. 7.4: Nenulové jednostranné limity derivace v lokálním maximu (minimu) v hraničních bodech.

Absolutní (globální) extrémy

Připomeňme, že každá funkce $f(x)$ na libovolné neprázdné množině $D \subset \mathbb{R}$ má své supremum i infimum. Pokud supremum je nekonečno, absolutní maximum neexistuje. Pokud infimum je minus nekonečno, absolutní minimum neexistuje.

Pokud víme, že funkce absolutní maximum má, je to největší ze všech lokální maxim, protože absolutní maximum je také lokální maximum. V tomto případě nemusíme zjišťovat, zda ve stacionárním bodě (nebo bodě, kde není derivace, či hraničním bodě) je extrém, stačí vyčíslit hodnoty ve všech „podezřelých“ bodech, mezi které patří i koncové body intervalu. Podobně pokud funkce absolutní minimum má, je to nejmenší lokální minimum.

Často je velmi užitečná následující věta, která zaručuje existenci absolutních extrémů:

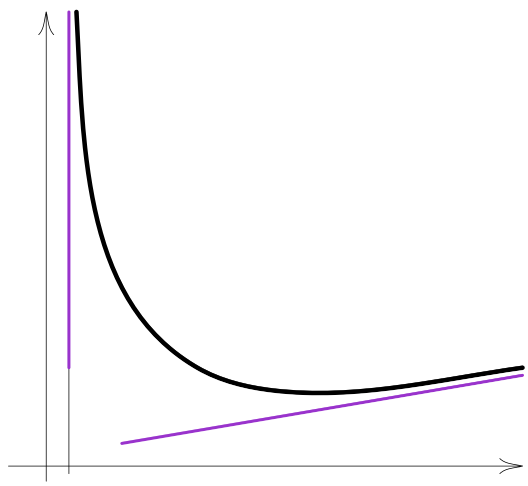
Věta 7.25. Nechť D je omezená uzavřená množina, tj. například omezený uzavřený interval, a funkce $f(x)$ je spojitá na množině D (v koncových bodech intervalu spojitá zleva nebo zprava). Potom funkce $f(x)$ má na množině D absolutní minimum i absolutní maximum.

Pokud nejsou splněny podmínky předchozí věty, na vyšetřování absolutních extrémů není obecný návod. Pokud množina D není uzavřená, absolutní extrém nemusí existovat, pokud hraniční bod, ve kterém limita funkce nabývá extrémní hodnotu, už v množině D není. Pokud množina D není omezená, musíme sledovat limitu funkce při x blížícím se plus nebo minus nekonečnu. Například funkce $f(x) = x^2/\mathrm{e}^{x^2}$ kromě $x = 0$ je všude kladná, její absolutní minimum je proto $f(0) = 0$. Limity v $\pm\infty$ jsou nulové a funkce je spojitá, její absolutní maximum proto budeme hledat mezi stacionárními body.

Asymptoty

Asymptota funkce je obrazně řečeno „tečna ke grafu funkce v nekonečnu“. Asymptota funkce $y = f(x)$ je taková přímka, jejíž vzdálenost od bodu grafu $[x, f(x)]$ se blíží k nule, když x nebo $f(x)$ se vzdaluje do plus nebo minus nekonečna.

Přímky v rovině lze rozdělit na dva druhy: přímky se směrnicí, které mají rovnici $y = k\,x + q$ a tzv. přímky bez směrnice, tj. přímky rovnoběžné s osou y, které mají rovnici $x = x_0$. Podle toho také rozlišujeme dva druhy asymptot: se směrnicí a bez směrnice.



Obr. 7.5: Asymptota bez a se směrnicí

Definice 7.26. (Asymptoty) Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na okolí nekonečna (c, ∞) [resp. na okolí minus nekonečna $(-\infty, c)$]. Potom přímku $y = k\,x + q$ nazveme asymptotou (se směrnicí) funkce $f(x)$ pro $x \to \infty$ [resp. pro $x \to -\infty$] jestliže

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (k\,x + q)) = 0 \qquad \left[\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (k\,x + q)) = 0\right].$$

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná v nějakém levém nebo pravém redukovaném okolí bodu x_0. Potom přímku $x = x_0$ nazveme asymptotou funkce $f(x)$ bez směrnice (nesměrnicovou), jestliže alespoň jedna z jednostranných limit funkce $f(x)$ je nevlastní, tj. rovna ∞ nebo $-\infty$.

Jak zjistit asymptotu se směrnicí? Pokud $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + q)) = 0$, potom i limita $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}(f(x) - (kx + q)) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0$, protože $\lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = 0$. Z této rovnosti plyne hodnota směrnice $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. Známe-li k, potom už $q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Tím jsme odvodili tvrzení, pomocí kterého vyšetřujeme asymptoty se směrnicí:

Věta 7.27. Buď $f(x)$ funkce definovaná v okolí nekonečna. Pokud existují konečné limity

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k\,x)\,,$$

potom přímka $y = k\,x + q$ je asymptota funkce $f(x)$ pro $x \to \infty$.
Analogické tvrzení platí pro případ asymptoty $x \to -\infty$.
Pokud uvedené limity neexistují, nebo nejsou konečné, asymptota funkce neexistuje.

Příklady 7.28. Uveďme několik ilustrativních příkladů:

(a) Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ má asymptotu (se směrnicí) $y = \frac{\pi}{2}$ pro $x \to \infty$ a asymptotu $y = -\frac{\pi}{2}$ pro $x \to -\infty$.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ má v bodech $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ asymptoty bez směrnice $x = x_0$ zleva pro $y \to -\infty$ a zprava pro $y \to \infty$.

(c) Funkce $f(x) = x + 1/x^2$ má asymptoty $y = x$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$ a asymptotu bez směrnice $x = 0$ pro $y \to \infty$.

(d) Funkce $\sin x$ a $\cos x$ žádné asymptoty nemají, protože $k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 0$, ale limity $q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 0 \cdot x)$ neexistují.

(e) Funkce x^2, x^3, x^4 a e^x také nemají asymptoty pro $x \to \infty$, protože limity $\lim_{x\to\infty} f(x)/x$ existují, ale nejsou konečné.

(f) Funkce $\sqrt{x}$ také nemá asymptotu pro $x \to \infty$, protože $k = \lim_{x\to\infty} f(x)/x = 0$, ale limita $q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 0 \cdot x)$ není konečná.

Poznámky 7.29.

(a) Místo limity podílu $k = \lim_{x\to\infty} f(x)/x$ lze vzít limitu derivace $k = \lim_{x\to\infty} f'(x)$, pokud tato limita existuje.

(b) Uvedená definice asymptoty připouští i případ, kdy asymptota se směrnicí není limitou tečen: hodnoty $f(x)$ se sice blíží k asymptotě, ale její směrnice nemají limitu, „oscilují“ okolo k. Například funkce $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^2)$ má asymptotu $y = 0$, protože $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Derivace $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$, tj. směrnice tečny v bodě x však limitu nemá, směrnice k asymptoty proto není limitou směrnic tečen.

Využití druhých derivací

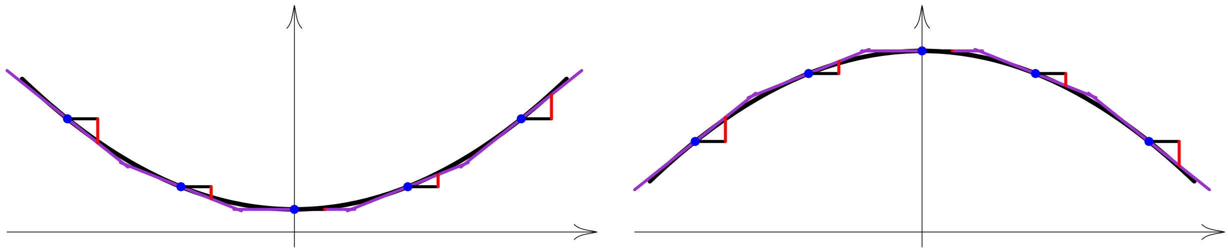
Pomocí druhé derivace lze určit, zda je funkce konvexní nebo konkávní, viz Definice 4.11. Opět interval I může být otevřený nebo uzavřený, omezený nebo neomezený. Pokud funkce $f(x)$ je ryze konvexní, směrnice $f'(x)$ jejich tečen je funkce rostoucí, a proto derivace směrnic, tj. druhá derivace $f''(x)$, je funkce kladná. Analogicky směrnice tečen ryze konkávní funkce je funkce klesající, a proto druhá derivace $f''(x)$ je záporná, viz Obr. 7.6.

To je v souladu s alternativní charakteristikou, viz Poznámka 4.13(b), konvexní diferencovatelné funkce:

Tečna ke grafu konvexní funkce v bodě x_0 (mimo bod x_0) leží „pod“ grafem funkce.

Skutečně, rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 je $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Taylorův polynom druhého stupně dává $f(x) = t(x) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^3$. Pokud $f''(x_0)$ je kladná, v okolí x_0 platí $f(x) > t(x)$, tedy graf funkce je nad tečnou.



Obr. 7.6: Směrnice tečen u ryze konvexní funkce roste, u ryze konkávní funkce klesá.

Věta 7.30. Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na I mající v (a, b) druhou derivaci. Potom platí:

(a) $f''(x) \geq 0$ na intervalu I, potom $f(x)$ je na I konvexní,

(b) $f''(x) \leq 0$ na intervalu I, potom $f(x)$ je na I konkávní.

Pokud pro druhou derivaci platí ostrá nerovnost, potom funkce $f(x)$ je na I ryze konvexní nebo ryze konkávní.

Jestliže druhá derivace $f''(x)$ v bodě x_0 mění znaménko, x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$. Pokud druhá derivace funkce existuje, v inflexním bodě je nulová.

Poznámky 7.31. Pokud $f''(x_0) = 0$, x_0 nemusí být inflexní bod. Například funkce $f(x) = x^4$ má v bodě $x_0 = 0$ nulové derivace druhého řádu, ale je ryze konvexní na celém $\mathbb{R}$. V nule má nulovou i třetí derivaci, čtvrtá je kladná. Funkce $f(x) = x^5$ má v $x_0 = 0$ nulovou první, druhou, třetí i čtvrtou derivaci, nenulová je až pátá derivace. Funkce přitom má v nule inflexní bod.

Příklady 7.32.

(a) Funkce $f(x) = x^3$ má $f''(x) = 6\,x$. Je proto ryze konvexní v intervalu $\langle 0, \infty)$ a ryze konkávní v $(-\infty, 0\rangle$, inflexním bodem je $x_0 = 0$. Funkce e^x je ryze konvexní v celém $\mathbb{R}$, logaritmus $\ln x$ je funkce ryze konkávní na $(0, \infty)$.

(b) Funkce $f(x) = \sin x$ má $f''(x) = -\sin x$. Na intervalech $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ je druhá derivace záporná, funkce je zde ryze konkávní. Na intervalech $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ je druhá derivace kladná, funkce je zde ryze konvexní. Body $x = k\pi$ jsou inflexní body.

Vyšetřování průběhu funkcí

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme (pokud není v zadání uvedeno jinak) následující vlastnosti funkce:

(1) Definiční obor a množinu, kde je funkce spojitá, případně najdeme body nespojitosti.

(2) Zda je funkce sudá, lichá, případně periodická.

(3) Průsečíky s osou x (tzv. nulové body) a znaménka $f(x)$, tj. intervaly, na kterých je funkce kladná nebo záporná.

(4) Jednostranné limity v bodech nespojitosti a v krajních bodech, případně zda existují asymptoty bez směrnice.

(5) Limity pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$ a zda existují asymptoty se směrnicí (pokud funkce je definovaná v okolí $\pm\infty$).

(6) Spočítáme první derivaci $f'(x)$ a dále

(a) najdeme nulové body $f'(x) = 0$, tj. stacionární body,
(b) určíme znaménko $f'(x)$, tj. intervaly, kde je funkce rostoucí nebo klesající,
(c) určíme lokální maxima a minima včetně jejich hodnot,
(d) určíme jednostranné limity $f'(x)$ (směrnic tečen) v bodech nespojitosti funkce a v bodech, kde derivace neexistuje.

(7) Spočítáme druhou derivaci $f''(x)$ a pak

(a) najdeme nulové body druhé derivace $f''(x) = 0$,
(b) určíme znaménka druhé derivace, tj. intervaly, kde je funkce konvexní nebo konkávní,
(c) určíme inflexní body včetně hodnoty funkce a směrnice tečen v těchto bodech.

Závěrem načrtneme graf funkce pomocí předchozích výsledků:

(a) zvolíme vhodný interval a měřítka podle definičního oboru funkce a oboru hodnot,
(b) vyznačíme koncové body definičního oboru a příslušné hodnoty nebo limity funkce,
(c) vyznačíme nulové body a znaménka funkce $f(x)$,
(d) vyneseme hodnoty funkce ve stacionárních bodech, tj. body $[x, f(x)]$ a vyznačíme intervaly, kde je funkce rostoucí nebo klesající,
(e) načrtneme případné asymptoty,
(f) vyneseme hodnoty a směrnice tečen v případných inflexních bodech,
(g) vyznačíme intervaly, kde je funkce konvexní nebo konkávní,
(h) „spojíme" příslušné body křivkou (rostoucí, klesající, konvexní, konkávní,. . .) na intervalech definičního oboru.

Poznámky 7.33.

(a) Definiční obor určujeme postupně podle definičních oborů jednotlivých elementárních funkcí a operací. Vycházíme z množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, přitom musí platit:
- při dělení $g(x)/h(x)$ je jmenovatel nenulový, tj. $h(x) \neq 0$,
- odmocnina $\sqrt{g(x)}$ je definovaná pro nezáporná $g(x)$,
- logaritmus $\ln(g(x))$ nebo $\log_a(g(x))$ je definován jen pro kladná $g(x)$ a pro $a > 0,\ a \neq 1$,
- pro funkce $\operatorname{tg}(g(x))$ je $g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, u $\operatorname{cotg}(g(x))$ je $g(x) \neq k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$,
- u funkcí $\arcsin(g(x))$, $\arccos(g(x))$ argument $g(x)$ musí být v intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Vyloučené a hraniční body definičního oboru jsou často také kandidáty na to, že jimi bude procházet asymptota bez směrnice.

(b) Sudá, lichá, nebo periodická funkce. Nutnou podmínkou pro sudou nebo lichou funkci je definiční obor symetrický podle osy y, tj. $x \in \mathcal{D}(f) \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$. Vlastnost nám usnadní vykreslení průběhu funkce. Připomeňme, že funkce:
- **sudá** má graf osově souměrný podle osy y a platí $f(-x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.
- **lichá** má graf středově souměrný podle počátku a platí $f(-x) = -f(x)\quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$.
- je **periodická** s periodou p, pokud její definiční obor splňuje $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow x+kp \in \mathcal{D}(f)$ $(k \in \mathbb{Z})$ a pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $f(x) = f(x + kp)$, tj. graf funkce se „opakuje". Hledáme přitom nejmenší $p > 0$ splňující uvedené podmínky.

(c) Nulové body. Jsou to body na ose x, které mají y-ovou souřadnici rovnu nule. Stačí najít řešení rovnice $f(x) = 0$. Průsečík s osou y je hodnota $f(0)$, pokud 0 je v definičním oboru.

(d) První derivace, stacionární body, monotónnost, extrémy. Stacionární body jsou řešení rovnice $f'(x) = 0$. V těchto bodech je tečna „vodorovná“, tj. rovnoběžná s osou x. Zde může být extrém, ale také inflexní bod. Podle znaménka derivace určíme, zda je funkce rostoucí nebo klesající. Také zde využijeme skutečnost, že funkce může změnit znaménko pouze v nulových bodech, nebo v bodech, kde funkce není spojitá. Podobně derivace může změnit znaménko ve stacionárním bodě nebo bodě, kde derivace není definovaná.

(e) Druhá derivace, konvexnost, konkávnost, inflexní body. Opět spočítáme druhou derivaci a vyřešíme rovnici $f''(x) = 0$. Podle znaménka pak určíme, zda je funkce konvexní nebo konkávní. Bod, kde $f''(x) = 0$, může být inflexním bodem.

(f) Asymptoty bez směrnice se mohou vyskytnout pouze v bodech, kde funkce není definovaná nebo není spojitá. Asymptoty se směrnicí vyšetřujeme jen v případech, kdy funkce je definovaná v okolí kladného nebo záporného nekonečna.

(g) Ne vždy je třeba zjišťovat všechny uvedené vlastnosti funkce. Zejména **při zkoušce vyšetřujte jen vlastnosti požadované v zadání**.

(h) Porovnejte jednotlivé vlastnosti navzájem! Pokud jsou ve sporu, ve výpočtu je chyba. Například pokud je funkce sudá, tj. $f(-x) = f(x)$, její graf je symetrický podle osy y. Její první derivace je funkce lichá, tj. $f'(-x) = -f'(x)$, její graf je symetrický podle středu v počátku $[0, 0]$, stacionární body jsou symetrické. Druhá derivace je opět funkce sudá.

7D. Příklady vyšetřování průběhu funkce

Příklad 7.34. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.

Řešení:

(1) **Definiční obor** Kvůli zlomku $\frac{2}{x}$ nutno vyloučit $x = 0$, proto $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce je na $\mathcal{D}(f)$ spojitá, jediným bodem nespojitosti je $x = 0$.

(2) **Vlastnosti funkce** Protože $f(-x) = -f(x)$ jde o funkci lichou, bude středově symetrická podle počátku. Stačilo by ji vyšetřovat pouze na intervalu $\langle 0, \infty)$.

(3) **Nulové body** Vynásobením rovnice $f(x) = 0$ výrazem $2x$ dostáváme rovnici $4 + x^2 = 0$, která nemá řešení. Funkce proto nemá nulové body a tudíž na intervalu $(0, \infty)$ má stejné znaménko. Protože například $f(1) = 5/2$, funkce je na intervalu $(0, \infty)$ kladná. Díky lichosti bude na intervalu $(-\infty, 0)$ záporná.

(4) Kvůli výrazu $\frac{2}{x}$ je $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$. Funkce má proto asymptotu bez směrnice $x = 0$ pro $y \to \infty$ zprava a pro $y \to -\infty$ zleva.

(5) Limity v nekonečnu jsou $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Spočítáme limity $k = \lim_{x\to\infty} f(x)/x = \frac{1}{2}$ a $q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - \frac{x}{2}) = 0$. Funkce má proto asymptoty se směrnicí $y = \frac{x}{2}$ pro $x \to \infty$. Podobně asymptota pro $x \to -\infty$ je přímka $y = \frac{x}{2}$, což je v souladu se skutečností, že funkce je lichá.

(6) Spočítejme první derivaci

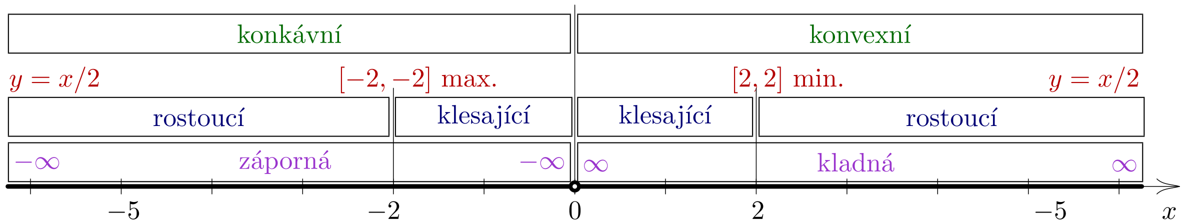
$$f'(x) = \left[\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right]' = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-4 + x^2}{2x^2}.$$

V tomto případě není vhodné dávat zlomky na společný jmenovatel před derivováním, lepší je derivovat funkci ve tvaru součtu zlomků. Výsledné zlomky jsme dali na společný jmenovatel až pro řešení rovnice $f'(x) = 0$.

Rovnici vynásobíme výrazem $2x^2$. Dostáváme tak rovnici $x^2 - 4 = 0$, která má dvě řešení $x = 2$ a $x = -2$. Derivace má stejná znaménka na intervalech $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ a $(2, \infty)$. Vyčíslením hodnot, například $f'(4) = \frac{3}{8} > 0$, $f'(1) = -\frac{3}{2} < 0$, podobně pro $x = -4$ a $x = -1$, zjistíme, že funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$ a klesající v intervalech $(-2, 0)$ a $(0, 2)$.

Protože v bodě $x = -2$ funkce přechází z rostoucí na klesající, je zde lokální maximum $f(-2) = -2$. Podobně v bodě $x = 2$ funkce přechází z klesající na rostoucí, je zde lokální minimum $f(2) = 2$. V bodě nespojitosti $x = 0$ je limita $f'(x) = -\infty$ z obou stran.

(7) Druhá derivace je $f''(x) = [-2/x^2 + 1/2]' = 4/x^3$. Je záporná na $(-\infty, 0)$, funkce je zde proto konkávní, a kladná na $(0, \infty)$, funkce je zde konvexní. Protože funkce není definovaná v bodě $x = 0$, inflexní bod neexistuje. Zjištěné vlastnosti shrneme v přehledu:



Obr. 7.7: Přehled zjištěných vlastností funkce $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.

Načrtneme souřadnicové osy x, y, vyznačíme jednotky na ose x v rozmezí cca $(-6, 6)$. Načrtneme asymptoty se směrnicemi i bez směrnic. Vyznačíme intervaly kladných a záporných hodnot, intervaly, kde je funkce rostoucí a klesající, bod lokálního maxima $[-2, -2]$ a lokálního minima $[2, 2]$. Na závěr vyznačíme intervaly, kde je funkce konvexní a konkávní.

Je vidět, že jednotlivé vlastnosti nejsou v rozporu a souhlasí se skutečností, že funkce je lichá. Potom už není problém doplnit do obrázku graf funkce, viz Obr. 7.8.

Příklad 7.35. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

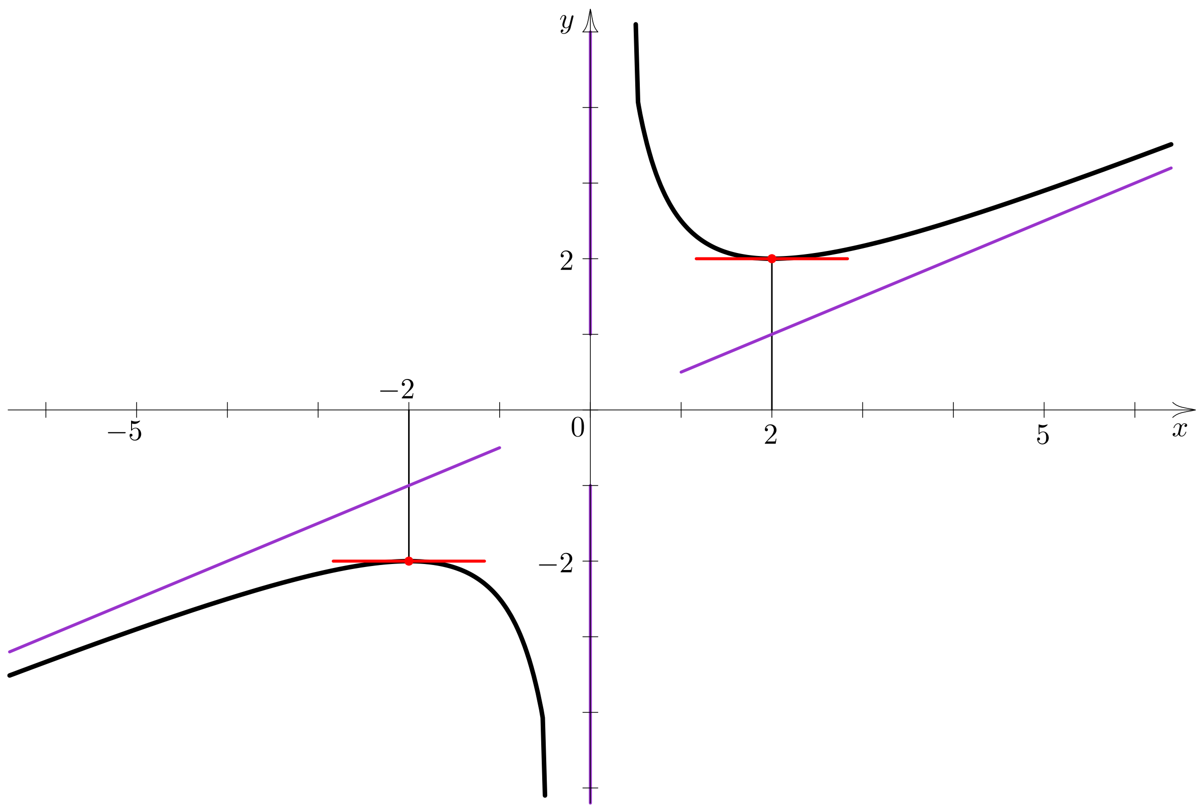
Řešení:

(1) **Definiční obor** Protože jmenovatel $1 + x^2$ je kladný, definiční obor je celé $\mathbb{R}$ a funkce je také spojitá na celém definičním oboru $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

(2) **Vlastnosti funkce** Protože $f(-x) = f(x)$, jde o funkci sudou, graf bude souměrný podle osy y. Stačilo by funkci vyšetřovat pouze na intervalu $\langle 0, \infty)$.

(3) **Nulové body** Vynásobením rovnice $f(x) = 0$ výrazem $1 + x^2$ dostáváme rovnici $x^2 = 0$, jediným nulovým bodem je bod $x = 0$. Protože pro $x \neq 0$ je čitatel i jmenovatel zlomku kladný, je funkce kladná na obou intervalech $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$.

(4) Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, proto nemá žádnou asymptotu bez směrnice.



Obr. 7.8: Graf funkce $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$

(5) Limity v nekonečnu jsou $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Z výpočtu limit $k = \lim_{x\to\infty} f(x)/x = 0$, $q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 0) = 1$ plyne existence asymptoty se směrnicí $y = 1$ pro $x \to \infty$. Protože funkce je sudá, bude to i asymptota pro $x \to -\infty$.

(6) Spočítejme první derivaci:

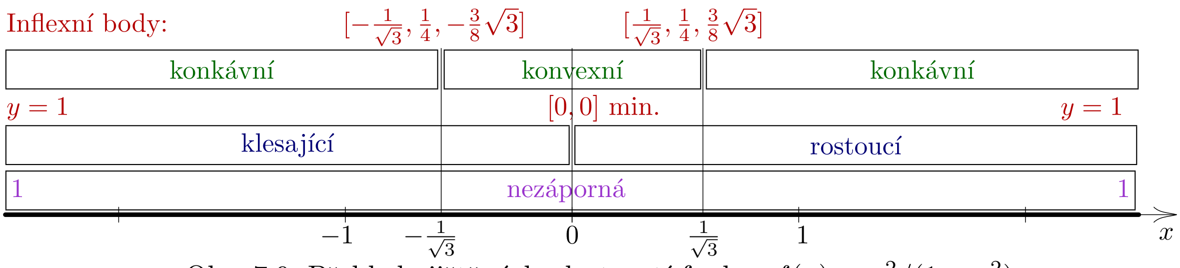
$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{1+x^2}\right]' = \frac{[x^2]' \cdot (1+x^2) - x^2 \cdot [1+x^2]'}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Rovnice $f'(x) = 0$ má jediné řešení $x = 0$. Protože jmenovatel je kladný, derivace je záporná na $(-\infty, 0)$; funkce je zde proto klesající. Na $(0, \infty)$ je derivace kladná a funkce rostoucí. V bodě $x = 0$ funkce přechází z klesající na rostoucí, je zde proto lokální minimum $f(0) = 0$. Pro $x \neq 0$ je $f(x) > 0$, v nule je proto absolutní minimum.

(7) Při počítání druhé derivace je lépe nejprve zlomek zkrátit výrazem $(1+x^2)$ a teprve potom roznásobit:

$$f''(x) = \left[\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]' = \frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2 \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}\,.$$

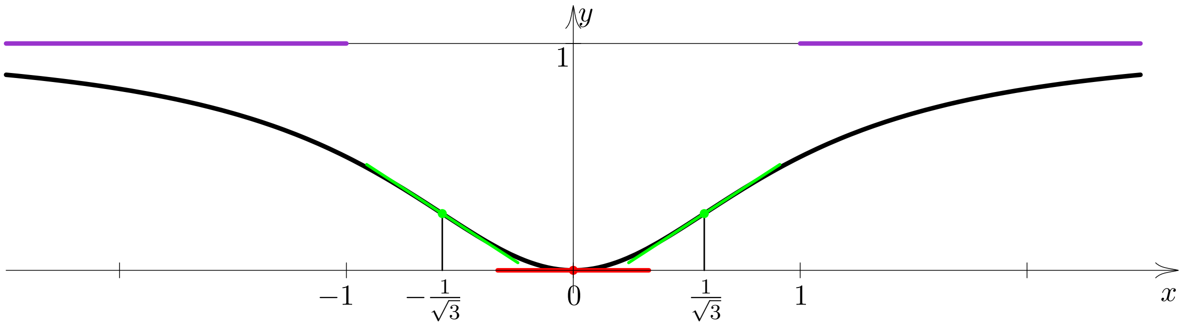
Vynásobením $f''(x) = 0$ výrazem $(x^2+1)^3$ dostaneme rovnici $2 - 6x^2 = 0$, která má dvě řešení $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Protože jmenovatel je kladný, druhá derivace je kladná v intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, funkce je zde konvexní. V intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ je druhá derivace záporná, a proto funkce je konkávní. Funkce má dva inflexní body $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}]$, a $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}]$, ve kterých jsou směrnice $f'(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$, $f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$. Zjištěné vlastnosti shrneme v tabulce. Inflexní body zapíšeme ve tvaru souřadnic bodu se směrnicí: $[x, f(x), f'(x)]$:



Obr. 7.9: Přehled zjištěných vlastností funkce $f(x) = x^2/(1+x^2)$

Na závěr načrtneme souřadnicové osy x, y, vyznačíme jednotky na ose x v rozmezí cca $(-2, 2)$, v ose y v rozmezí $(0, 1)$. Načrtneme asymptoty. Vyznačíme si intervaly, kde je funkce rostoucí a klesající, a bod lokálního minima $[0, 0]$. Vyznačíme inflexní body se směrnicemi a intervaly, kde je funkce konvexní a konkávní.

Z náčrtu je vidět, že jednotlivé vlastnosti nejsou navzájem v rozporu a souhlasí se skutečností, že funkce je sudá. Potom už je snadné doplnit do obrázku graf funkce.



Obr. 7.10: Graf funkce $f(x) = x^2/(1+x^2)$

Příklad 7.36. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Řešení:

(1) **Definiční obor** Protože jmenovatel $1 + x^2$ je kladný, definiční obor je celé $\mathbb{R}$ a funkce je také spojitá na celém definičním oboru $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

(2) **Vlastnosti funkce** Protože $f(-x) = -f(x)$, jde o funkci lichou, graf bude středově souměrný podle počátku $[0, 0]$. Stačilo by proto funkci vyšetřovat jen na intervalu $\langle 0, \infty)$.

(3) **Nulové body** Vynásobením rovnice $f(x) = 0$ výrazem $1+x^2$ dostáváme rovnici $2x = 0$, jediným nulovým bodem je bod $x = 0$. Protože $1 + x^2$ je kladné, znaménko funkce závisí na $2x$, funkce je tedy záporná na intervalu $(-\infty, 0)$ a kladná na $(0, \infty)$.

(4) Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, proto nemá žádnou asymptotu bez směrnice.

(5) Protože stupeň polynomu ve jmenovateli je větší než stupeň polynomu v čitateli, funkce má nulové limity v $\pm\infty$. Tudíž obě limity z výpočtu asymptoty: $k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 0$, $q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, funkce má proto asymptoty se směrnicí $y = 0$ pro $x \to \pm\infty$.

(6) Spočítejme první derivaci

$$f'(x) = \left[\frac{2x}{1+x^2}\right]' = \frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}\,.$$

Rovnice $f'(x) = 0$ má dvě řešení $x = \pm 1$. Protože jmenovatel je kladný, znaménko derivace závisí na znaménku čitatele $1 - x^2$: pro $|x| > 1$ je derivace záporná, pro $|x| < 1$ je kladná. Funkce je proto klesající na intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, \infty)$ a rostoucí na $\langle -1, 1\rangle$.

V bodě $x = -1$ funkce přechází z klesající na rostoucí, je zde proto lokální minimum $f(-1) = -1$; v bodě $x = 1$ z rostoucí přechází na klesající, v $x = 1$ je proto lokální maximum $f(1) = 1$. Protože obě limity v nekonečnu jsou nulové, oba extrémy jsou také absolutní.

(7) Při počítání druhé derivace je lépe nejprve zlomek zkrátit výrazem $(1 + x^2)$ a až potom roznásobit:

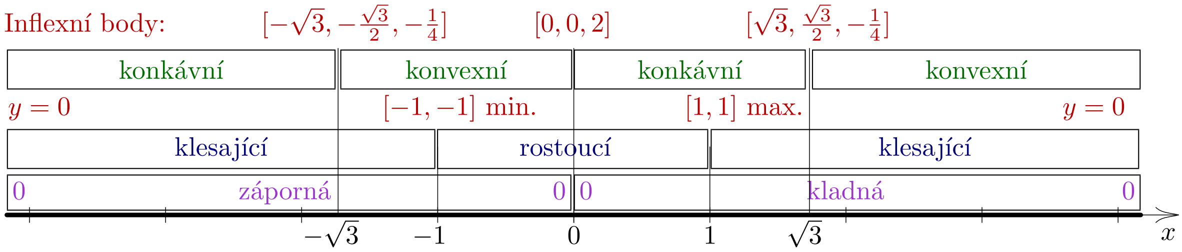
$$f''(x) = \left[\frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}\right]' = \frac{-4x(1 + x^2)^2 - (2 - 2x^2) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} =$$

$$= \frac{-4x(1 + x^2) - (2 - 2x^2)4x}{(1 + x^2)^3} = \frac{-4x(3 - x^2)}{(1 + x^2)^3} = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}\,.$$

Rovnici $f''(x) = 0$ vynásobíme výrazem $(x^2+1)^3$. Dostaneme rovnici $4x(x^2-3) = 0$, která má tři řešení $x = 0$ a $x \pm \sqrt{3}$. Protože jmenovatel je kladný, druhá derivace mění znaménko jen v bodech $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$. Funkce $f(x)$ je proto konkávní na intervalu $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$, konvexní na $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$, konkávní na $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$ a konvexní na $\langle \sqrt{3}, \infty)$. Funkce má tři inflexní body v bodech $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$. Určeme ještě příslušné hodnoty funkce a směrnice tečen:

$$f(-\sqrt{3}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2},\ f'(-\sqrt{3}) = -\tfrac{1}{4}, \quad f(0) = 0,\ f'(0) = 2, \quad f(\sqrt{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ f'(\sqrt{3}) = -\tfrac{1}{4}.$$

Výsledky shrneme v tabulce:

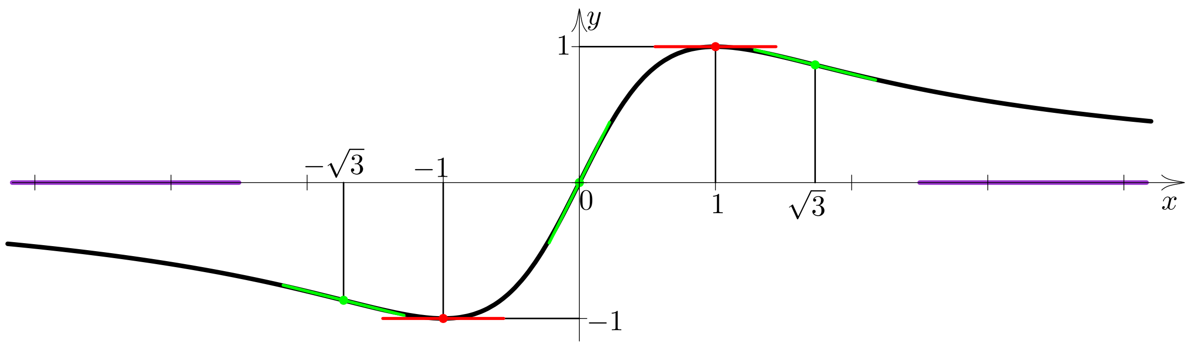


Obr. 7.11: Přehled zjištěných vlastností funkce $f(x) = 2x/(1 + x^2)$

Na závěr načrtneme souřadnicové osy x, y, vyznačíme jednotky na ose x v rozmezí cca $(-4, 4)$, v ose y v rozmezí $(-1, 1)$. Načrtneme asymptoty. Vyznačíme intervaly kladných a záporných hodnot, intervaly, kde je funkce rostoucí a klesající, a body lokálního minima a maxima.

Vyznačíme inflexní body se směrnicemi a intervaly, kde je funkce konvexní a konkávní.

Z náčrtu je vidět, že jednotlivé vlastnosti nejsou navzájem v rozporu s vlastnostmi sudé funkce. Potom už snadno do obrázku doplníme graf funkce.



Obr. 7.12: Graf funkce $f(x) = 2x/(1 + x^2)$

Příklad 7.37. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Řešení:

(1) **Definiční obor** Kvůli zlomku $\frac{1}{x}$ nutno vyloučit $x = 0$, proto $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce je na $\mathcal{D}(f)$ spojitá, jediným bodem nespojitosti je $x = 0$.

(2) **Vlastnosti funkce** Funkce není lichá, sudá ani periodická.

(3) **Nulové body** Funkce e^x je stále kladná, proto i naše funkce nemá žádné nulové body.

(4) Bodem nespojitosti je $x = 0$. Pro $x \to 0+$ je asymptota bez směrnice $x = 0$ pro $y \to \infty$. Limita v nule zleva dává

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{c} t := \frac{1}{x} \\ t \to -\infty \end{array} \right] = \lim_{t\to -\infty} \mathrm{e}^t = 0\,.$$

(5) Protože $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, platí $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Asymptoty se směrnicí jsou $y = 1$.

(6) Spočítejme první derivaci $f'(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}/x^2$, což je funkce stále záporná, funkce je tedy klesající na obou intervalech $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ a nemá žádné extrémy. Ještě určíme jednostrannou limitu derivace v nule zleva. S využitím limity v 7.12 (c) máme

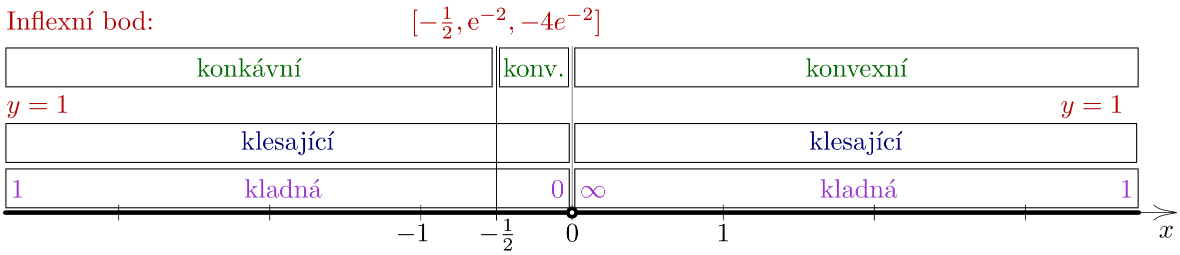
$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = \left[\begin{array}{c} t := \frac{1}{x} \\ t \to -\infty \end{array} \right] = \lim_{t\to -\infty} \left(-e^t \cdot t^2 \right) = 0\,.$$

Protože $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ a funkce je klesající, platí $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$.

(7) Druhá derivace $f''(x)$ je

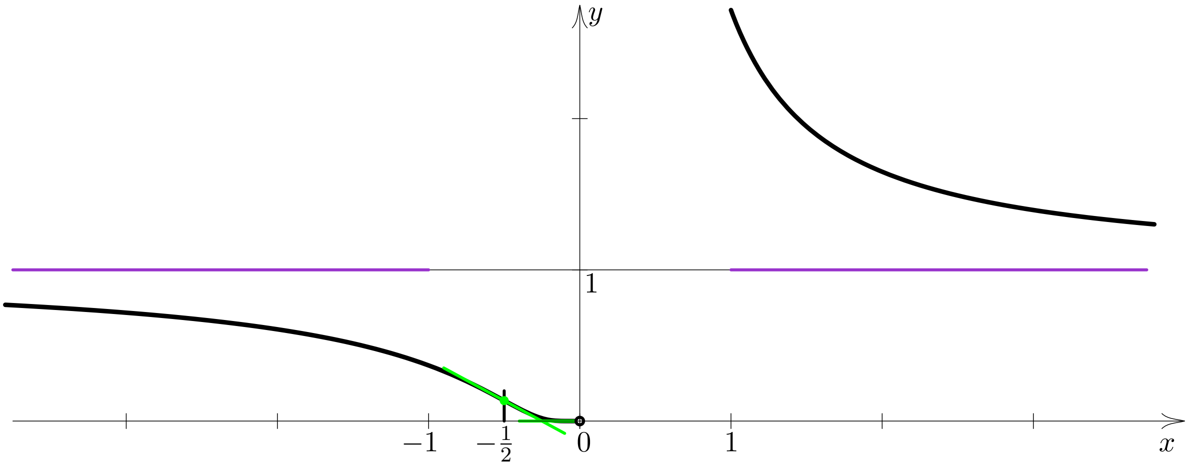
$$f''(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left[\left(-\frac{1}{x^2} \right)^2 + \frac{2}{x^3} \right] = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 + 2\,x}{x^4}\,.$$

Rovnice $f''(x) = 0$ dává $1 + 2\,x = 0$. Jediné řešení je $x = -\frac{1}{2}$. Pro $x > -\frac{1}{2}$ je druhá derivace kladná, pro $x < -\frac{1}{2}$ záporná. Funkce je tedy konkávní na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Na intervalech $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \infty)$ je konvexní s inflexním bodem $x = -\frac{1}{2}$. Dopočítejme ještě $f(-\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-2} \doteq 0.135$ a $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4\mathrm{e}^{-2} \doteq -0.541$.



Obr. 7.13: Přehled zjištěných vlastností funkce $f(x) = e^{1/x}$.

Načrtneme souřadnicovou osu x v rozmezí cca $(-4, 4)$ a osu y pro $\langle 0, 2)$. Načrtneme asymptoty $y = 1$ i asymptotu $x = 0$. Vyznačíme inflexní bod i jeho směrnici. Potom snadno doplníme do obrázku graf funkce.



Obr. 7.14: Graf funkce $f(x) = e^{1/x}$.

Příklad 7.38. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = 2\cos x - \sin(2x)$.

Řešení:

(1) **Definiční obor** Funkce je definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$.

(2) **Vlastnosti funkce** Funkce $\cos x$ i $\sin x$ jsou periodické s periodou 2π, funkce dvojnásobku argumentu $\sin(2x)$ má periodu poloviční, tj π. Jejich součet má periodu, která je nejmenší společný násobek, tj. 2π. Funkce je tedy periodická s nejmenší periodou 2π. Stačí proto vyšetřovat funkci na základní periodě délky 2π. Za základní periodu zvolíme interval $\langle -\pi, \pi\rangle$. Funkce není sudá ani lichá.

(3) **Nulové body** Rovnici $f(x) = 0$ upravíme pomocí vzorce $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$:

$$f(x) = 2\cos x - \sin(2x) = 2\cos x - 2\sin x\cos x = 2\cos x(1 - \sin x) = 0\,.$$

V základní periodě $\cos x = 0$ dává dvě řešení $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$, rovnost $\sin x = 1$ znovu $x = \frac{\pi}{2}$. Nulové body proto jsou $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Z hodnot $f(0) = 2$ a $f(\pi) = -2$ plyne, že funkce je kladná na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a záporná na intervalech $\langle\pi, -\frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$.

(4,5) Funkce nemá žádné asymptoty.

(6) První derivaci je $f'(x) = -2\sin x - 2\cos(2x)$. Pomocí vzorce $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ po úpravě dostáváme rovnici

$$f'(x) = -2\sin x - 2\cos(2x) = 2(2\sin^2 x - \sin x - 1) = 0\,,$$

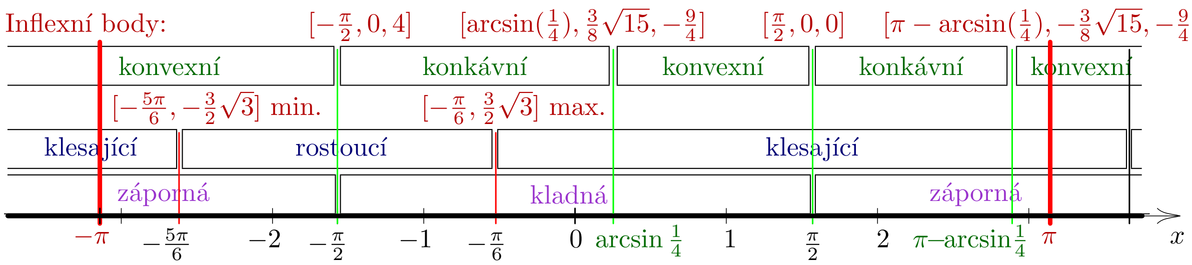
což je po substituci $t = \sin x$ kvadratická rovnice $2t^2 - t - 1 = 0$ s dvěma kořeny $t = 1$ a $t = -\frac{1}{2}$. Kořen $t = \sin x = 1$ dává jedno řešení $x = \frac{\pi}{2}$, druhý kořen $t = \sin x = -\frac{1}{2}$ dává řešení dvě: $x = -\frac{5}{6}\pi$, $x = -\frac{1}{6}\pi$. Opět hodnoty $f'(-\pi) = -2$, $f'(-\frac{\pi}{2}) = 4$, $f'(0) = -2$, $f'(\pi) = -2$ určují znaménko derivace na intervalech: derivace funkce je kladná a funkce rostoucí v intervalu $(-\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$. V intervalech $\langle -\pi, -\frac{5}{6}\pi)$, $(-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$ je derivace záporná a funkce klesající.

Proto funkce má v bodě $-\frac{\pi}{6}$ maximum $f(-\frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \doteq 2.598$ a v bodě $-\frac{5}{6}\pi$ minimum $f(-\frac{5}{6}\pi) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \doteq -2.598$. V bodě $\frac{\pi}{2}$ extrém není – je zde inflexní bod.

(7) Druhá derivace je $f''(x) = -2\cos x + 4\sin(2x)$. Opět pomocí vzorce pro $\sin(2x)$ rovnici $f''(x) = 0$ upravíme

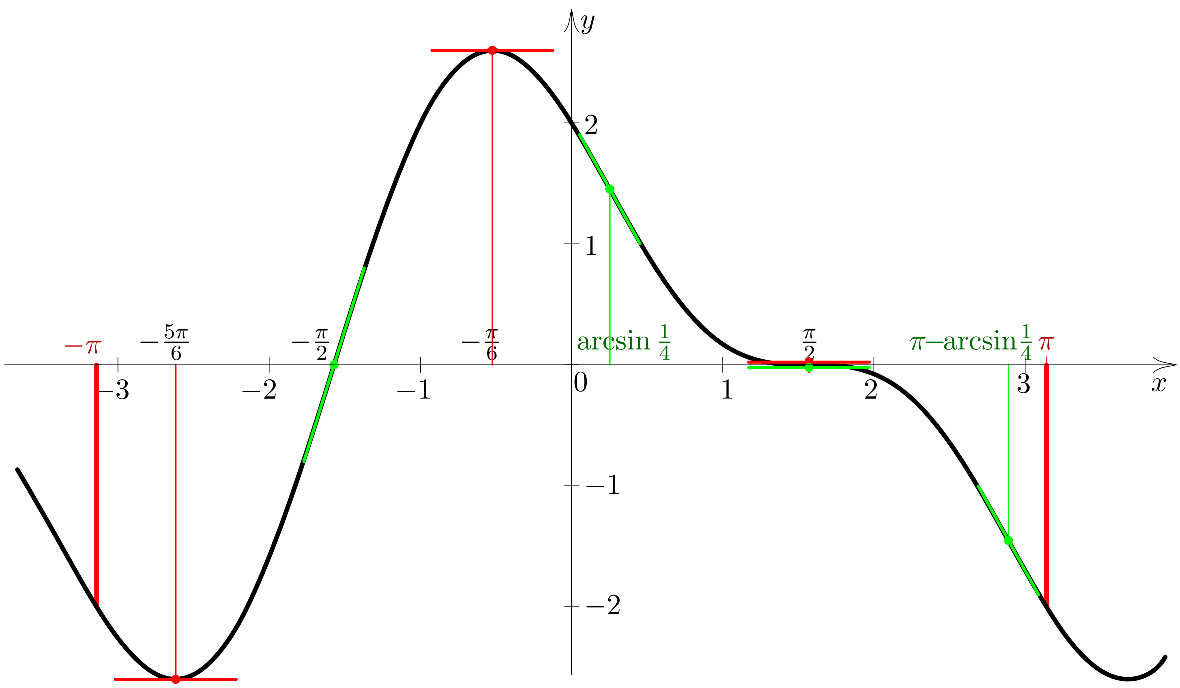
$$f''(x) = -2\cos x + 4\sin(2x) = -2\cos x + 8\sin x\cos x = 2\cos x(4\sin x - 1) = 0\,.$$

Rovnice $\cos x = 0$ dává $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ a z rovnosti $\sin x = \frac{1}{4}$ plynou hodnoty $x = \arcsin(\frac{1}{4}) \doteq 0.253$ a $x = \pi - \arcsin(\frac{1}{4}) \doteq 2.89$. K bodům x dopočítáme hodnotu $f(x)$ a derivaci $f'(x)$. Čtyři inflexní body zapíšeme ve tvaru $[x, f(x), f'(x)]$: $[-\frac{\pi}{2}, 0, 4]$, $[\arcsin(\frac{1}{4}), \frac{3}{8}\sqrt{15}, -\frac{9}{4}]$, $[\frac{\pi}{2}, 0, 0]$ a $[\pi - \arcsin(\frac{1}{4}), -\frac{3}{8}\sqrt{15}, -\frac{9}{4}]$. Zjištěné vlastnosti shrneme do tabulky:



Obr. 7.15: Přehled zjištěných vlastností funkce $f(x) = 2\,\cos x - \sin(2x)$.

Závěrem načrtneme souřadnicovou osu x v rozmezí základní periody $\langle -\pi, \pi\rangle$ a osu y pro $(-2.5, 2.5)$. Vyznačíme periodu (červeně), extrémy a inflexní body se směrnicemi. Potom snadno doplníme do obrázku graf funkce.



Obr. 7.16: Graf funkce $f(x) = 2\,\cos x - \sin(2x)$ na periodě $\langle -\pi, \pi\rangle$.