

# Laplaceova transformace a stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic

LUDĚK NECHVÁTAL

## Předmluva

Tento text vznikl z důvodu změn v osnovách předmětu Matematika III vyučovaného na FSI VUT v Brně. Kapitoly týkající se numerického řešení ODR byly přesunuty do předmětu Numerické metody II a na jejich místo byly zařazeny kapitoly „Laplaceova transformace“ a „Stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic“.

V základních kurzech matematiky jsme se již setkali se situacemi, kdy jsme nějakým funkcím přiřadili jistým pevně daným způsobem jiné funkce, např. funkci její derivaci. Takovému procesu se často říká transformace, právě z důvodu, že původní funkce se transformuje (mění) na jinou funkci, obvykle tak, aby tato nová funkce byla z pohledu další manipulace výhodnější. Laplaceova transformace patří mezi tzv. integrální transformace (definuje se totiž určitým integrálem, který závisí na parametru) a její počátky spadají již do doby Leonharda Eulera (1707–1783). Teorii poté „znovuoživil“ a rozpracoval francouzský matematik Pierre Simon Laplace (1749–1827). Laplaceova transformace nachází uplatnění v mnoha oborech technické praxe, např. při řešení lineárních dynamických systémů, některých integrálních rovnic, vybraných parciálních diferenciálních rovnic, apod. V našem výkladu bude Laplaceova transformace aplikována na řešení lineárních diferenciálních rovnic  $n$ -tého řádu. Transformace funguje totiž tak, že převádí  $LODR_n$  s konstantními koeficienty na algebraickou rovnici.

Stabilitou v běžném slova smyslu rozumíme schopnost odolat vnějším vlivům (poruchám ve vstupních parametrech). Například, vychýlíme-li visící kyvadlo, po nějakém čase se znovu vrátí do původní polohy, jedná se tedy o stabilní případ. Naopak, vychýlíme-li „stoje“ kyvadlo, do této polohy se nikdy nevrátí ani se této poloze nepřiblíží, hovoříme o nestabilním případě. Jako jiný příklad uveďme let letadlem, kdy z rovnovážného přímočarého pohybu vychýlí letadlo buď povel pilota řídícím plochám nebo porucha v atmosféře. Pokud tato změna výchozích podmínek není velká, lze očekávat, že pohyb letadla se po nějakém čase opět ustálí (zastabilizuje) byť třeba na jiné letové hladině. V podobném duchu budeme chápat stabilitu řešení soustavy ODR1. Příslušné definice a teorii zavedl ruský matematik Aleksandr Michajlovič Ljapunov (1857–1918). Jako zajímavost uveďme, že Ljapunovova práce nebyla po mnoho let od svého vzniku předmětem širšího zájmu, do popředí se dostala až během studené války v padesátých letech minulého století, kdy byla využita k řešení stability naváděcích systémů v letectví.

## LAPLACEOVA TRANSFORMACE

**Definice.** Nechť  $f(x)$  je reálná funkce definována na  $\langle 0, \infty \rangle$ . Potom *Laplaceova transformace* funkce  $f$  je komplexní funkce  $\mathcal{L}\{f(x)\}(s)$  dána vztahem

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) := \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

pro všechna  $s \in \mathbb{C}$ , pro která tento nevlastní integrál konverguje.

*Poznámka.* Obecně nemusí uvedený integrál existovat pro žádná  $s$  nebo existuje pouze pro velmi málo těchto bodů.

**Příklad L.1.** Určete Laplaceovy obrazy funkcí 1 a  $x$ .

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} [e^{-sx}]_0^{\infty} = -\frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} + \frac{1}{s}.$$

Aby byl integrál konvergentní, musí být limita v poslední rovnosti konečná. Napíšeme-li komplexní číslo  $s$  jako  $s = u + iv$ , pak platí  $e^{-sx} = e^{-(u+iv)x} = e^{-ux} e^{-ivx} = e^{-ux} (\cos vx - i \sin vx)$ . Protože funkce  $\cos vx$ ,  $\sin vx$  jsou ohraničené pro libovolné hodnoty  $v$  a  $x$ , o limitě rozhodne člen  $e^{-ux}$ , konkrétně limita bude nulová, je-li  $u > 0$  a nekonečná, je-li  $u < 0$ . Přeznačíme-li  $\operatorname{Re} s = u$  (reálná část komplexního čísla  $s$ ), máme

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{je-li } \operatorname{Re} s > 0.$$

Podobně

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = \int_0^{\infty} x e^{-sx} dx = \left| \begin{array}{cc} x = u & e^{-sx} = v' \\ 1 = u' & -e^{-sx}/s = v \end{array} \right| = -\left[ \frac{x}{s} e^{-sx} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s^2},$$

je-li  $\operatorname{Re} s > 0$ .

*Poznámka.* Matematickou indukci je dále snadné ukázat, že  $\mathcal{L}\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$ .

**Příklad L.2.** Určete Laplaceovy obrazy funkcí  $\cos ax$  a  $\sin ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

S využitím Eulerova vzorce  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  máme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos ax\}(s) + i\mathcal{L}\{\sin ax\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos ax + i \sin ax\}(s) = \mathcal{L}\{e^{iax}\}(s) = \int_0^{\infty} e^{iax} e^{-sx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(ia-s)x} dx = \frac{1}{ia-s} [e^{(ia-s)x}]_0^{\infty} = \frac{1}{ia-s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(ia-s)x} + \frac{1}{s-ia}. \end{aligned}$$

Za předpokladu  $\operatorname{Re} s > 0$  je výše uvedená limita nulová, tedy

$$\mathcal{L}\{\cos ax\}(s) + i\mathcal{L}\{\sin ax\}(s) = \frac{1}{s-ia} = \frac{1}{s-ia} \cdot \frac{s+ia}{s+ia} = \frac{s}{s^2+a^2} + i \frac{a}{s^2+a^2}.$$

Porovnáním reálné a imaginární části máme

$$\mathcal{L}\{\cos ax\}(s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin ax\}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

Postupovat lze také následovně. S využitím integrace per-partes (dvakrát) máme

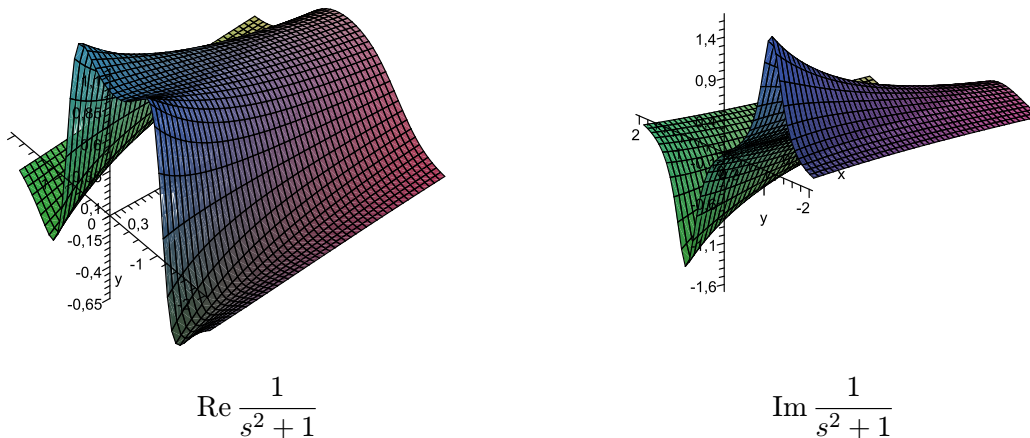
$$\mathcal{L}\{\cos ax\}(s) = \int_0^{\infty} \cos ax e^{-sx} dx = \left| \begin{array}{cc} \cos ax = u' & e^{-sx} = v \\ \frac{1}{a} \sin ax = u & -se^{-sx} = v' \end{array} \right| = \frac{1}{a} [\sin ax e^{-sx}]_0^{\infty}$$

$$+\frac{s}{a} \int_0^\infty \sin ax e^{-sx} dx = \left| \begin{array}{cc} \sin ax = u' & e^{-sx} = v \\ -\frac{1}{a} \cos ax = u & -se^{-sx} = v' \end{array} \right| = -\frac{s}{a^2} [\cos ax e^{-sx}]_0^\infty - \frac{s^2}{a^2} \int_0^\infty \cos ax e^{-sx} dx.$$

Odtud

$$\mathcal{L}\{\cos ax\}(s) \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{s}{a^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos ax\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Analogicky pro funkci  $\sin ax$  (pro představu, graf reálné a imaginární části komplexní funkce  $1/(s^2 + 1)$ , což je Laplaceův obraz funkce  $\sin x$ , je vykreslen na Obrázku 1).



Obrázek 1: Graf reálné a imaginární části Laplaceova obrazu funkce  $\sin x$

**Příklad L.3.** Určete Laplaceův obraz funkce  $e^{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Podle definice je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{ax}\}(s) &= \int_0^\infty e^{ax} e^{-sx} dx = \int_0^\infty e^{(a-s)x} dt = \frac{1}{a-s} \left[ e^{(a-s)x} \right]_0^\infty = \frac{1}{a-s} \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{(a-s)x} - 1) \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{pro } \operatorname{Re} s > a. \end{aligned}$$

*Poznámka.* Předchozí příklad naznačuje, jaké (postačující) podmínky je třeba klást na funkci  $f$ , aby Laplaceův obraz existoval (na dostatečně velké množině). Tyto jsou formulovány v následujícím tvrzení.

**Věta (o existenci Laplaceovy transformace).** *Nechť  $f(x)$  je po částech spojitá na  $\langle 0; \infty \rangle$  (tj. počet bodů nespojitostí je konečný a nespojitost je typu „skok“), přičemž existují kladné konstanty  $K, a$  tak, že  $|f(x)| \leq Ke^{ax}$  na nějakém intervalu  $\langle x_0; \infty \rangle$ ,  $x_0 \geq 0$  (v tomto případě řekneme, že funkce je exponenciálně omezená). Potom  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  je definována pro  $\forall \operatorname{Re} s > a$ . Navíc,  $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(x)\}(s) = 0$ .*

V následující tabulce jsou uvedeny Laplaceovy obrazy vybraných funkcí, jsou to právě ty funkce, které hrály důležitou roli při řešení LODRn s konstantními koeficienty.

$f(x), x \geq 0$	$\mathcal{L}\{f(x)\}(s)$	$f(x), x \geq 0$	$\mathcal{L}\{f(x)\}(s)$
1	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re} s > 0$	$\sin ax$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \operatorname{Re} s > 0$
$x$	$\frac{1}{s^2}, \operatorname{Re} s > 0$	$\cos ax$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \operatorname{Re} s > 0$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re} s > 0$	$e^{ax} \sin bx$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \operatorname{Re} s > a$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}, \operatorname{Re} s > a$	$e^{ax} \cos bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \operatorname{Re} s > a$
$xe^{ax}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{(s-a)^2}, \operatorname{Re} s > a$	$x \sin ax$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \operatorname{Re} s > 0$
$x^n e^{ax}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \operatorname{Re} s > a$	$x \cos ax$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \operatorname{Re} s > 0$

Tabulka 1. Laplaceova transformace vybraných funkcí.

Aby mohla být Laplaceova transformace aplikována, musíme umět provést také zpětný proces, tj. dané komplexní funkci  $F(s)$  přiřadit reálnou funkci  $f(x)$ .

**Definice (inverzní Laplaceova transformace).** Je-li  $F(s)$  komplexní funkce taková, že  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s)$ , potom inverzní Laplaceova transformace funkce  $F(s)$  je reálná funkce  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x)$ , pro kterou platí

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x) = f(x).$$

*Poznámka.* Například,  $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\}(x) = 1$ . Otázkou však zůstává, zda nemůže existovat i jiná funkce  $f(x)$ , která dá Laplaceův obraz  $1/s$ , tj. zda je inverzní Laplaceova transformace jednoznačná. Omezíme-li se na spojité funkce, následující věta říká, že další taková funkce není.

**Věta (Lerchova).** Jsou-li funkce  $f, g$  spojité na  $\langle 0; \infty \rangle$ , přičemž  $\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \mathcal{L}\{g(x)\}(s)$ , pak  $f(x) = g(x)$ .

*Poznámka.* Jinak řečeno, dvě různé spojité funkce nemohou dát stejný Laplaceův obraz. Kdybychom vynechali předpoklad spojitosti, tak tvrzení neplatí, nicméně funkce dávající stejný Laplaceův obraz by se nelišily „příliš mnoho“. Poznamenejme ještě, že inverzní Laplaceovu transformaci je možné vyjádřit vzorcem

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{sx} ds, \quad \forall \operatorname{Re} s > c,$$

přičemž  $c$  je vhodné reálné číslo. Tento vzorec představuje speciální křivkový integrál v komplexní rovině a z praktického hlediska není příliš použitelný (vede obvykle ke složitým výpočtům). Vzhledem k jednoznačnosti transformace tedy využíváme spíše „slovníku“ Laplaceovy transformace, viz Tabulka 1.

Zabývejme se nyní několika důležitými vlastnostmi, které budou využity při řešení LODRn. Vhodnost použití transformace pro lineární úlohy je dána vlastností

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f(x)\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g(x)\}(s) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Jinak řečeno, Laplaceova transformace součtu je součet Laplaceových transformací a Laplaceova transformace násobku je násobek Laplaceovy transformace, hovoříme o *linearitě Laplaceovy transformace*. Tato vlastnost je přímým důsledkem linearit integrálu. Je snadné ověřit, že také inverzní Laplaceova transformace je lineární.

Nechť funkce  $f(x)$  je spojitá na  $(0; \infty)$ , je exponenciálně omezená a její derivace je po částech spojitá a exponenciálně omezená. Potom platí

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(x)\}(s) - f(0).$$

Skutečně,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(x)\}(s) &= \int_0^\infty f'(x) e^{-sx} dx = \left| \begin{array}{cc} f'(x) = u' & e^{-sx} = v \\ f(x) = u & -se^{-sx} = v' \end{array} \right| = [f(x) e^{-sx}]_0^\infty \\ &+ s \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx = s\mathcal{L}\{f(x)\}(s) + \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) e^{-sx} - f(0) = s\mathcal{L}\{f(x)\}(s) - f(0). \end{aligned}$$

Podobně, předpokládáme-li navíc, že  $f$  má spojitě derivace do řádu  $n-1$  a  $f^{(n)}$  je po částech spojitá, přičemž tyto derivace jsou exponenciálně omezené, pak matematickou indukci lze snadno ukázat

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f(x)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Této vlastnosti využíváme při řešení počátečních úloh pro LODRn. Postupujeme přitom tak, že provedeme Laplaceovu transformaci obou stran rovnice, což vede na algebraickou rovnici, ze které vyjádříme  $\mathcal{L}\{y(x)\}(s)$ . Aplikujeme inverzní Laplaceovu transformaci, čímž dostaneme původní řešení.

Naopak, užitím věty o derivaci podle parametru, pro derivaci Laplaceova obrazu platí

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \mathcal{L}\{-xf(x)\}(s) \quad \text{a} \quad \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \mathcal{L}\{(-1)^n x^n f(x)\}(s).$$

**Příklad L.4.** Metodou Laplaceovy transformace vyřešte počáteční úlohu  $y'' + 6y' + 9y = 8x e^{-x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s - 0, \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1. \end{aligned}$$

Laplaceův obraz rovnice tedy je

$$s^2 Y(s) - s + 6(sY(s) - 1) + 9Y(s) = \frac{8}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad Y(s)(s^2 + 6s + 9) = s + 6 + \frac{8}{(s+1)^2}.$$

Odtud, pomocí rozkladu na parciální zlomky, máme

$$\begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\frac{s+6}{s^2+6s+9}}_{Z_1} + \underbrace{\frac{8}{(s+1)^2(s^2+6s+9)}}_{Z_2} = \underbrace{\frac{1}{s+3} + \frac{3}{(s+3)^2}}_{Z_1} \\ &+ \underbrace{\frac{2}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^2} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}}_{Z_2} = \frac{3}{s+3} + \frac{5}{(s+3)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}. \end{aligned}$$

Podle Tabulky 1 (s využitím linearit inverzní Laplaceovy transformace) máme

$$y(x) = 3e^{-3x} + 5xe^{-3x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

V případě Laplaceovy transformace neplatí  $\mathcal{L}\{f(x) \cdot g(x)\}(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(x)\}(s)$ , tj. Laplaceova transformace součinu není součin Laplaceových transformací (např.  $1/s = \mathcal{L}\{1\}(s) = \mathcal{L}\{1 \cdot 1\}(s) \neq 1/s \cdot 1/s$ ). Tuto vlastnost však splňuje tzv. konvoluce funkcí  $(f * g)(x)$ , která je definována

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(t)g(x-t) dt, \quad x \in \langle 0; \infty \rangle.$$

Konvoluce je komutativní, tj.  $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ . Poznamenejme, že postačující podmínkou pro existenci konvoluce  $(f * g)$  na  $\langle 0; \infty \rangle$  je po částech spojitost obou funkcí  $f, g$  na  $\langle 0; \infty \rangle$ . Nechť  $f, g$  jsou navíc exponenciálně omezené. Potom

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\}(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(x)\}(s).$$

Skutečně,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f * g)(x)\}(s) &= \int_0^\infty \left( \int_0^x f(t)g(x-t) dt \right) e^{-sx} dx = \int_0^\infty \left( \int_t^\infty f(t)g(x-t) e^{-sx} dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left( \int_t^\infty g(x-t) e^{-sx} dx \right) dt = \int_0^\infty f(t) \left( \int_0^\infty g(u) e^{-s(u+t)} du \right) dt \\ &= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \cdot \int_0^\infty g(u) e^{-su} du = \mathcal{L}\{f(x)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(x)\}(s). \end{aligned}$$

V předchozím příkladě šlo postupovat také tak, že zlomek  $Z_2$  chápeme jako součin

$$\frac{8}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s^2+6s+9} = \frac{8}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{(s+3)^2}$$

a tedy inverzí je konvoluce

$$8xe^{-x} * xe^{-3x} = 8 \int_0^x te^{-t}(x-t)e^{-3(x-t)} dt = 8xe^{-3x} \int_0^x te^{2t} dt - 8e^{-3x} \int_0^x t^2 e^{2t} dt.$$

Integrací per-partes po úpravě máme

$$8xe^{-x} * xe^{-3x} = 2xe^{-3x} + 2e^{-3x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

Odtud

$$y = \underbrace{e^{-3x} + 3xe^{-3x}}_{Z_1} + \underbrace{2xe^{-3x} + 2e^{-3x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}}_{Z_2} = 3e^{-3x} + 5xe^{-3x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

*Poznámka.* Z teorie LODRn s konstantními koeficienty víme, že každé řešení rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x), \quad a_n \neq 0, \quad (1)$$

lze vyjádřit ve tvaru

$$y = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x) + y_p(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R},$$

kde funkce  $u_1, \dots, u_n$  tvoří fundamentální systém řešení (tj. nějakou  $n$ -tici lineárně nezávislých řešení homogenní LODRn) a  $y_p$  je nějaké řešení nehomogenní LODRn. Z předchozího je zřejmé, že řešení  $y_p$  lze vyjádřit jako konvoluci pravé strany rovnice s určitým řešením homogenní rovnice. Přesněji, platí následující tvrzení.

**Věta.** Nechť  $u(x)$  je řešení homogenní rovnice (1) (tj. rovnice, kde pravou stranu  $b(x)$  nahradíme nulou) vyhovující počátečním podmínkám

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad \dots, \quad u^{(n-2)}(0) = 0, \quad u^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}.$$

Potom platí

$$y_p(x) = (u * b)(x)$$

(zde předpokládáme, že  $b$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle 0; \infty \rangle$  nebo alespoň na  $\langle 0; \ell \rangle$ ,  $\ell > 0$ ).

Poznamenejme ještě, že přímým důsledkem Laplaceovy transformace konvoluce (položíme-li  $g(x) = 1$ ) je vztah

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(x)\}(s).$$

**Příklad L.5.** Metodou Laplaceovy transformace vyřešte počáteční úlohu  $y'' + y = \sin \omega x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

Laplaceův obraz rovnice dává  $s^2 Y(s) - s \cdot 0 - 1 + Y(s) = \omega / (s^2 + \omega^2)$ . Odtud

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{\omega}{(s^2 + 1)(s^2 + \omega^2)}.$$

Uvažujme nejprve případ  $\omega \neq 1$ . Rozkladem druhého sčítance na parciální zlomky dostaneme

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{\omega}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2 - 1 + \omega}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Podle Tabulky 1 máme

$$y(x) = \frac{\omega^2 - 1 + \omega}{\omega^2 - 1} \sin x - \frac{1}{\omega^2 - 1} \sin \omega x$$

Je-li  $\omega = 1$ , potom

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2}.$$

Tento tvar představuje součet dvou parciálních zlomků, avšak druhý sčítanec není obsažen v Tabulce 1. Lze jej však upravit na tvar

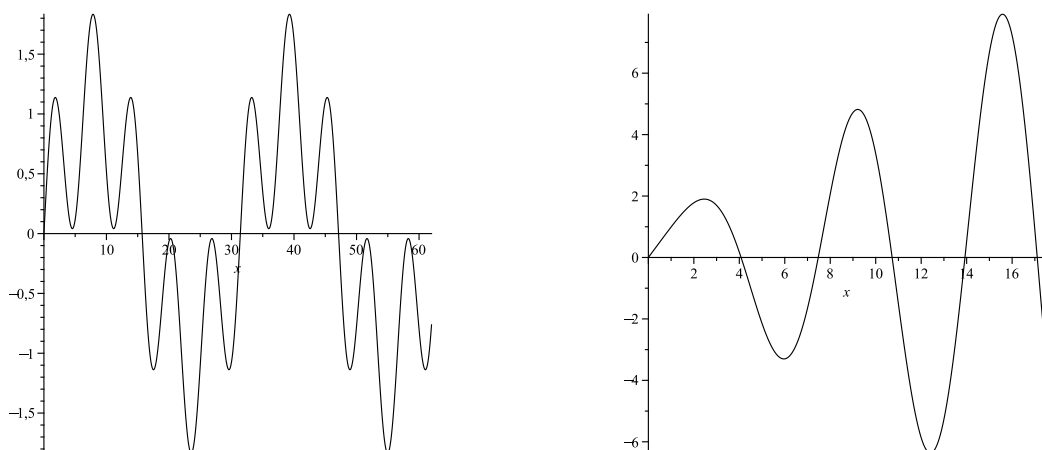
$$Y(s) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}.$$

Odtud již, vzhledem k Tabulce 1, dostáváme

$$y(x) = \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

*Poznámka.* Představuje-li proměnná  $x$  čas, pak předchozí počáteční úlohu lze fyzikálně interpretovat jako harmonický oscilátor bez tlumení, ale s vnější (periodickou) silou úměrnou  $\sin \omega x$ . Na počátku byla výchylka oscilátoru nula (oscilátor prochází rovnovážnou polohou), rychlost byla jedna a oscilátor kmitá s úhlovou frekvencí jedna. Pokud úhlová frekvence působící síly není v rezonanci s vlastními kmity soustavy, tj.  $\omega \neq 1$ , potom se celková amplituda kmitů s ubíhajícím časem nemění, viz Obrázek 2 vlevo (odpovídá  $\omega = 1/5$ ). Naopak, působí-li budící síla na stejné frekvenci jako vlastní kmity oscilátoru, tj.  $\omega = 1$ , celková amplituda kmitů s časem neustále narůstá, viz Obrázek 2 vpravo. Tento stav v praxi není žádoucí, vzniká například, je-li v konstrukci špatně uložena otáčející se hřídel (dochází k rezonanci konstrukce, což může vést k havárii).





Obrázek 2: Závislost výchylky oscilátoru na čase s vnější periodickou silou, která působí na jiné frekvenci než vlastní kmit (vlevo) a která působí na stejné frekvenci jako vlastní kmit (vpravo)

**Příklad L.6.** Metodou Laplaceovy transformace určete obecné řešení rovnice  $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ .

Vzorec pro Laplaceův obraz derivace „očekává“ počáteční podmínky předepsané v bodě nula. Protože tyto nyní nejsou zadány, píšeme obecně  $y(0) = K_1$ ,  $y'(0) = K_2$ , kde  $K_1, K_2$  jsou libovolné konstanty. Potom Laplaceův obraz rovnice je

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sK_1 - K_2 + 3sY(s) - 3K_1 + 2Y(s) &= \frac{1}{s+1} \\ \Rightarrow Y(s)(s^2 + 3s + 2) &= K_1(s+3) + K_2 + \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Odtud, pomocí rozkladu na parciální zlomky,

$$\begin{aligned} Y(s) &= K_1 \frac{s+3}{s^2+3s+2} + K_2 \frac{1}{s^2+3s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} \\ &= K_1 \left( \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) + K_2 \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)} \\ &= (2K_1 + K_2 - 1) \frac{1}{s+1} - (K_1 + K_2 - 1) \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Označíme-li  $C_1 := 2K_1 + K_2 - 1$  a  $C_2 := -K_1 - K_2 + 1$ , potom podle Tabulky 1 máme

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x e^{-x}.$$

### Řešení rovnice s nekonstantními koeficienty typu polynom

Bez hlubšího výkladu naznačme postup řešení tohoto typu rovnice na následujícím příkladě.

**Příklad L.7.** Vyřešte počáteční úlohu  $y'' + xy' - 2y = 4$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$  metodou Laplaceovy transformace.

Laplaceův obraz rovnice je

$$s^2 Y(s) - s(-1) - 0 - \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y'(x)\}(s) - 2Y(s) = \frac{4}{s},$$

tedy

$$s^2 Y(s) + s - \frac{d}{ds}(sY(s) + 1) - 2Y(s) = \frac{4}{s} \Rightarrow s^2 Y(s) + s - Y(s) - sY'(s) - 2Y(s) = \frac{4}{s}$$

a po úpravě

$$Y' + \left(\frac{3}{s} - s\right)Y = 1 - \frac{4}{s^2},$$

což je LODR1. Obecné řešení této rovnice je

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{Ce^{s^2/2}}{s^3}.$$

Protože  $Y(s) \rightarrow 0$  pro  $s \rightarrow \infty$ , je  $C = 0$ . Inverze  $Y(s)$  tedy je  $y(x) = x^2 - 1$ .

### Řešení LODRn s nespojitou pravou stranou

V partiích zabývajících se ODR jsme vždy předpokládali, že všechny funkce vystupující v rovnici (včetně pravých stran u lineárních rovnice) jsou spojité. V úlohách technické praxe je toto však často omezující. Typickým příkladem vedoucím na nespojitost je zatížení nosníku v jednom bodě nebo na jeho části. Zabývejme se tedy nyní situací, kdy pravá strana u LODRn je nespojitá. Zdůrazněme, že v takovém případě nelze hovořit o klasickém řešení ve smyslu zavedeném v příslušných partiích o ODRn.

**Příklad L.8.** Vyřešte počáteční úlohu  $y'' - y' = u_a(x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , kde

$$u_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < a, \\ 1 & \text{pro } a \leq x < \infty. \end{cases}$$

Řešme úlohu nejprve na intervalu  $\langle 0; a \rangle$ . Charakteristická rovnice je  $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$ . Odtud  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ , tedy  $u_1(x) = 1$ ,  $u_2(x) = e^x$  a obecné řešení je  $y = C_1 + C_2 e^x$ . Z počátečních podmínek získáme partikulární řešení  $y = e^x - 1$ . V bodě  $a$  tedy budou funkční hodnota a hodnota derivace  $y(a) = e^a - 1$  a  $y'(a) = e^a$ . Tyto hodnoty poslouží jako počáteční podmínky pro rovnici uvažovanou na druhé části, tj. na intervalu  $(a; \infty)$ . Metodou neurčitých koeficientů řešení  $y_p$  hledáme ve tvaru  $y_p(x) = Ax$ . Dosazením do rovnice máme  $A = -1$  a obecné řešení tedy je  $y = C_1 + C_2 e^x - x$ . Z počátečních podmínek  $y(a) = e^a - 1$ ,  $y'(a) = e^a$  dostaneme  $y = a - 2 + (1 + e^{-a})e^x - x$ . Celkově,

$$y = \begin{cases} e^x - 1 & \text{na } \langle 0; a \rangle, \\ (1 + e^{-a})e^x - x + a - 2 & \text{na } (a; \infty). \end{cases} \quad (2)$$

Vidíme, že takto „napojené“ řešení je spojité, ale jeho první a druhá derivace je nespojitá v bodě  $a$ .

Funkce  $u_a(x)$  z předchozího příkladu se nazývá jednotkový skok v bodě  $a$  (též Heavisideova funkce). Platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_a(x)\}(s) &= \int_0^\infty u_a(x)e^{-sx}dx = \int_a^\infty e^{-sx}dx = |x - a = t| = \int_0^\infty e^{-s(a+t)}dt \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-st}dt = e^{-sa} \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Je-li  $f(x)$  definována na  $\langle 0; \infty \rangle$  potom posunutou funkcí  $f_a(x)$ ,  $a > 0$ , budeme rozumět funkci

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x-a) & \text{pro } x \geq a, \\ 0 & \text{pro } 0 \leq x < a. \end{cases}$$

Platí  $f_a(x) = u_a(x)f(x-a)$  a pro Laplaceovu transformaci máme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_a(x)\}(s) &= \int_0^\infty f_a(x) e^{-sx} dx = \int_a^\infty f(x-a) e^{-sx} dx = |x-a=t| = \int_0^\infty f(t) e^{-s(t+a)} dt \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}\{f(x)\}(s). \end{aligned} \quad (3)$$

**Příklad L.9.** Vyřešte počáteční úlohu  $y'' - y' = u_a(x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  metodou Laplaceovy transformace.

Laplaceův obraz rovnice je  $s^2 Y(s) - 1 - sY(s) = e^{-sa} s^{-1}$ . Odtud

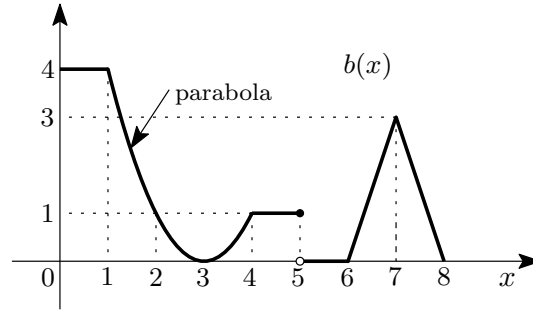
$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - s} + e^{-sa} \frac{1}{s(s^2 - s)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + e^{-sa} \left( -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \right)$$

Inverze dává

$$y = -1 + e^x + u_a(x)(-1 - (x-a) + e^{x-a}),$$

což je jinak zapsané vyjádření (2). Vidíme, že v tomto případě je použití metody Laplaceovy transformace efektivnější než klasické metody.

**Příklad L.10.** Vyřešte počáteční úlohu  $y' + 2y = b(x)$ ,  $y(0) = 0$ , kde funkce  $b(x)$  je znázorněna na Obrázku 3.



Obrázek 3: Nespojité pravá strana rovnice

Pomocí funkce  $u_a(x)$  lze pravou stranu  $b(x)$  napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} b(x) &= 4u_0(x) - 4u_1(x) + (x-3)^2(u_1(x) - u_4(x)) + u_4(x) - u_5(x) \\ &\quad + 3(x-6)(u_6(x) - u_7(x)) - 3(x-8)(u_7(x) - u_8(x)) \\ &= 4u_0(x) - 4u_1(x) + [(x-1) - 2]^2 u_1(x) - [(x-4) + 1]^2 u_4(x) + u_4(x) - u_5(x) \\ &\quad + 3(x-6)u_6(x) - 3[(x-7) + 1]u_7(x) - 3[(x-7) - 1]u_7(x) + 3(x-8)u_8(x) \\ &= 4u_0(x) - 4u_1(x) + (x-1)^2 u_1(x) - 4(x-1)u_1(x) + 4u_1(x) - (x-4)^2 u_4(x) \\ &\quad - 2(x-4)u_4(x) - u_4(x) + u_4(x) - u_5(x) + 3(x-6)u_6(x) - 3(x-7)u_7(x) - 3u_7(x) \\ &\quad - 3(x-7)u_7(x) + 3u_7(x) + 3(x-8)u_8(x) \\ &= 4u_0(x) + (x-1)^2 u_1(x) - 4(x-1)u_1(x) - (x-4)^2 u_4(x) - 2(x-4)u_4(x) - u_5(x) \\ &\quad + 3(x-6)u_6(x) - 6(x-7)u_7(x) + 3(x-8)u_8(x). \end{aligned}$$

Laplaceova transformace rovnice dává

$$sY(s) + 2Y(s) = \frac{4}{s} + e^{-s} \left( \frac{2}{s^3} - \frac{4}{s^2} \right) - e^{-4s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right) - e^{-5s} \frac{1}{s} \\ + e^{-6s} \frac{3}{s^2} - e^{-7s} \frac{6}{s^2} + e^{-8s} \frac{3}{s^2}.$$

Odtud

$$Y(s) = (4 - e^{-5s}) \frac{1}{s(s+2)} + (-4e^{-s} - 2e^{-4s} + 3e^{-6s} - 6e^{-7s} + 3e^{-8s}) \frac{1}{s^2(s+2)} \\ + (2e^{-s} - 2e^{-4s}) \frac{1}{s^3(s+2)}.$$

Rozkladem na parciální zlomky máme

$$Y(s) = (4 - e^{-5s}) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) \\ + (-4e^{-s} - 2e^{-4s} + 3e^{-6s} - 6e^{-7s} + 3e^{-8s}) \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2} \right) \\ + (2e^{-s} - 2e^{-4s}) \frac{1}{8} \left( \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{1}{s+2} \right) \\ = \left( 2 - \frac{1}{2}e^{-5s} + e^{-s} + \frac{1}{2}e^{-4s} - \frac{3}{4}e^{-6s} + \frac{3}{2}e^{-7s} - \frac{3}{4}e^{-8s} \right) \frac{1}{s} \\ + \left( -2e^{-s} - e^{-4s} + \frac{3}{2}e^{-6s} - 3e^{-7s} + \frac{3}{2}e^{-8s} - \frac{1}{2}e^{-s} + \frac{1}{2}e^{-4s} \right) \frac{1}{s^2} + (e^{-s} - e^{-4s}) \frac{1}{s^3} \\ + \left( -2 + \frac{1}{2}e^{-5s} - e^{-s} - \frac{1}{2}e^{-4s} + \frac{3}{4}e^{-6s} - \frac{3}{2}e^{-7s} + \frac{3}{4}e^{-8s} - \frac{1}{4}e^{-s} + \frac{1}{4}e^{-4s} \right) \frac{1}{s+2} \\ = \left( 2 + e^{-s} + \frac{1}{2}e^{-4s} - \frac{1}{2}e^{-5s} - \frac{3}{4}e^{-6s} + \frac{3}{2}e^{-7s} - \frac{3}{4}e^{-8s} \right) \frac{1}{s} \\ + \left( -\frac{5}{2}e^{-s} - \frac{1}{2}e^{-4s} + \frac{3}{2}e^{-6s} - 3e^{-7s} + \frac{3}{2}e^{-8s} \right) \frac{1}{s^2} + (e^{-s} - e^{-4s}) \frac{1}{s^3} \\ + \left( -2 - \frac{5}{4}e^{-s} - \frac{1}{4}e^{-4s} + \frac{1}{2}e^{-5s} + \frac{3}{4}e^{-6s} - \frac{3}{2}e^{-7s} + \frac{3}{4}e^{-8s} \right) \frac{1}{s+2}.$$

Inverze dává

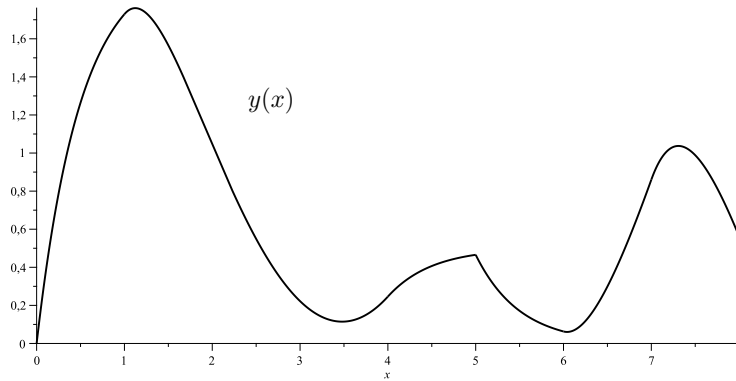
$$y = 2u_0(x) + u_1(x) + \frac{1}{2}u_4(x) - \frac{1}{2}u_5(x) - \frac{3}{4}u_6(x) + \frac{3}{2}u_7(x) - \frac{3}{4}u_8(x) - \frac{5}{2}u_1(x)(x-1) \\ - \frac{1}{2}u_4(x)(x-4) + \frac{3}{2}u_6(x)(x-6) - 3u_7(x)(x-7) + \frac{3}{2}u_8(x)(x-8) + \frac{1}{2}u_1(x)(x-1)^2 \\ - \frac{1}{2}u_4(x)(x-4)^2 - 2e^{-2x} - \frac{5}{4}u_1(x)e^{-2(x-1)} - \frac{1}{4}u_4(x)e^{-2(x-4)} + \frac{1}{2}u_5(x)e^{-2(x-5)} \\ + \frac{3}{4}u_6(x)e^{-2(x-6)} - \frac{3}{2}u_7(x)e^{-2(x-7)} + \frac{3}{4}u_8(x)e^{-2(x-8)}.$$

Po úpravě

$$y = (u_0(x) - u_2(x)) (-2e^{-2x} + 2) + (u_1(x) - u_4(x)) \left( -\left(2 + \frac{5}{4}e^2\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{25}{4} \right) \\ + (u_4(x) - u_5(x)) \left( -\left(\frac{1}{4}e^8 + 2 + \frac{5}{4}e^2\right)e^{-2x} + \frac{1}{2} \right) \\ + (u_5(x) - u_6(x)) \left( -\left(-\frac{1}{2}e^{10} + \frac{1}{4}e^8 + 2 + \frac{5}{4}e^2\right)e^{-2x} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (u_6(x) - u_7(x)) \left( - \left( -\frac{3}{4}e^{12} - \frac{1}{2}e^{10} + \frac{1}{4}e^8 + 2 + \frac{5}{4}e^2 \right) e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{39}{4} \right) \\
& + (u_7(x) - u_8(x)) \left( - \left( \frac{3}{2}e^{14} - \frac{3}{4}e^{12} - \frac{1}{2}e^{10} + \frac{1}{4}e^8 + 2 + \frac{5}{4}e^2 \right) e^{-2x} - \frac{3}{2}x + \frac{51}{4} \right).
\end{aligned}$$

Průběh tohoto řešení je znázorněn na Obrázku 4. Z tohoto obrázku je opět zřejmé, že řešení je spojitě avšak derivace už není spojitá.



Obrázek 4: Průběh řešení z Příkladu L.10.

V technické praxi je třeba také často modelovat situace, kdy pravá strana obsahuje tzv. impulsy (impuls si představme např. jako úder kladivem, kdy na velmi malém časovém intervalu dojde k zatížení o určité velikosti). Tyto impulsy lze matematicky popsat pomocí zvláštní „funkce“ zvané Diracova funkce (též delta funkce) definované

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} - \{0\}, \end{cases}$$

a zároveň splňující

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

*Poznámka.* Všimněme si, že slovo funkce je v uvozovkách, o funkci v klasickém smyslu (tj. o zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ ) se zřejmě nejedná. Požadavek, aby integrál přes reálnou osu byl jedna není až tak nepřírozený. Diracovu funkci si můžeme představit jako limitu posloupnosti

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{pro } x \in \langle 0; 1/n \rangle, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

přičemž pro integrál platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{1/n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Pro Laplaceovu transformaci Diracovy funkce platí

$$\mathcal{L}\{\delta(x)\}(s) = 1.$$

Tuto vlastnost lze opět zdůvodnit pomocí posloupnosti  $\delta_n$ . Platí totiž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{\delta_n(x)\}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \delta_n(x) e^{-sx} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} n e^{-sx} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ -\frac{1}{s} e^{-sx} \right]_0^{1/n}$$

$$= \frac{1}{s} \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-s/n}) = \frac{1}{s} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-s/n}}{1/n} = | \text{l'Hospitalovo prav.} | = \frac{1}{s} \cdot \frac{-e^{-s/n} \cdot \frac{s}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{s} \cdot s = 1.$$

**Příklad L.11.** Určete řešení rovnice  $my'' + ay' + ky = \delta(x)$  ( $m, a, k$  jsou dané kladné konstanty) při počátečních podmínkách  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

Vydělením konstantou  $m$  rovnici přepíšeme na tvar

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = \frac{1}{m} \delta(x), \quad \text{kde } b = \frac{a}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Laplaceův obraz rovnice a řešení potom je

$$s^2 Y(s) + 2bsY(s) + \omega^2 Y(s) = \frac{1}{m} \implies Y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2bs + \omega^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s+b)^2 + \omega^2 - b^2}.$$

Inverzní Laplaceova transformace nyní bude záležet na vztahu mezi  $b$  a  $\omega$ . Je-li  $b < \omega$ , potom

$$y(x) = \frac{1}{m\sqrt{\omega^2 - b^2}} e^{-bx} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} x.$$

Je-li  $b = \omega$ , potom

$$y(x) = \frac{1}{m} x e^{-\omega x}.$$

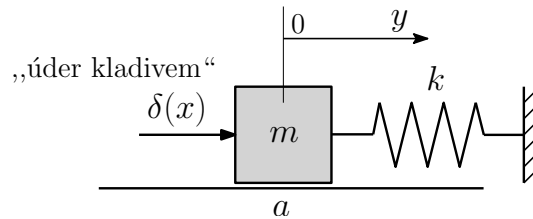
Konečně, je-li  $b > \omega$ , potom

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s+b)^2 + \omega^2 - b^2} = \frac{1}{2m\sqrt{b^2 - \omega^2}} \left( \frac{-1}{s+b+\sqrt{b^2 - \omega^2}} + \frac{1}{s+b-\sqrt{b^2 - \omega^2}} \right).$$

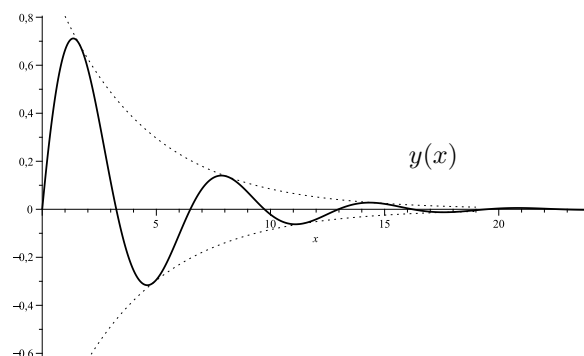
Odtud

$$y(x) = \frac{1}{2m\sqrt{b^2 - \omega^2}} \left( -e^{(-b-\sqrt{b^2 - \omega^2})x} + e^{(-b+\sqrt{b^2 - \omega^2})x} \right).$$

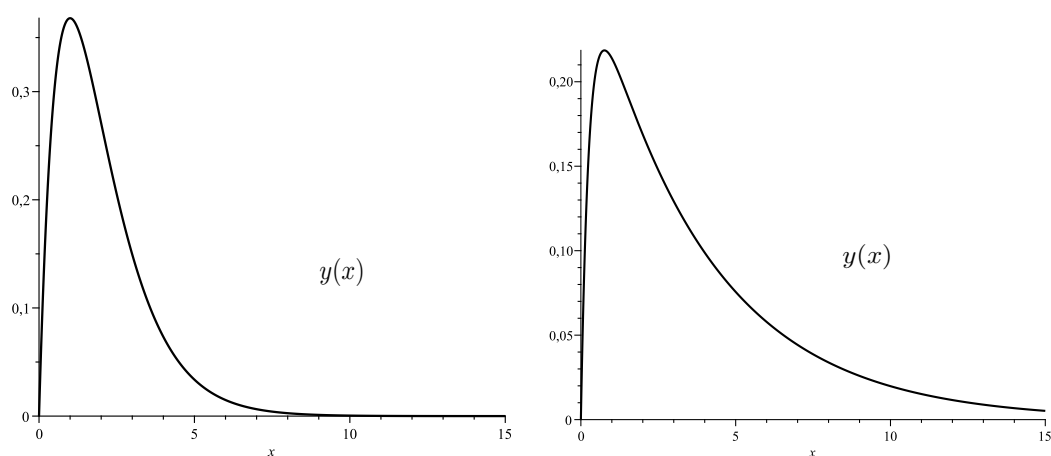
*Poznámka.* Úlohu z předchozího příkladu lze interpretovat jako harmonický oscilátor s tlumením (proměnná  $x$  má význam času), viz Obrázek 5. Z druhého Newtonova zákona máme  $my'' = F$ . Působící sílu  $F$  lze rozepsat jako součet síly pružiny, která je úměrná výchylce, tj.  $-ky$  (konstanta  $k$  se nazývá tuhost pružiny, znaménko mínus je z důvodu působení síly proti pohybu), dále třecí (tlumící) síly, která je úměrná rychlosti, tj.  $-ay'$  (koeficient  $b = \frac{a}{2m}$  se nazývá koeficient tlumení) a konečně vnější síly, která je zde zastoupena impulsem  $\delta(x)$  (jak již bylo zmíněno, technicky si jej představme jako úder kladivem v čase  $x = 0$ , přičemž velikost této síly byla jedna). Oscilátor je z klidového stavu (na počátku měl nulovou výchylku a nulovou rychlost) přinucen k pohybu právě tímto impulsem.



Obrázek 5: Harmonický oscilátor zatížený jednotkovým impulsem.



Obrázek 6: Slabé tlumení, harmonický oscilátor kmitá se stejnou frekvencí, ale s exponenciálně se zmenšující amplitudou.



Obrázek 7: Kritické tlumení (vlevo) a silné tlumení (vpravo), nedochází již k překmitu oscilátoru.

Případ  $b < \omega$  představuje tzv. *slabé tlumení*, je charakterizováno kmitáním, při kterém se amplituda exponenciálně zmenšuje, viz Obrázek 6.

Případ  $b = \omega$  představuje tzv. *kritické tlumení*, jedná se o nejrychlejší utlumení zpět ke klidovému stavu, aniž by došlo ke kmitání oscilátoru, viz Obrázek 7 vlevo.

Případ  $b > \omega$  představuje tzv. *silné tlumení*, opět nedochází k rozkmitání oscilátoru, viz Obrázek 7 vpravo.

Diracova funkce  $\delta(x)$  představuje impuls v bodě  $x = 0$ , impuls v bodě  $a \geq 0$  je modelován funkcí  $\delta_a(x) := \delta(x - a)$  (máme tedy  $\delta_0(x) = \delta(x)$ ) a podle výše uvedené vlastnosti (3) máme  $\mathcal{L}\{\delta_a(x)\}(s) = e^{-sa}$ . Série impulsů v bodech  $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n < \infty$  o velikostech  $c_1, c_2, \dots, c_n$  potom bude popsána pravou stranou ve tvaru  $\sum_{i=1}^n c_i \delta_{a_i}(x)$ .

### Příklady k procvičení

a) Ukažte, že platí vztah  $\mathcal{L}\{f(ax)\}(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f(x)\}\left(\frac{s}{a}\right)$ ,  $a > 0$ , tzv. *pravidlo zvětšení (podobnosti)*.

b) Metodou Laplaceovy transformace řešte následující počáteční úlohy:

i)  $y'' - 16y' + 64y = 6xe^{8x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,

ii)  $y''' + 2y'' + y' = -2xe^{-2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ ,

iii)  $y'' - 3y' + 2y = 2\delta_1(x) + \delta_2(x) + 3(u_1(x) - u_4(x))$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

c) Metodou Laplaceovy transformace najděte obecné řešení následujících rovnic:

- i)  $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x$ ,
- ii)  $y''' + y'' = 1 - 6x^2e^{-x}$ ,
- iii)  $y'' + 4y' + 4 = e^{2x} + 4\delta_0(x) - \delta_1(x) + 2\delta_3(x) - u_1(x)$ .

## STABILITA ŘEŠENÍ SOUSTAV DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Uvažujme počáteční úlohu pro soustavu ODR1 v normálním tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_1(x_0) &= y_1^0, \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_2(x_0) &= y_2^0, \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= y_n^0, \end{aligned}$$

zapsáno vektorově

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0. \end{aligned} \tag{PÚ}$$

Za vstupní data soustavy lze považovat hodnoty  $x_0$ ,  $\mathbf{y}_0$  a funkce vektoru  $\mathbf{f}$ . Zhruba řečeno, stabilním řešením rozumíme takové řešení, že provedeme-li malou změnu v těchto vstupních parametrech, tak nové řešení se od tohoto změni málo. Omezme se pouze na poruchy vzhledem k počátečním hodnotám  $\mathbf{y}_0$  ( $x_0$  a  $\mathbf{f}$  tedy považujeme za pevně dané), tj. budeme zkoumat, jak se změni řešení  $\mathbf{y}(x)$ , změni-li se vektor  $\mathbf{y}_0$ . Předpokládejme přitom, že řešení počáteční úlohy (PÚ) je definováno na intervalu  $\langle x_0; \infty \rangle$  pro libovolný počáteční vektor  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Definice.** Řekneme, že řešení  $\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\xi})$  úlohy (PÚ) pro  $\mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\xi}$  je *stabilní* (v Ljapunovově smyslu), jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každý vektor  $\boldsymbol{\eta}$  splňující  $\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}\| < \delta$  a každé řešení  $\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\eta})$  úlohy (PÚ) pro  $\mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\eta}$  platí  $\|\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{y}(x, \boldsymbol{\xi})\| < \varepsilon$  pro  $\forall x \in \langle x_0; \infty \rangle$ . Pokud navíc  $\|\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{y}(x, \boldsymbol{\xi})\| \rightarrow 0$  pro  $x \rightarrow \infty$ , řekneme, že řešení  $\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\xi})$  je *asymptoticky stabilní*. Řekneme, že řešení  $\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\xi})$  je *nestabilní*, pokud není stabilní.

*Poznámka.* Připomeňme, že symbol  $\|\cdot\|$  zde představuje normu v  $\mathbb{R}^n$ , přičemž není podstatné, kterou konkrétní normu vybereme, můžeme uvažovat např. eukleidovskou normu  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$ .

**Příklad S.1.** Uvažujte rovnici

$$y' = ky \left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{4}$$

na intervalu  $\langle 0; \infty \rangle$ , kde  $k, K$  jsou vhodné kladné konstanty. Vyšetřete stabilitu konstantních řešení  $y^*(x) = 0$  a  $y^{**}(x) = K$ .

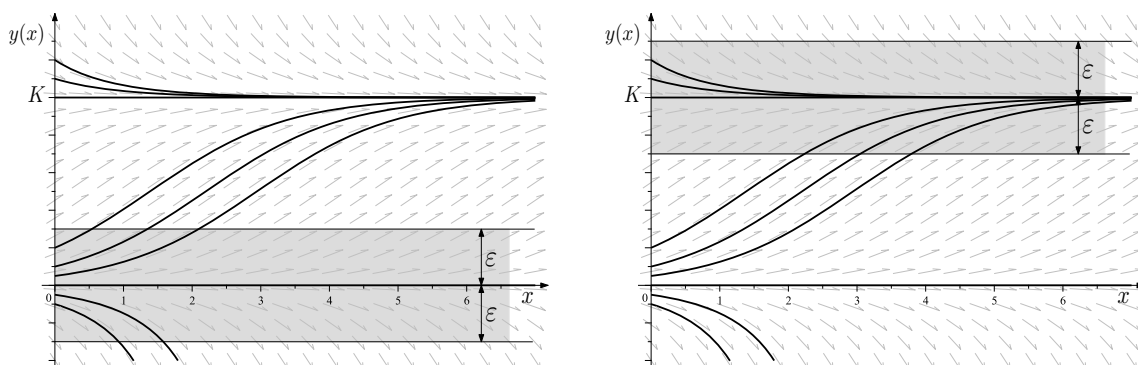
Předně, dosazením vidíme, že funkce  $y^*$  a  $y^{**}$  rovnici skutečně řeší. Dále je snadné spočítat obecné řešení rovnice (jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, přičemž při integraci využijeme rozkladu na parciální zlomky)

$$y = \frac{K}{1 + Ce^{-kx}}$$

a vezmeme-li v úvahu počáteční podmínku  $y(0) = y_0$ , potom  $C = (K - y_0)/y_0$ . Vyšetřujeme-li stabilitu nějakého řešení  $u$ , tak definice říká, že pro dostatečně malou odchylku v počáteční



hodnotě (menší než  $\delta$ ) již každé „odchýlené“ řešení bude ležet v  $\varepsilon$ -pásmu okolo  $u$ . Zabývejme se nejprve stabilitou řešení  $y^*(x) = 0$ . Z průběhu integrálních křivek a směrového pole je zřejmé, že i když počáteční hodnota  $y_0$  bude jakkoliv blízko nule, řešení  $y$  „uteče“ z  $\varepsilon$ -pásmu okolo  $y^*$  a tudíž řešení  $y^*$  nemůže být stabilní, viz Obrázek 8 vlevo. Dále vidíme, že pro  $y_0 < K$  je řešení  $y$  rostoucí, pro  $y_0 > K$  klesající a  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = K$ . Řešení  $y^{**}$  je tedy asymptoticky stabilní, viz Obrázek 8 vpravo.



Obrázek 8: Nestabilita řešení  $y^* = 0$  a asymptotická stabilita řešení  $y^{**} = K$ .

*Poznámka.* Rovnice (4) se nazývá logistická rovnice a její typickou aplikací je růst populace v nějakém prostředí. Konkrétně, interpretujeme-li proměnnou  $x$  jako čas, potom rovnice říká, že rychlost reprodukce populace  $y'$  závisí jednak na existující populaci  $y$  tak na množství zdrojů pro uživení populace. Parametr  $k$  představuje maximální rychlost růstu populace a parametr  $K$  se nazývá nosná kapacita prostředí. Tento model růstu populace poprvé představil Pierre François Verhulst (1804–1849). Uvažovaná konstantní řešení  $y^*$ ,  $y^{**}$ , u nichž vyšetřujeme stabilitu, jsou významná, neboť představují rovnovážný stav (populace neroste ani neklesá), viz definice níže. Řešení  $y^*$  představuje nulovou populaci (v prostředí se žádní jedinci nenacházejí). Pokud tento stav porušíme tím, že vysadíme určitý počet jedinců, nestabilita řešení  $y^*$  znamená, že i když bude vysazený počet jedinců jakkoliv malý, nebude se v průběhu času držet blízko původního stavu ani se nebude snižovat (populace nevymírá), naopak začne růst až do „nasyčení“ dané kapacity prostředí  $K$ . Asymptotická stabilita řešení  $y^{**}$  znamená, že počet jedinců se s rostoucím časem blíží kapacitě prostředí  $K$ . Je-li  $y_0 > K$ , populace klesá (prostředí nestačí živit populaci), je-li  $y_0 < K$ , populace roste.

**Definice.** Konstantní řešení  $\mathbf{y}^e$  (tj. nezávislé na  $x$ ) soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  se nazývá *bodem rovnováhy* (equilibria) nebo *stacionárním bodem*. Platí tedy  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^e)$ .

*Poznámka.* Ve fázovém prostoru představuje trajektorie konstantního řešení bod v  $\mathbb{R}^n$ , proto hovoříme o bodu rovnováhy.

Vyšetřování stability nějakého řešení  $\mathbf{v}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  lze vhodnou substitucí převést na vyšetřování stability bodu rovnováhy, dokonce nulového bodu rovnováhy. Skutečně, položíme  $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{v}$ . Potom  $\mathbf{z}' = \mathbf{y}' - \mathbf{v}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{v})$ . Označíme-li  $\mathbf{g}(x, \mathbf{z}) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{v})$ , potom soustava  $\mathbf{z}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{z})$  má zřejmě bod rovnováhy  $\mathbf{z}^e = \mathbf{0}$ . Definici stability pro nulový bod rovnováhy lze potom vyslovit následovně.

**Definice.** Nechť soustava  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  má bod rovnováhy  $\mathbf{y}_e = \mathbf{0}$ . Řekneme, že  $\mathbf{y}^e$  je stabilní, jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každý vektor  $\mathbf{y}_0$  splňující  $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$  platí  $\|\mathbf{y}(x)\| < \varepsilon$  pro  $\forall x \in \langle x_0; \infty \rangle$ , kde  $\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}(x, \mathbf{y}_0)$  je řešení úlohy (PÚ). Je-li navíc  $\|\mathbf{y}(x)\| \rightarrow 0$  pro  $x \rightarrow \infty$ , řekneme, že  $\mathbf{y}^e$  je asymptoticky stabilní. Řekneme, že  $\mathbf{y}^e$  je nestabilní, pokud není stabilní.

*Poznámka.* Pokud pravá strana soustavy  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  nezávisí na  $x$ , tj.  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , řekneme, že soustava je *autonomní* (používá se též termínu *časově nezávislá*). Typickým příkladem autonomní soustavy je homogenní SLODR1 s konstantními koeficienty  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ . Taková soustava má vždy bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  (hovoříme též o nulovém nebo triviálním řešení). Je-li matice  $\mathbf{A}$  regulární, pak je to jediný bod rovnováhy. Pro tento typ soustav platí následující kritérium.

**Věta.** a) *Nechť všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  mají zápornou reálnou část. Potom nulový bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je asymptoticky stabilní.*

b) *Má-li alespoň jedno vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  kladnou reálnou část, potom nulový bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní.*

c) *Mají-li všechna vlastní čísla nekkladnou reálnou část a všechna vlastní čísla s nulovou reálnou částí jsou jednoduchá, nulový bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní.*

*Poznámka.* Předchozí tvrzení neříká nic o situaci, když vlastní číslo s nulovou reálnou částí má násobnost větší než jedna. V takovém případě může být řešení stabilní i nestabilní, záleží na defektu<sup>1</sup> matice  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ .

Speciálně, pro  $n = 2$  máme:

a) Jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2$  reálná vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  a

- i)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je asymptoticky stabilní a řekneme, že tvoří *přitahující uzel*, viz Obrázek 9 vlevo,
- ii)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní a řekneme, že tvoří *odpuzející uzel*, viz Obrázek 9 vpravo,
- iii)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  (nebo  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ), potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní a řekneme, že tvoří *sedlo*, viz Obrázek 10,
- iv)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$  (nebo  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ ), potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní (v tomto případě pro  $\mathbf{y}^e$  nemáme zvláštní označení),
- v)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$  (nebo  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ), potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní (pro  $\mathbf{y}^e$  opět nemáme zvláštní označení),
- vi)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , potom, je-li defekt matice  $\mathbf{A}$  roven dvěma, tak bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní, je-li defekt matice  $\mathbf{A}$  roven jedné, tak bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní (pro tyto dva případy opět nemáme zvláštní označení).

b) Jsou-li  $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi, b > 0$ , komplexně sdružená vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  a

- i)  $a < 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je asymptoticky stabilní a řekneme, že tvoří *přitahující ohnisko*, viz Obrázek 13 vlevo,
- ii)  $a > 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je nestabilní a řekneme, že tvoří *odpuzející ohnisko*, viz Obrázek 13 vpravo,
- iii)  $a = 0$ , potom bod rovnováhy  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  soustavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  je stabilní, ale nikoliv asymptoticky stabilní, a řekneme, že tvoří *střed*, viz Obrázek 14.

**Příklad S.2.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2, \\ y_2' &= -y_1 - 4y_2. \end{aligned}$$

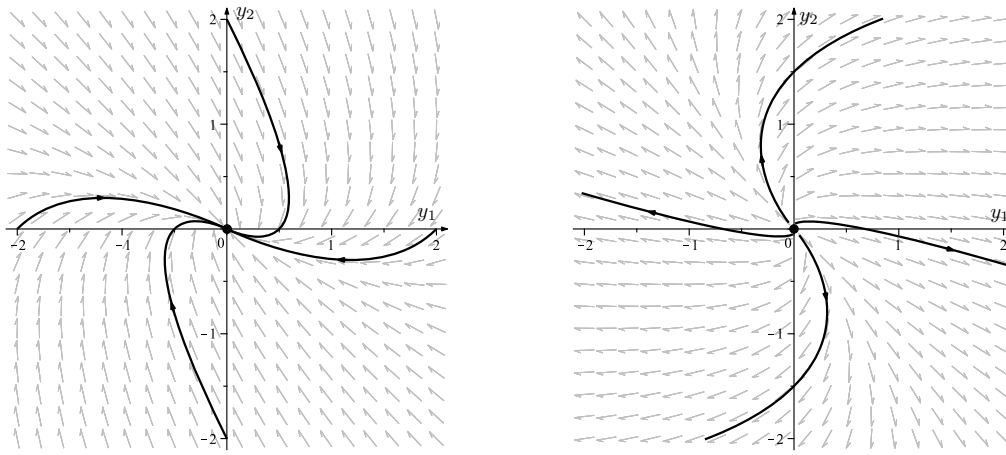
<sup>1</sup>Připomeňme, že defekt čtvercové matice je počet řádků této matice méně její hodnost. Je-li  $\lambda$  vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ , pak defekt matice  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$  vyjadřuje maximální počet lineárně nezávislých vektorů, které můžeme nalézt k vlastnímu číslu  $\lambda$ .

Vlastní čísla matice soustavy  $\mathbf{A}$  splňují rovnici  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$ , kde  $\text{tr}(\mathbf{A})$  značí stopu („trace“) matice  $\mathbf{A}$ , což je součet prvků na hlavní diagonále. V našem případě máme  $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ . Tato rovnice má kořeny  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -3$  a tedy řešení  $\mathbf{y}^e = \mathbf{0}$  je asymptoticky stabilní. Trajektorie řešení (včetně směrového pole) ve fázovém prostoru jsou znázorněny na Obrázku 9 vlevo.

**Příklad S.3.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 2y_2, \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2. \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice soustavy splňují rovnici  $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ , která má kořeny  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Nulové řešení tedy není stabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 9 vpravo.

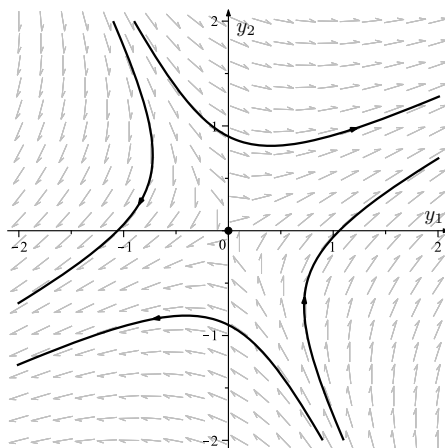


Obrázek 9: Nulový bod rovnováhy tvořící přitahující (vlevo) a odpuzující (vpravo) uzel.

**Příklad S.4.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 2y_2, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2. \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice soustavy jsou v tomto případě  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -2$ , nulový bod rovnováhy tedy není stabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 10.



Obrázek 10: Nulový bod rovnováhy tvořící sedlo.

**Příklad S.5.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

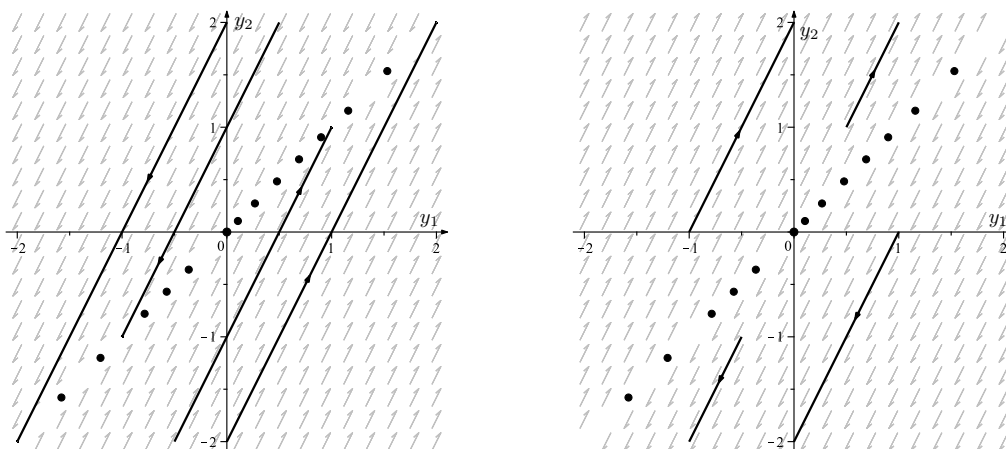
$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_2, \\ y_2' &= 2y_1 - 2y_2.\end{aligned}$$

Vlastní čísla matice soustavy jsou v tomto případě  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$  a tedy, nulový bod rovnováhy je stabilní (ale nikoliv asymptoticky stabilní). Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 11 vlevo. Všimněme si, že nulové řešení zde není jediným bodem rovnováhy, soustava má nekonečně mnoho bodů rovnováhy, tyto leží na přímce o rovnici  $y_2 = y_1$ .

**Příklad S.6.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + y_2, \\ y_2' &= -2y_1 + 2y_2.\end{aligned}$$

Vlastní čísla matice soustavy jsou v tomto případě  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  a tedy, nulový bod rovnováhy je nestabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 11 vpravo. Opět, soustava má nekonečně mnoho bodů rovnováhy ležících na přímce o rovnici  $y_2 = y_1$ .



Obrázek 11: Stabilní a nestabilní nulový bod rovnováhy pro  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ .

**Příklad S.7.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

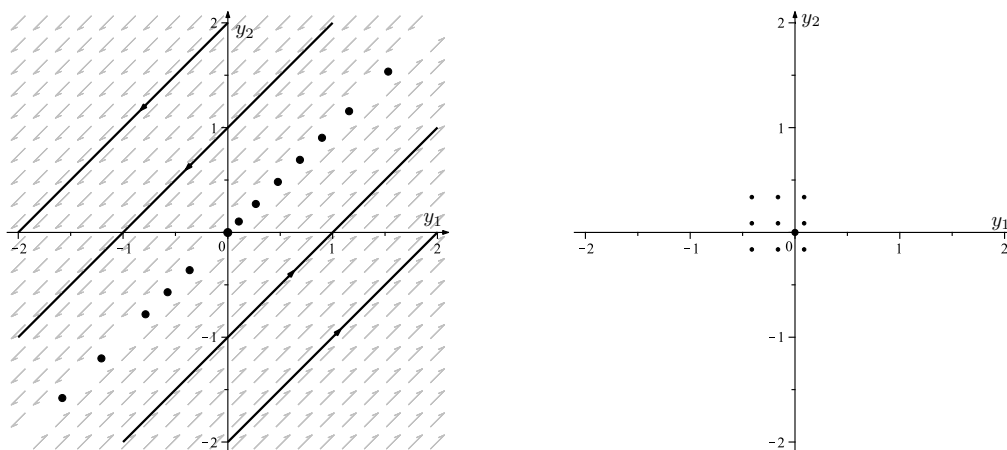
$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_2, \\y_2' &= y_1 - y_2.\end{aligned}$$

Matice soustavy má nyní dvojnásobné nulové vlastní číslo  $\lambda_{1,2} = 0$ , přičemž ale defekt této matice je 1. Nulový bod rovnováhy je tedy nestabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 12 (bodů rovnováhy je opět nekonečně mnoho a leží na přímce o rovnici  $y_2 = y_1$ ).

**Příklad S.8.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= 0, \\y_2' &= 0.\end{aligned}$$

Matice soustavy má nyní dvojnásobné nulové vlastní číslo  $\lambda_{1,2} = 0$  s defektem dva. Nulový bod rovnováhy je tedy stabilní, nikoliv ale asymptoticky stabilní. Protože soustava má zřejmě konstantní řešení, trajektorie tvoří ve fázovém prostoru body. Jinak řečeno, každé řešení je bodem rovnováhy, viz Obrázek 12 vpravo.



Obrázek 12: Pro  $\lambda_{1,2} = 0$  je při defektu matice soustavy jedna nulový bod rovnováhy nestabilní a při defektu matice dva je stabilní, avšak nikoliv asymptoticky stabilní.

**Příklad S.9.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

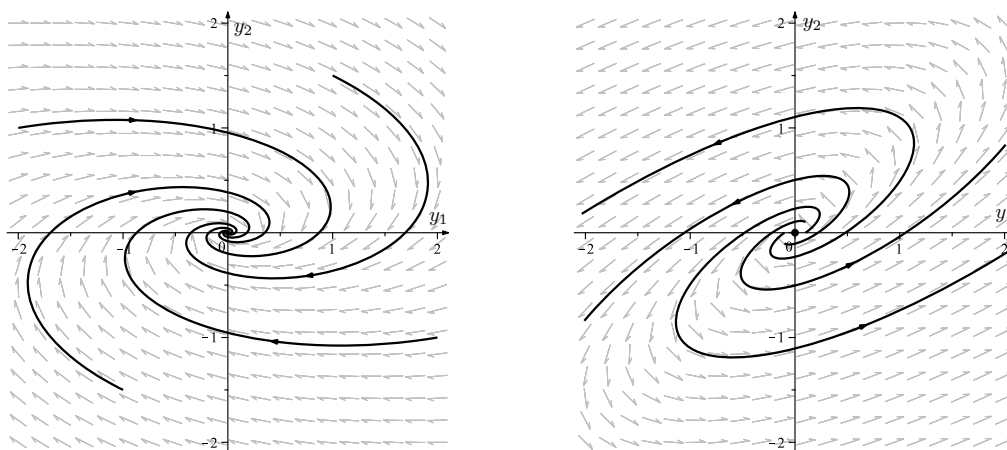
$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + 4y_2, \\y_2' &= -y_1 - y_2.\end{aligned}$$

Vlastní čísla matice soustavy jsou  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ . Protože je reálná část záporná, je nulový bod rovnováhy asymptoticky stabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 13 vlevo.

**Příklad S.10.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= 3y_1 - 4y_2, \\y_2' &= 2y_1 - y_2.\end{aligned}$$

Vlastní čísla matice soustavy jsou  $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ . Protože je reálná část kladná, je nulový bod rovnováhy nestabilní. Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 13 vpravo.

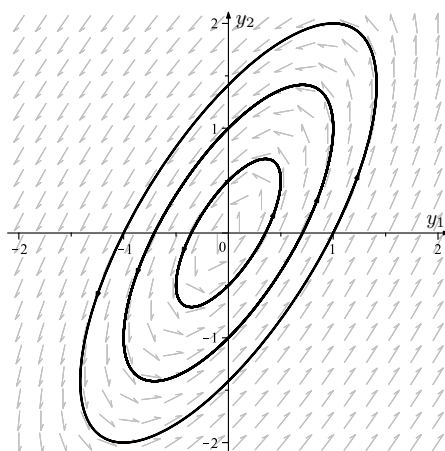


Obrázek 13: Nulový bod rovnováhy tvořící přitahující a odpuzující ohnisko.

**Příklad S.11.** Vyšetřete stabilitu nulového bodu rovnováhy soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 2y_2, \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice soustavy jsou  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$  a tedy nulový bod rovnováhy je stabilní (nikoliv asymptoticky stabilní). Trajektorie řešení jsou znázorněny na Obrázku 14.



Obrázek 14: Nulový bod rovnováhy tvořící střed.

Vyšetřování stability na základě znaménka reálné části vlastních čísel matice soustavy je snadné v případě soustavy dvou rovnic, viz předchozí příklady. V případě soustavy o  $n$  rovnicích vede hledání vlastních čísel na hledání kořenů polynomu stupně  $n$ . Pro  $n = 3$  a  $4$  ještě existují vzorce pro výpočet kořenů (značně komplikované), obecný vzorec pro polynomy stupně 5 a výše již neexistuje. Z tohoto důvodu vyvstává otázka, zda nelze o znaménku reálné části kořene polynomu rozhodnout jinak. Omezíme-li se na záporné reálné části (tj. případ asymptotické stability), odpověď je kladná a je formulována v následujícím kritériu.

**Věta (Routhovo-Hurwitzovo kritérium).** *Bud'  $P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$  polynom a*

$$\mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

*tzv. Hurwitzova matice. Dále označme*

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad H_n = \det(\mathbf{H}_n).$$

*Potom všechny kořeny polynomu  $P_n(\lambda)$  mají zápornou reálnou část, právě když všechny determinanty  $H_1, \dots, H_n$  jsou kladné. Je-li alespoň jeden z těchto determinantů záporný, potom  $P_n(\lambda)$  má kořen s kladnou reálnou částí.*

*Poznámka.* a) Existují i jiná kritéria zápornosti reálných částí kořenů polynomu.

b) Protože každou LODRn s konstantními koeficienty lze převést na SLODR1 s konstantními koeficienty, přičemž charakteristický polynom zůstává stejný, lze na základě kořenů tohoto polynomu vyšetřovat také stabilitu LODRn.

Na závěr poznamenejme, že složitější situace nastane při vyšetřování stability bodů rovnováhy nelineárních soustav. Předně si uvědomme, že použití definice stability není příliš praktické. Je totiž vázáno na znalost řešení počáteční úlohy (PÚ) pro každý počáteční vektor  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  (nebo alespoň pro vektory  $\mathbf{y}_0$  blízké  $\mathbf{y}^e$ ). Spočítat analyticky toto řešení lze pouze v několika málo speciálních případech, např. jsme byli úspěšní v Příkladu S.1 (tam se navíc jednalo pouze o jednu rovnici a ne o soustavu). Podobně jako u lineárních soustav je tedy žádoucí mít k dispozici nějaké kritérium, které by o stabilitě rozhodlo, aniž bychom řešení počítali. Jednou z možností, jak postupovat, je danou soustavu linearizovat, tj. namísto nelineární soustavy vyšetřujeme náhradní lineární soustavu, která je v jistém smyslu blízká původní soustavě. U této nové lineární soustavy již vyšetřujeme stabilitu na základě znaménka reálné části vlastních čísel. Opodstatnění tohoto postupu, stejně jako způsob, kterým lineární soustavu přiřadíme, jde nad rámec našeho výkladu.

## Příklady k procvičení

a) Vyšetřete stabilitu nulového řešení následujících soustav:

i)  $y'_1 = -y_1, y'_2 = 0$  (načrtněte také trajektorie řešení),

ii)  $y'_1 = y_1 + 2y_2 - y_3, y'_2 = 3y_2 - y_3, y'_3 = -2y_3$ .

b) Pomocí Routh-Hurwitzova kritéria rozhodněte o stabilitě nulového bodu rovnováhy soustavy  $y'_1 = -4y_1 + 2y_2 + 5y_3, y'_2 = 6y_1 - y_2 - 6y_3, y'_3 = -8y_1 + 3y_2 + 9y_3$ .