7B. Výpočet limit – L'Hospitalovo pravidlo

V praxi často potřebujeme určit limitu výrazů, které vzniknou operacemi nebo složením několika spojitých funkcí. Většinou pomohou pravidla typu „limita součtu (násobku, součinu, podílu, složení) je součet (násobek, součin, podíl, složení) jednotlivých limit" a stačí do výrazu dosadit příslušné hodnoty.

Je však potřeba zpozornět, když příslušná funkce má ve zkoumaném bodě nevlastní limitu nebo operace v limitě není definovaná, například dělení nulou. Někdy výpočet limity nedělá problém: například součet nekonečna a konečné hodnoty, součin kladného čísla s nekonečnem, podíl konečného čísla a nekonečna. Situace je jasná, když limity jsou „v souladu", například pro následující typy limit platí: $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $0 \cdot 0 = 0$, $\frac{0}{\infty} = 0$.

Problém nastává, pokud tyto limity „jdou proti sobě", například $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, v těchto případech mluvíme o limitách „neurčitých výrazů".

Výpočet limity neurčitých výrazů ve tvaru podílu lze často určit pomocí derivace užitím tvrzení, které se nazývá L'Hospitalovo[3] [čti lopitalovo] pravidlo.

Věta 7.8. (L'Hospitalovo pravidlo pro limity typu $\frac{0}{0}$) Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají konečné derivace v pravém redukovaném okolí $(x_0, x_0 + \Delta)$ bodu x_0 a nulové limity v bodě x_0 zprava, tj. $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = 0$. Nechť existuje limita podílu derivací

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

konečná nebo nekonečná. Potom existuje i limita podílu funkcí a obě limity se rovnají, tj.

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tvrzení platí pro oboustrannou i jednostrannou limitu zleva v konečném bodě x_0 a také pro limity v nekonečnu, tj. pro $x \to \infty$ nebo $x \to -\infty$.

Důkaz. Naznačme důkaz věty pro případ $x \to x_0+$. Protože obě funkce mají nulové limity zprava v bodě x_0, můžeme jejich hodnoty v x_0 předefinovat tak, že jsou spojité v bodě x_0 zprava, přičemž $f(x_0) = 0$ a $g(x_0) = 0$. Z existence limity podílu derivací plyne, že v jistém pravém redukovaném okolí (x_0, x) podíl je definován, a proto i jmenovatel $g'(x) \neq 0$. Pomocí Věty o střední hodnotě pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (x_0, x) pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_1)(x - x_0)}{g'(c_2)(x - x_0)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

pro vhodné $c_1, c_2 \in (x_0, x)$. Přejdeme-li k limitě $x \to x_0$, obě čísla $c_i \in (x_0, x)$ konvergují k x_0, odkud plyne naše tvrzení. □

L'Hospitalovo pravidlo lze využít i pro limity typu $\frac{\infty}{\infty}$. V tomto případě důkaz není tak průhledný, proto ho vynecháme.

[3] Guillaume de L'Hospital (1661-1704) byl francouzský matematik, který toto pravidlo publikoval ve své učebnici z roku 1696. Byla to první učebnice diferenciálního počtu. Pravidlo převzal z přednášek Johanna Bernoulliho (1667–1748).

Věta 7.9. (L'Hospitalovo pravidlo pro limity typu $\frac{\infty}{\infty}$) Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají konečné derivace v pravém redukovaném okolí bodu x_0 a $f(x)$ a $g(x)$ nekonečnou limitu v bodě x_0 zprava, tj. $\lim_{x\to x_0+} |f(x)| = \lim_{x\to x_0+} |g(x)| = \infty$. Nechť existuje limita podílu derivací

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

konečná nebo nekonečná. Potom existuje i limita podílu funkcí a obě limity se rovnají, tj.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Tvrzení platí pro oboustrannou i jednostrannou limitu zleva v konečném bodě x_0 a také pro limity v nekonečnu, tj. pro $x \to \infty$ nebo $x \to -\infty$.

Poznámky 7.10.

(a) Při výpočtu vždy ověřte typ limity. V případech limity typu $\frac{c}{\infty}$ nebo $\frac{0}{\infty}$ je limita rovna nule a nepotřebujeme využít l'Hospitalovo pravidlo.

(b) Tvrzení říká, že pokud existuje limita vpravo – tj. umíme ji určit – existuje i limita vlevo. Pokud limita vpravo neexistuje, limita vlevo může existovat, viz Příklad 7.11 (d).

(c) Často nevíme, zda existuje limita vpravo nebo ji neumíme určit. Pokud zjistíme, že jde opět o limitu typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, můžeme použít (zatím formálně) pravidlo ještě jednou. Pokud poslední limita podílu druhých derivací existuje, pak existuje i limita podílu prvních derivací a díky tomu existuje i původní limita podílu $f(x)/g(x)$ a tyto limity jsou stejné. Někdy je třeba aplikovat pravidlo vícekrát – vždy však předem musíme ověřit typ limity.

(d) Pravidlo můžeme po úpravě použít i na limity, které nemají tvar podílu, ale které lze na podíl převést, viz následující Příklady 7.11 (e),(f),(g),(h).

Příklady 7.11.

(a) Pomocí l'Hospitalova pravidla můžeme spočítat známé limity $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$ v nule. Zjištěný typ neurčitého výrazu označíme v hranatých závorkách, který bude označovat, že použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = \frac{1}{1} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Poznamenejme, že uvedený výpočet limit nenahrazuje jejich důkaz, byl by to tzv. důkaz kruhem. L'Hospitalovo pravidlo totiž využívá derivaci funkcí $\sin x$, e^x a $\ln x$, které byly odvozeny pomocí dokazovaných limit.

(b) Někdy je potřebné aplikovat l'Hospitalovo pravidlo dvakrát, například při výpočtu limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0+\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

(c) Trojí aplikací l'Hospitalova pravidla spočítáme limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{6x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{6} = \infty.$$

(d) Uveďme případ, kdy při použití l'Hospitalova pravidla limita podílu derivací vpravo neexistuje, ale původní limita vlevo existuje. Výpočet pomocí l'Hospitalova pravidla dává:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\cos x}{1} = 2 + \lim_{x\to\infty} \cos x\,.$$

Limita vpravo neexistuje, protože funkce $\cos x$ například pro $x = k\pi$ nabývá hodnot $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Jednoduchou úpravou však lze spočítat původní limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x}\,\sin x)}{x} = 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 2\,.$$

Také další neurčité výrazy po vhodné úpravě lze spočítat pomocí l'Hospitalova pravidla.

(e) Limita $\lim_{x\to 0+} x \ln x$ je neurčitý výraz typu $[0\cdot(-\infty)]$. Tento součin lze převézt na podíl dvěma způsoby. První při použití l'Hospitalova pravidla výraz dělá složitější

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}} = \lim_{x\to 0+} \left(-x\cdot(\ln x)^2\right)\,,$$

což je opět neurčitý výraz typu $0\cdot\infty$. Druhý způsob vede k výsledku:

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0\,.$$

(f) Limita $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ je neurčitý výraz typu $[1^\infty]$. Jako obvykle, funkci typu $f(x)^{g(x)}$ nejprve převedeme na typ $\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left[\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

a počítáme limitu exponentu. Proměnnou $x\to\infty$ nahradíme proměnnou $t = \frac{1}{x}$ jdoucí k nule zprava a l'Hospitalovo pravidlo jako v příkladě (a) dává:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left[\begin{array}{c} x=\frac{1}{t} \\ t\to 0+ \end{array}\right] = \lim_{t\to 0+} \frac{\ln(1+t)}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1\,.$$

Spočítali jsme tak limitu, která se užívá k zavedení Eulerovy konstanty e

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}\,.$$

(g) Neurčitým výrazem typu $[0^0]$ je limita $\lim_{x\to 0+} x^x$. Po převedení $x^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln x}$ počítáme limitu exponentu:

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0\,,$$

odkud plyne $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$.

(h) Neurčitým výrazem typu $[\infty^0]$ je limita $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$. Opět po převedení $x^{1/x} = \mathrm{e}^{(\ln x)/x}$ počítáme limitu exponentu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

odkud plyne $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

Několik užitečných limit

Porovnejme limity funkcí $\ln x$, x^p a e^x v nule a v nekonečnu v případě, když hodnoty funkcí jdou „proti sobě“, například $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklady 7.12.

(a) V nule mocnina „přemůže“ logaritmus:

$$\lim_{x\to 0+} x\,\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0\,.$$

Stejný výsledek platí pro libovolnou kladnou mocninu x^p $(p > 0)$, například

$$\lim_{x\to 0+} x^2\cdot\ln x = 0\,,\qquad \lim_{x\to 0+} x^3\cdot\ln x = 0\,,\qquad \lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x = 0\,.$$

(b) V nekonečnu je mocnina „silnější“ než logaritmus, ale „slabší“ než exponenciála:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0\,,\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = \infty\,.$$

Oba výsledky platí i pro kladné mocniny x^p: $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x/x^p = 0\,,\ \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x/x^p = \infty\,.$

(c) Exponenciála e^x je „silnější“ než mocnina x také v minus nekonečnu:

$$\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{c} t := -x \\ t\to\infty \end{array}\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-\mathrm{e}^{t}} = 0\,.$$

Výsledek platí i pro obecnou kladnou mocninu: $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x\cdot x^p = 0\,.$

Poznámka o řádu velikosti funkce

Při počítání limit typu $[\frac{0}{0}]$, $[\frac{\infty}{\infty}]$ nebo $[0\cdot\infty]$ je informace o hodnotě limity nula nebo nekonečno nedostatečná. Například v limitě pro $x\to 0$ jsou hodnoty $\sqrt{x}$, x, x^2 v okolí nuly různě „malé“, podobně hodnoty $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^4}$ jsou pro $x\to 0$ různě „velké“. Proto zavedeme pojem řád funkce v okolí bodu, který umožňuje porovnávat „velikosti“ nuly a nekonečna v okolí x_0.

Definice 7.13. Buďte $f(x)$ a $g(x)$ funkce definované v okolí bodu x_0, přičemž $g(x) \neq 0$ pro $x \neq x_0$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je v okolí bodu x_0 řádu malé o funkce $g(x)$, píšeme $f(x) = o(g(x))$, pokud limita podílu obou funkcí existuje a je nulová, tj.

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \text{právě když} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Za „srovnávací“ funkci obvykle volíme mocninu $g(x) = (x - x_0)^k$.
Limita přitom může být oboustranná, jednostranná, v kladném nebo záporném nekonečnu.

Poznámky 7.14.

(a) Vztah $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to x_0$ znamená, že v limitě hodnoty funkce $f(x)$ jsou zanedbatelné vzhledem k hodnotám funkce $g(x)$. Například „užitečné limity“ v Příkladech 7.12 pro $p > 0$ lze zapsat jako $\ln x = o(x^p)$, $x^p = o(\mathrm{e}^x)$ pro $x \to \infty$, $\mathrm{e}^x = o(x^{-p})$ pro $x \to -\infty$.

(b) V tomto označení lze říci, že zbytek $R_n(x)$ Taylorova polynomu $T_n(x)$ je řádu $o((x-x_0)^n)$ a Taylorovy polynomy můžeme psát ve tvaru $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$.

(c) Pro počítání se symbolikou o pro $x \to 0$ platí pravidla:

$$f(x) = o(x^p) \;\Leftrightarrow\; f(x)\cdot x^k = o(x^{p+k}),$$

$$f(x) = o(x^p) \;\wedge\; g(x) = o(x^p) \;\Rightarrow\; f(x)+g(x) = o(x^p),$$

která snadno plynou z rovností

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot x^k}{x^p\cdot x^k}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^p} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p} + \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^p}.$$

Například jestliže $f(x) = o(x^2)$, potom $f(x)\cdot x^3 = o(x^5)$ a $f(x)/x^2 = o(1)$.

(d) Pro úplnost dodejme, že pokud limita podílu $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ je nenulová a konečná, říkáme, že funkce $f(x)$ je řádu „velké O“ $g(x)$ a píšeme $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.

Využití Taylorova polynomu při výpočtu limity

Příklady 7.15. Při počítání limity typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ pro $x \to x_0$ Taylorův polynom se středem v x_0 může dát rychlé řešení. Uveďme tři příklady

(a) Taylorův polynom druhého stupně $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ umožňuje spočítat limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2 - o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-o(1)}{1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Taylorův polynom třetího stupně $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ umožňuje výpočet limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3 - o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}-o(1)}{1} = \frac{1}{6}.$$

(c) Taylorův polynom $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ zjednodušuje výpočet limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2} = 1.$$