7E. Křivky

Derivace nacházejí uplatnění také při studiu křivek. Obrazně řečeno křivka v rovině je množina bodů, která vznikne pohybem pera po papíře. Předpokládáme přitom, že hrot pera je stále v kontaktu s papírem a hrot pera je bod – má nulový průměr.

Polohu $[x, y]$ hrotu pera v rovině papíru v čase t popisují dvě funkce $X(t), Y(t)$ určující jeho souřadnice $x = X(t)$, $y = Y(t)$. Tyto funkce jsou definované a spojité na nějakém intervalu I.

Například graf spojité funkce $f(x)$ na intervalu I je křivka, kdy $X(t) = t$ a $Y(t) = f(t)$, $t \in I$. Graf nespojité funkce není křivka. Mnohé křivky však nejsou grafem žádné funkce, obě souřadnice proto určujeme pomocí spojitých funkcí proměnné t, tzv. parametru. Uveďme jednoduchou definici, která však připouští i množiny, které mezi křivky nepočítáme.

Definice 7.39. (Křivka) Buďte $X(t)$ a $Y(t)$ dvě funkce definované a spojité na intervalu I, který může být otevřený nebo uzavřený, omezený i neomezený, případně celé $\mathbb{R}$. Křivkou v rovině nazveme množinu Γ určenou vztahy

$$\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = X(t), y = Y(t),\ t \in I\}$$

a $\mathcal{P} = \{x = X(t), y = Y(t),\ t \in I\}$ nazveme **parametrizací** $\mathcal{P}$ křivky Γ.

Poznámky 7.40.

(a) Křivky budeme označovat řeckým písmenem Γ. Užívá se také symbol k nebo K podle českého „křivka“ a německého „die Kurve“, nebo C z anglického „curve“. Značení není jednotné. V teorii množin se prvky – body označují malými písmeny a množiny velkými písmeny. Křivka jakožto množina bodů by se proto měla označovat velkým písmenem, v geometrii se však obvykle body označují velkými písmeny $A, B, P, \ldots$ a množiny malými písmeny: například přímky p, q, kružnice k, l, roviny a úhly α, β, γ.

(b) Stručně můžeme říci, že křivka je **spojitým obrazem intervalu**, tj. křivka je obor hodnot (obraz) zobrazení $t \in I \mapsto [X(t), Y(t)] \in \mathbb{R}^2$.

(c) Křivka jakožto spojitý obraz intervalu je vždy souvislá, tj. „nepřetržená“ množina. Nesouvislá „přetržená“ čára není křivkou. Podle této definice křivkou je i jednobodová množina v případě konstantních funkcí $X(t) = c_1, Y(t) = c_2$.

(d) Zřejmě každá dvojice spojitých funkcí $X(t), Y(t)$ na stejném intervalu I určuje jednoznačně nějakou množinu – křivku Γ, tj. parametrizace určuje křivku jednoznačně.

(e) Na druhé straně různé parametrizace mohou určovat stejnou množinu Γ, dokonce každá křivka Γ má nekonečně mnoho parametrizací. Skutečně, jestliže trojice $X(t), Y(t)$, $I = (a, b)$ určuje křivku Γ, potom „posunuté“ funkce $X_c(t) = X(t - c)$, $Y_c(t) = Y(t - c)$ na „posunutém“ intervalu $I_c = (a + c, b + c)$ určují stejnou množinu i křivku Γ.

(f) Podobně množina Γ se nezmění při změně „rychlosti“ pohybu bodu v parametrizaci. Například pro $v > 0$ parametrizace $X_v(t) = X(vt)$, $Y_v(t) = Y(vt)$ a $I_v = \langle \frac{a}{v}, \frac{b}{v} \rangle$ tak určují stejnou množinu i křivku Γ. „Posunuté“ i různě „rychlé“ parametrizace určují stejné množiny i křivky Γ.

(g) Křivka však není jenom množina bodů, záleží také na parametrizaci. Například rovnice $x = \cos t$ a $y = \sin t$ pro $t \in \langle 0, 2\pi)$ určují kružnici. Tytéž rovnice s $t \in \langle 0, 4\pi)$ sice určují stejnou množinu, ale při určování délky křivky, modelování pohybu po křivce ji považujeme za jinou křivku, protože parametrizace prochází každým bodem dvakrát. Křivky považujeme za stejné, jestliže každým bodem křivky parametrizace prochází stejně krát. Křivky budeme podrobněji studovat v předmětu Matematika 2 – křivkový integrál.

(h) Křivka je určena svojí parametrizací. Kdy dvě parametrizace určují stejnou křivku? Naznačme matematický přístup k tomuto problému. Mezi parametrizacemi zavedeme relaci $\approx$. Řekneme, že parametrizace $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$, ($\mathcal{P}_i = \{x = X_i(t), y = Y_i(t), t \in I_i\}$) jsou v relaci $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$, jestliže existuje spojitá prostá funkce $\varphi(t)$ (tj. rostoucí nebo klesající), která zobrazuje interval I_1 na I_2 a platí $X_1(t) = X_2(\varphi(t)), Y_1(t) = Y_2(\varphi(t)),\ \forall t \in I_1$.

Ověříme, že tato relace je ekvivalencí. Relace $\approx$ je
- **reflexivní**: s funkcí $\varphi(t) = t$ platí $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_1$,
- **symetrická**: funkce $\varphi : I_1 \to I_2$ je prostá, má proto inverzní $\psi : I_2 \to I_1$, splňující $\varphi(t) = s$, právě když $\psi(s) = t$, díky čemuž z $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$ plyne $\mathcal{P}_2 \approx \mathcal{P}_1$,
- **tranzitivní**: z $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$ s funkcí $\varphi : I_1 \to I_2$ a $\mathcal{P}_2 \approx \mathcal{P}_3$ s funkcí $\psi : I_2 \to I_3$ plyne $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_3$ se složenou funkcí $\psi \circ \varphi : I_1 \to I_3$.

Pomocí této ekvivalence se nám množina všech parametrizací rozloží na třídy (skupiny) navzájem ekvivalentních parametrizací. Tyto třídy parametrizací prohlásíme za křivky.

(i) Uvedeným rozkladem parametrizací jsme rozlišili dvě křivky dané různými parametrizacemi v příkladě (g), které určují stejnou množinu.

(j) Pokud k funkcím $X(t)$, $Y(t)$ na intervalu I přidáme ještě třetí funkci $Z(t)$ na stejném intervalu I, definujeme křivku v trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$:

$$\Gamma = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = X(t), y = Y(t), z = Z(t),\ t \in I\}$$

a předchozí vztah nazveme parametrizací křivky Γ.

Regulární (hladké) křivky.

Křivka jakožto spojitý obraz intervalu však ještě může vypadat dost divoce, omezíme se proto na „hezké“ křivky, které jsou „hladké“, tj. bez „zlomů“. V technické praxi často potřebujeme „po částech hladké“ křivky, které mají jenom konečně mnoho zlomů:

Definice 7.41. Nechť funkce $X(t)$ a $Y(t)$ jsou definované a spojité na intervalu I. Předpokládejme, že funkce mají navíc na I spojité derivace $X'(t)$ a $Y'(t)$ na celém intervalu I, v případných krajních bodech intervalu derivace jednostranné. Předpokládejme navíc

$$(X'(t), Y'(t)) \neq (0, 0) \qquad \forall t \in I. \tag{$*$}$$

Potom křivku nazveme křivkou regulární, nebo také hladkou.

Křivku Γ nazveme po částech regulární, pokud funkce $X(t), Y(t)$ jsou spojité na celém I, ale jejich derivace jsou spojité na intervalu I s výjimkou konečně mnoha bodů. Přesněji derivace $X'(t), Y'(t)$ jsou spojité na k intervalech $I_1 = (a, t_1)$, $I_2 = (t_1, t_2)$, …, $I_k = (t_{k-1}, b)$, přičemž v bodech t_i existují pouze jednostranné limity derivace. Podmínku $(X'(t), Y'(t)) \neq (0, 0)$ vyžadujeme na celém I, v bodech „zlomu“ t_i pouze pro jednostranné derivace.

Body, ve kterých spojité funkce $X(t)$ nebo $Y(t)$ nemají spojitou derivaci, nazveme singulární, ostatním bodům, ve kterých oboustranné derivace existují, říkáme regulární.

Poznámky 7.42.

(a) Derivace podle proměnné t, která mívá význam času, se ve fyzice značí tečkou, např. $\dot{X}(t)$.

(b) Podmínku $(*)$ vyžadující $(X'(t), Y'(t)) \neq (0,0)$ lze také ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$(X'(t))^2 + (Y'(t))^2 > 0 \quad \text{nebo} \quad |X'(t)| + |Y'(t)| > 0\,.$$

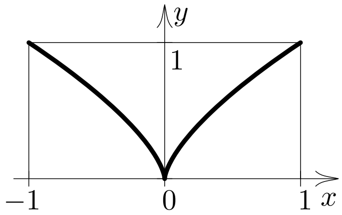
(c) Podmínka $(X'(t), Y'(t)) \neq (0,0)$ je velmi důležitá. Představíme-li si význam parametru t jako času, potom parametrické rovnice křivky mají význam pohybu bodu $[X'(t), Y'(t)]$ po křivce Γ a $(X'(t), Y'(t))$ je vektorem rychlosti tohoto pohybu. Podmínka říká, že tato rychlost nesmí klesnout na nulu. Bez „zastavení“ křivka nemůže mít singulární bod, tj. „zlom“ nebo „špičku“.

Například křivka daná parametricky $x = t^3$, $y = t^2$ pro $t \in \langle -1, 1\rangle$ má v bodě $[0,0]$ pro $t = 0$ zlom, tzv. „bod vratu“. Skutečně, z parametrických rovnic plyne $y = t^2 = \sqrt[3]{x^2}$. Funkce $y = f(x)$ má v nule různé jednostranné derivace, tj. směrnice tečny, viz Obr. 7.17:

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty\,.$$

Bod vratu je umožněn nesplněním podmínky $(*)$:

$$(X'(0), Y'(0)) = (3t^2, 2t)|_{t=0} = (0,0)\,.$$



Obr. 7.17: Bod vratu

7.43. Další pojmy a vlastnosti křivky

(a) V případě omezeného uzavřeného intervalu $I = \langle a, b\rangle$ body $[X(a), Y(a)]$ a $[X(b), Y(b)]$ nazýváme koncovými body. Pokud interval I je neomezený, křivka nemá jeden nebo oba koncové body. Křivka s oběma koncovými body je vždy omezená.

(b) Křivku nazveme uzavřenou, pokud její koncové body splývají, tj. parametrizace křivky splňuje $[X(a), Y(a)] = [X(b), Y(b)]$.

(c) V případě regulární uzavřené křivky požadujeme, aby existovala parametrizace křivky mající nejen stejné koncové body $[X(a), Y(a)] = [X(b), Y(b)]$ ale i stejné jednostranné derivace v koncových bodech, tj. $X'(a+) = X'(b-)\,,\ Y'(a+) = Y'(b-)\,.$

(d) Křivku nazveme jednoduchou, prostou, také neprotínající se, pokud

$$[X(s), Y(s)] \neq [X(t), Y(t)]\,, \quad \forall\, s, t \in I\,,\ s < t$$

v případě uzavřené křivky s výjimkou $s = a$ a $t = b$. Pokud rovnost nastane pro nějaké $a \le s < t \le b$, řekneme, že křivka se protíná v tomto bodě, křivka je protínající se, a bod nazveme dvojnásobný, případně vícenásobný.

(e) Křivku nazveme orientovanou, pokud je dána její orientace, tj. „směr pohybu po křivce“. V tomto případě relaci $\approx$ zúžíme: dvě parametrizace jsou ekvivalentní, pokud existuje rostoucí funkce $\varphi : I_1 \to I_2$ (vyloučíme funkce klesající) taková, že platí $X_1(t) = X_2(\varphi(t))$, $Y_1(t) = Y_2(\varphi(t))$ pro všechna $t \in I_1$.

V tomto případě rozlišujeme parametrizace, které jsou orientované souhlasně – při rostoucím parametru t se bod $[X(t), Y(t)]$ pohybuje podle orientace křivky – a parametrizace orientované opačně, nesouhlasně s orientovanou křivkou.

(f) Pokud množina Γ je omezená, mluvíme o křivce omezené (ohraničené), v opačném případě o křivce neomezené (neohraničené).

(g) Křivku nazveme C^k-hladkou případně nekonečně hladkou, pokud funkce $X(t)$ a $Y(t)$ mají spojité derivace do řádu k, případně spojité derivace všech řádů. Terminologie zde není jednotná, obvykle hladkou křivkou rozumíme křivku, kterou lze parametrizovat funkcemi $X(t), Y(t)$, které mají spojité první derivace.

Příklady 7.44.

(a) Úsečka $x = t$, $y = kt + q$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ je jednoduchou omezenou otevřenou regulární křivkou s koncovými body. Pokud se omezíme na $t \in (0, 1)$ křivka nemá koncové body (lze je však snadno doplnit). V případě $t \in \langle 0, \infty)$ křivka je neomezená a má jen jeden koncový bod, přímka $t \in (-\infty, \infty)$ je neomezená regulární křivka bez koncových bodů.

(b) Podobně grafy funkcí $x^2, x^3, \mathrm{e}^x, \sin x, \cos x, \dots$ na $\mathbb{R}$ jsou jednoduché otevřené regulární neomezené křivky. Grafy těchto funkcí na omezeném uzavřeném intervalu jsou také jednoduché otevřené regulární, ale omezené křivky s koncovými body.

(c) Kružnice $x = r\cos t, y = r\sin t$ pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a elipsa $x = a\cos t, y = b\sin t$ pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a, b > 0)$ jsou regulární uzavřené prosté omezené křivky.

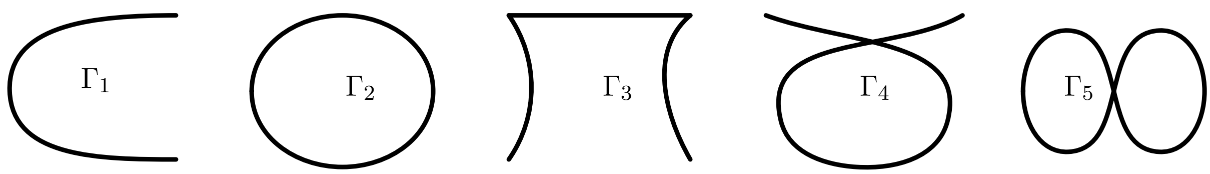
(d) Přidáním třetí konstantní souřadnice $z = Z(t)$ z každé křivky v rovině dostaneme křivku v trojrozměrném prostoru. Pokud $Z(t) = z_0$, křivky leží v rovině a říkáme jim rovinné křivky. Příkladem křivky, která není rovinná, je šroubovice. Parametrizace

$$x = r\cos t, y = r\sin t, z = \frac{h}{2\pi}t\,, \quad t \in \langle 0, 20\pi\rangle \qquad (r, h > 0)$$

určuje 10 „závitů" pravotočivé šroubovice s poloměrem r a stoupáním h na jeden závit.

(e) V případě omezeného otevřeného intervalu I, křivka Γ může být omezená, ale i neomezená. Například pro $x = \operatorname{cotg} t$, $y = 0$, $t \in (0, \pi)$ je Γ celá osa x v rovině. A obráceně, pro $I = (-\infty, \infty)$ křivka může být neomezená, ale i omezená. Například pro $x = \operatorname{arccotg} t, y = 0$ je Γ úsečka v rovině bez svých koncových bodů $[0, 0]$ a $[\pi, 0]$.

(f) Na Obr. 7.18 křivky $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5$ jsou regulární (hladké), Γ_3 je po částech regulární. Křivky $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$ jsou otevřené, křivky Γ_2 a Γ_5 jsou uzavřené. Křivky $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ jsou prosté (neprotínající se), Γ_4 a Γ_5 nejsou prosté, protínají se, mají jeden dvojnásobný bod. Všechny uvedené křivky jsou omezené.



Obr. 7.18: Příklady křivek různých vlastností

Derivace „funkce zadané parametricky“

Předpokládejme, že část křivky Γ zadané parametricky rovnicemi $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $t \in I$ je grafem nějaké funkce $y = f(x)$, $x \in J$, tj. $Y(t) = f(X(t)$, $t \in I$. V tomto případě budeme stručně říkat, že funkce $y = f(x)$ je zadaná parametricky. Jak určit její derivace?

Pomocí pravidla o derivování složené funkce snadno odvodíme derivaci funkce $y = f(x)$. Z rovnosti $Y(t) = f(X(t))$ derivováním podle t dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t)\,, \tag{$*$}$$

odkud za předpokladu $X'(t) \neq 0$ dostáváme

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X(t)) = \frac{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t)}{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t)} \equiv \frac{Y'(t)}{X'(t)}\,.$$

Pro výpočet druhé derivace znovu derivujeme rovnost $(*)$ podle proměnné t, argument (t) u funkcí $X(t), Y(t)$ budeme vynechávat

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X) \cdot \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(X) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X) \cdot \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}. \tag{$**$}$$

Z rovnosti $(**)$ opět díky $X'(t) \neq 0$ můžeme vyjádřit druhou derivaci funkce $f(x)$:

$$f''(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(X) = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^{-2}\left[\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X)\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}\right] \equiv \frac{Y'' - f'(X) \cdot X''}{(X')^2}$$

a po dosazení $f'(X) = Y'/X'$ po úpravě dostáváme

$$f''(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(X(t)) = \frac{Y''(t) \cdot X'(t) - Y'(t) \cdot X''(t)}{(X'(t))^3}\,.$$

Věta 7.45. Nechť $X(t), Y(t)$ jsou funkce třídy $\mathcal{C}^2$ na intervalu I přičemž $X'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$. Nechť $y = f(x)$ je funkce „dána parametricky“ rovnicí $Y(t) = f(X(t))$. Potom její první a druhá derivace jsou dány vztahy

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X(t)) = \frac{Y'(t)}{X'(t)}\,, \qquad f''(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(X(t)) = \frac{Y''(t) \cdot X'(t) - Y'(t) \cdot X''(t)}{(X'(t))^3}\,.$$

Uvedená věta nám pomocí derivací $X(t)$ a $Y(t)$ umožňuje zjistit, zda funkce $f(x)$ zadaná parametricky v okolí daného bodu je rostoucí nebo klesající, konvexní nebo konkávní. První derivace f' je směrnicí tečny. Druhá derivace f'', jak uvidíme dále, je v případě $f'(x) = 0$ rovna křivosti κ, přičemž $1/\kappa$ je poloměr tzv. oskulační kružnice.

Tečna hladké křivky

Vraťme se k obecným křivkám, které nemusí být grafem nějaké funkce. Místo směrnice tečné přímky ke křivce Γ v bodě $[x_0, y_0] = [X(t_0), Y(t_0)]$ tečnu křivky určuje tečný vektor $(u, v) = (X'(t_0), Y'(t_0))$. Z parametrických rovnic přímky $x = x_0 + u(t - t_0)$, $y = y_0 + v(t - t_0)$ procházející bodem $[x_0, y_0]$ a směrovým vektorem (u, v) dostáváme rovnice tečny:

Věta 7.46. Buď $[X(t_0), Y(t_0)]$ regulárním bodem křivky Γ. Potom vektor $(X'(t_0), Y'(t_0))$ je tečný vektor křivky Γ v bodě $[X(t_0), Y(t_0)]$ a rovnice

$$x = X(t_0) + (t - t_0) \cdot X'(t_0)\,, \quad y = Y(t_0) + (t - t_0) \cdot Y'(t_0)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

jsou parametrické rovnice tečny ke křivce Γ v bodě $[X(t_0), Y(t_0)]$.

Pokud $X'(t_0) \neq 0$ a $Y'(t_0) \neq 0$, potom rovnici tečné přímky lze přepsat v úsekovém tvaru

$$\frac{x - X(t_0)}{X'(t_0)} = \frac{y - Y(t_0)}{Y'(t_0)}\,.$$

Vektor $(-Y'(t_0), X'(t_0))$ je normálový vektor křivky Γ v bodě $[X(t_0), Y(t_0)]$.

Poznámky 7.47.

(a) Každý nenulový násobek tečného vektoru je opět tečným vektorem, podobně nenulový násobek normálového vektoru je normálovým vektorem křivky.

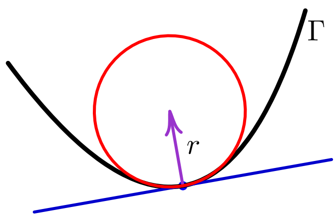
(b) V trojrozměrném prostoru je situace složitější. Tečným vektorem v regulárním bodě je vektor $(X'(t_0), Y'(t_0), Z'(t_0))$, kolmých směrů je však nekonečně mnoho, proto normálový vektor ke křivce v $\mathbb{R}^3$ není definován. Místo toho lze definovat normálovou rovinu.

Křivost křivky

Pomocí druhé derivace lze spočítat také křivost κ rovinné křivky v daném bodě. Křivost křivky je převrácená hodnota poloměru r tzv. oskulační kružnice. Poznamenejme, že všechny kružnice se středem na přímce kolmé k tečně křivky a procházející daným bodem se dané křivky dotýkají. Oskulační kružnice se křivky nejen „dotýká“, ale má s ní stejnou i „druhou derivaci“, tj. nejlépe se ke křivce v okolí bodu „přimyká“.

Uvažujme kružnici o poloměru r. V libovolném bodě této kružnice je její oskulační kružnice totožná s původní kružnicí. Křivost kružnice o poloměru r je $\kappa = \frac{1}{r}$. Křivost přímky je nula, za „poloměr“ její „oskulační kružnice“ prohlásíme nekonečno.

Bez důkazu uvedeme vzorce pro křivost i poloměr oskulační kružnice ke křivce i ke grafu funkce (za předpokladu, že jmenovatel není nula):



Obr. 7.19: Tečna, normála a oskulační kružnice křivky Γ.

Věta 7.48. Nechť $[X(t_0), Y(t_0)]$ je regulárním bodem křivky Γ a funkce $X(t), Y(t)$ mají spojité druhé derivace. Potom její křivost κ a poloměr oskulační kružnice r v tomto bodě je

$$\kappa = \frac{|X'(t_0) \cdot Y''(t_0) - X''(t_0) \cdot Y'(t_0)|}{\left((X'(t_0))^2 + (Y'(t))^2\right)^{3/2}}\,, \qquad r = \frac{1}{\kappa} = \frac{\left((X'(t_0))^2 + (Y'(t))^2\right)^{3/2}}{|X'(t_0) \cdot Y''(t_0) - X''(t_0) \cdot Y'(t_0)|}\,.$$

Uvažujme křivku, která je grafem funkce $y = f(x)$, tj. $X(t) = t$ a $Y(t) = f(t)$. Potom platí $X'(t) = 1$, $X''(t) = 0$ a vzorce pro křivost κ a poloměr oskulační kružnice r v bodě $[x_0, f(x_0)] \equiv [X(t_0), Y(t_0)]$ se zjednoduší na

$$\kappa = \frac{|f''(x_0)|}{\left[1 + (f'(x_0))^2\right]^{3/2}}\,, \qquad r = \frac{1}{\kappa} = \frac{\left[1 + (f'(x_0))^2\right]^{3/2}}{|f''(x_0)|}\,.$$

Poznámky 7.49.

(a) Křivost i poloměr oskulační kružnice jsou čísla kladná, přesněji $r \in (0, \infty\rangle$, $\kappa \in \langle 0, \infty)$, hodnoty $r = \infty$, $\kappa = 0$ nastanou v případě přímky, případně „přímé“ části křivky nebo inflexního bodu.

(b) Velikost výrazu $k = X'(t_0) \cdot Y''(t_0) - X''(t_0) \cdot Y'(t_0)$ závisí na parametrizaci křivky. Pokud je parametrizace „rychlejší“, tj. má-li parametr t význam času, potom bod $[X(t), Y(t)]$ se pohybuje po křivce rychleji, tečný vektor $(X'(t), Y'(t))$ (rychlost) je větší a také výraz k je větší. Proto v definici křivosti je tento výraz vydělen třetí mocninou velikosti tečného vektoru, aby křivost κ nezávisela na velikosti tečného vektoru „rychlosti“ parametrizace.

(c) Hodnota k z předchozího bodu závisí také na orientaci parametrizace křivky. Znaménko k určuje, na kterou stranu se křivka „odchyluje“ od tečny při „pohledu“ podle orientace parametrizace, tj. tečného vektoru.

Pokud $k > 0$, křivka se v okolí tečného bodu odchyluje (je „zakřivena“) vlevo od tečny, pokud $k < 0$, křivka se v okolí tečného bodu odchyluje vpravo od tečny, viz. Obr. 7.20.

Obr. 7.20: Odchylka křivky od tečny

V případě $k = 0$, jde o „přímý“ úsek křivky, přesněji vzdálenost bodu křivky od tečny v okolí tečného bodu se zmenšuje rychleji než druhá mocnina vzdálenosti bodu křivky od tečného bodu, „poloměr r oskulační kružnice“ je nekonečno.

Příklady 7.50.

(a) Ověřme odvozené vzorce tím, že spočítáme křivost kružnice zadané parametricky rovnicemi $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Vzorec pro křivost dává

$$\kappa = \frac{|X'(t) \cdot Y''(t) - X''(t) \cdot Y'(t)|}{\left((X'(t))^2 + (Y'(t))^2\right)^{3/2}} = \frac{|-r\sin t \cdot (-r\sin t) + r\cos t \cdot r\cos t|}{\left((-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2\right)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}\,.$$

(b) Ověřme vzorec ještě pro kružnici zadanou explicitně. Horní část kružnice je grafem funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pro $x \in \langle -r, r\rangle$. Spočítejme derivace pro $x \in (-r, r)$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,, \qquad f''(x) = -\frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}}$$

a po dosazení

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}} = \frac{\frac{r^2}{(r^2-x^2)^{3/2}}}{\left(1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{r^2}{(r^2-x^2)^{3/2}}}{\frac{r^3}{(r^2-x^2)^{3/2}}} = \frac{1}{r}\,.$$

(c) Spočítejme dále křivost paraboly $y = px^2$. Derivace jsou $f'(x) = 2px$ a $f''(x) = 2p$. Křivost pro obecné x a speciálně pro $x = 0$ ve vrcholu je

$$\kappa(x) = \frac{2p}{\left(1 + (2px)^2\right)^{3/2}}\,, \qquad \kappa(0) = 2p\,,$$

poloměr oscilační kružnice v počátku je proto $r = 1/(2p)$.

(d) Spočítejme ještě křivost elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v obecném bodě $[x, y]$ a poloměr oscilační kružnice ve vrcholech elipsy.

Pro elipsu lze vzít parametrické vyjádření $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi)$. Dosazením derivací do vzorce pro křivost dostáváme

$$\kappa = \frac{|X' \cdot Y'' - X'' \cdot Y'|}{\left((X')^2 + (Y')^2\right)^{3/2}} = \frac{|ab\,\sin^2 t + ab\,\cos^2 t|}{[(a\sin t)^2 + (b\cos t)^2]^{3/2}} = \frac{ab}{[(a\sin t)^2 + (b\cos t)^2]^{3/2}}\,.$$

Poloměr oscilační kružnice r_a ve vrcholech $[\pm a, 0]$ dostaneme pro $t = 0, \pi$ a poloměr r_b ve vrcholech $[0, \pm b]$ pro $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$:

$$\kappa_a = \frac{a}{b^2}\,, \quad r_a = \frac{b^2}{a}\,, \qquad \kappa_b = \frac{b}{a^2}\,, \quad r_b = \frac{a^2}{b}\,.$$

(e) Horní část elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ je grafem funkce $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Spočítáme derivace

$$f'(x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,, \qquad f''(x) = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

a dosadíme do vzorce pro křivost:

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} = \frac{a^4\,b}{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{3/2}}\,.$$

Speciálně pro $x = 0$ dostáváme $\kappa = b/a^2$, tj. poloměr oskulační kružnice ve vrcholu $[0, b]$ je také $r = a^2/b$.

(f) Na závěr spočítejme ještě křivost hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ obecně a poloměr oscilační kružnice ve vrcholu $[0, b]$.

Parametrické vyjádření horní části hyperboly je $x = a\,\sinh t$, $y = b\,\cosh t$, $t \in (-\infty, \infty)$, kde hyperbolické funkce, viz kap. 4. Funkce, Definice 4.30, jsou $\sinh t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ a $\cosh t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$. Dosazením derivací $\sinh' t = \cosh t$, $\sinh'' t = \sinh t$, $\cosh' t = \sinh t$, $\cosh'' t = \cosh t$ do vzorce s využitím rovnosti $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ dostáváme

$$\kappa = \frac{|X' \cdot Y'' - X'' \cdot Y'|}{\left((X')^2 + (Y')^2\right)^{3/2}} = \frac{|ab\,\cosh^2 t) - ab\,\sinh^2 t|}{[(a\cosh t)^2 + (b\sinh t^2]^{3/2}} = \frac{ab}{[(a\cosh t)^2 + (b\sinh t)^2]^{3/2}}\,.$$

Pro $x = 0$ dostáváme $\kappa = b/a^2$, ve vrcholu $[0, b]$ poloměr oskulační kružnice je $r = a^2/b$.

Vyjádření horní části hyperboly jako grafu funkce $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x^2}$ vede ke stejnému výsledku.