# 1 Úvod do matematické logiky

Logikou v běžném slova smyslu rozumíme myšlenkovou cestu, která vede k určitým závěrům. Logika je také formální věda, která zkoumá způsob vyvozování závěrů. Za zakladatele logiky (tzv. sylogistické logiky) je považován Aristoteles (384–322 př. n. l.). Princip sylogismu lze ukázat na známém příkladu: „Předpoklad 1: Každý člověk je smrtelný. Předpoklad 2: Sokrates je člověk. Závěr: Sokrates je smrtelný."

Matematická logika je vědní disciplína nacházející se na rozhraní mezi logikou a matematikou. Zabývá se zkoumáním, formalizováním a matematizováním zejména těch oblastí logiky, na jejichž základech je postavena matematika. K rozvoji a modernímu pojetí matematické logiky velkou měrou přispěl anglický matematik a filosof George Boole (1815–1864), který si všiml analogie logických operací s klasickými algebraickými operacemi na číslech. Jádrem matematické logiky je tzv. výroková logika (jejím rozšířením je predikátová logika), kde základním pojmem je *výrok*.

*Výrokem* nazveme jakékoliv tvrzení, o kterém má smysl uvažovat, zda je pravdivé či nikoliv.

**Příklad 1.1.** a) „Brno je město" je výrok (pravdivý).

b) „Ve vesmíru existuje mimozemská civilizace" je výrok – výroky jsou i tvrzení, u kterých k danému okamžiku nelze rozhodnout, zda jsou pravdivé (takovým výrokům říkáme hypotézy).

c) „Jihomoravský kraj je v rámci ČR čtvrtým nejlidnatejším krajem a má největší rozlohu" je výrok (nepravdivý, nemá největší rozlohu).

d) „Bude-li zítra pršet, vezme si Karel deštník" je výrok – opět nejsme v okamžiku vyřčení schopni rozhodnout, zda je pravdivý.

e) „Každé přirozené číslo je dělitelné dvěma" je výrok (nepravdivý).

f) „Co děláš?" není výrok – výroky nejsou otázky, rozkazy, jazykově nesmyslné věty.

g) „Číslo $x$ je dělitelné dvěma" není výrok (nevíme, jakou hodnotu má $x$).

*Poznámka.* Výroky a), b), e) jsou tzv. elementární (atomární) výroky (nelze je totiž dále dělit), výrok c) je složený – skládá se z elementárních výroků „JM kraj je čtvrtým nejlidnatějším" a „JM kraj má největší rozlohu". Stejně tak je složený výrok d), obsahuje elementární výroky „bude zítra pršet" a „Karel si vezme deštník".

Složené výroky tvoříme pomocí logických spojek (funktorů), přičemž pravdivostní hodnoty vzniklých výroků se řídí danými pravidly, viz tabulky níže.

| | konjunkce | disjunkce | implikace | ekvivalence |
|---|---|---|---|---|
| zápis | $\wedge$ | $\vee$ | $\Rightarrow$ | $\Leftrightarrow$ |
| význam | a (zároveň) | nebo | jestliže, pak | právě tehdy, když |

Tabulka 1: Logické spojky

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Tabulka 2: Pravdivostní tabulka

*Poznámka.* a) V běžné mluvě se „nebo" používá ve dvou významech, vylučovacím a slučovacím. Např. „koupím tento model auta v červené, nebo modré barvě" (buď…, nebo…) představuje vylučovací význam (dotyčný jistě nehodlá koupit obě dvě). Příkladem slučovacího významu je věta „k určování stáří fosilií se používá metoda radioaktivního thoria nebo uhlíku". Ve slučovacím významu tedy platí alespoň jedna možnost (ale mohou platit obě). Z pravdivostní tabulky je zřejmé, že v případě disjunkce se jedná o slučovací význam.

b) V běžné řeči se implikace „jestliže $A$, pak $B$" používá v případech, kdy jednotlivé výroky $A$, $B$ spolu obsahově nějak souvisí, např. „dojíš-li oběd, dostaneš čokoládu". Toto ve výrokové logice není nutné, např. výrok „jestliže 2 je záporné, potom 3 je dělitelé dvěma" je pravdivý výrok (vyjdeme-li z nepravdy, potom již můžeme „blábolit").

c) Implikace navíc často bývá špatně chápána jako ekvivalence. Např. věta „bude-li zítra pršet, vezme si Karel deštník" by mohla svádět k závěru, že pokud pršet nebude, tak si Karel deštník určitě nevezme. On si ho ale může vzít (třeba proto, aby ho použil jako slunečník). Jiný příklad: výrok „Končí-li přirozené číslo nulou, potom je dělitelné pěti" je pravdivý, ale číslo může být dělitelné pěti, i když nekončí nulou (končí pěti).

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Tabulka 3: Pravdivostní hodnoty negace

*Negace* pravdivého výroku je výrok nepravdivý a naopak (značíme $\neg A$ – non $A$, také $A'$ nebo $\overline{A}$). Zřejmě platí, že pravdivost $\neg(\neg A)$ je stejná jako pravdivost $A$. Jak tvořit negaci? Vždy můžeme použít obratu „Není pravda, že…“.

**Příklad 1.2.** Znegujte výroky z příkladu 1.1a,b). „Není pravda, že Brno je město“, stručně „Brno není město“. „Ve vesmíru neexistují mimozemské civilizace“.

V pravdivostní tabulce jsme namísto konkrétních elementárních výroků psali zastupující symbol $A$, resp. $B$. Tyto symboly nazýváme *výrokové proměnné.*

*Výroková formule* je složený výrok, který vznikne z konečného počtu výrokových proměnných, logických spojek, negací a závorek, např. $[(A \Rightarrow B) \vee C] \Leftrightarrow (A \wedge C)$.

Výrokové formule, které jsou vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výrokových proměnných, se nazývají *tautologie.* Ty, které jsou naopak vždy nepravdivé, se nazývají *kontradikce (spory).*

Řekneme, že dvě výrokové formule $\varphi$ a $\psi$ jsou *logicky ekvivalentní*, jestliže formule $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie.

**Příklad 1.3.** Ukažte, že následující výrokové formule jsou tautologie:
a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ transpozice (obměna) implikace;
b) $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ tranzitivita implikace;
c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$;
d) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$;
e) $A \vee (\neg A)$ zákon vyloučení třetího (tertium non datur);
f) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ zákon simplifikace;
g) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow [(\neg A) \vee (\neg B)]$, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ De Morganovy zákony (Augustus De Morgan 1806–1871, Angličan);
h) $[(A \wedge B) \wedge C] \Leftrightarrow [A \wedge (B \wedge C)]$, $[(A \vee B) \vee C] \Leftrightarrow [A \vee (B \vee C)]$ asociativní zákony;
i) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$, $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ komutativní zákony;
j) $[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$, $[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$ distributivní zákony zákony.

i) zřejmé, a)–g), j) d.ú.

ad h)

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \wedge B$ | $B \wedge C$ | $A \wedge (B \wedge C)$ | $(A \wedge B) \wedge C$ | $\Leftrightarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Počet řádků v tabulce= $2^3$ (variace s opakováním). Druhý asociativní zákon analogicky.

*Poznámka.* Tautologie a)–d) tvoří základ matematických důkazů (viz následující kapitola). Díky vlastnosti b) lze stručně psát $A \Rightarrow B \Rightarrow C$. Vlastnost b) lze navíc pomocí principu matematické indukce (viz následující kapitola) rozšířit na libovolný konečný počet výrokových proměnných $A_1, \dots A_n$, tj. platí

$$[(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \cdots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n)] \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_n),$$

stručně zapsáno $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n$.

Negace tautologie je kontradikce, negace kontradikce je tautologie.

**Příklad 1.4.** Znegujte výroky c), d) z příkladu 1.1. „JM kraj není v rámci ČR čtvrtým nejlidnatějším krajem nebo nemá největší rozlohu“, viz první de Morganův zákon, příklad 1.3g). „Zítra bude pršet a (zároveň) si Karel nevezme deštník“, viz příklad 1.3c).

**Příklad 1.5.** Ukažte, že formule $(A \wedge B) \wedge (\neg A)$ je kontradikce.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $\neg A$ | $(A \wedge B) \wedge (\neg A)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

V příkladu 1.1g) jsme uvedli, že věta „číslo $x$ je dělitelné dvěma" není výrok. Dosadíme-li však za proměnnou $x$ konkrétní hodnotu, pak už dostaneme výrok. Obecně, pokud se nějaké tvrzení (obsahující jednu nebo více proměnných) stane po dosazení konkrétních hodnot za proměnné výrokem, nazýváme takové tvrzení *výrokovou formou*, značíme $V(x)$, resp. $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Dosazení konstant do výrokové formy není jediným způsobem, jak z ní vytvořit výroky. Lze to též pomocí slovních vazeb, které nazýváme kvantifikátory. Stěžejní jsou následující dva kvantifikátory:

a) obecný kvantifikátor – „pro všechna" („pro každé"), značíme $\forall$ (z anglického „all");

b) existenční kvantifikátor – „existuje" (alespoň jeden), značíme $\exists$ (z anglického „exists").

Je-li $V(x)$ výroková forma proměnné $x$, pak pomocí uvedených kvantifikátorů dostáváme kvantifikované výroky:

$\forall x \in M : V(x)$ – čteme „pro každé $x$ z množiny $M$ (viz kap. 3) platí $V(x)$";

$\exists x \in M : V(x)$ – čteme „existuje $x$ z množiny $M$ tak, že platí $V(x)$".

*Poznámka.* Jednoznačnou existenci značíme $\exists!$, kvantifikovaný výrok $\exists! x \in M : V(x)$ potom čteme „existuje právě jedno $x$ z množiny $M$ tak, že platí $V(x)$".

De Morganovy zákony pro kvantifikované výroky:

$\neg(\forall x \in M : V(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg V(x)$;

$\neg(\exists x \in M : V(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg V(x)$.

Podobně, pro výroky se dvěma kvantifikátory platí:

$\neg(\forall x \in M, \exists y \in N : V(x,y)) \Leftrightarrow \exists x \in M, \forall y \in N : \neg V(x,y)$;

$\neg(\exists x \in M, \forall y \in N : V(x,y)) \Leftrightarrow \forall x \in M, \exists y \in N : \neg V(x,y)$.

**Příklad 1.6.** Negujte výrok z příkladu 1.1e). „Existuje alespoň jedno přirozené číslo, které není dělitelné dvěma."

*Poznámka.* Existují další kvantifikátory:

| $V(n)$ | $\neg V(n)$ |
|---|---|
| Alespoň $n\ldots$ je… | Nejvýše $n-1\ldots$ je… |
| Nejvýše $n\ldots$ je… | Alespoň $n+1\ldots$ je… |
| Právě $n\ldots$ je… | Nejvýše $n-1\ldots$ je… nebo alespoň $n+1\ldots$ je… |

# 2 Stavební prvky matematiky

i) *Primitivní pojmy* (nedefinované), např. v eukleidovské geometrii bod, přímka, rovina; v teorii množin např. množina, pojem „patřit do (náležet)"; v Peanově aritmetice číslo nula a funkce následovníka;

ii) *Axiomy* jsou tvrzení, která se nedokazují (považují se za platná), např. „existuje prázdná množina", „každými dvěma body lze vést (právě jednu) přímku". Důležité je, aby systém axiomů byl bezesporný a zároveň se snažíme, aby byl nezávislý, tj. aby některý z axiomů nešel odvodit z axiomů ostatních;

iii) *Definice* jsou zavedení nového pojmu pomocí již známých pojmů, např. „sudým číslem nazveme každé celé číslo, které je dělitelné dvěma", „kružnice je množina všech bodů v rovině, které leží ve stejné vzdálenosti od pevně daného bodu";

iv) *Věty (teorémy)* jsou tvrzení, která se vyvozují z axiomů a již známých (tj. dokázaných) vět prostřednictvím logiky. Nedílnou součástí věty je tedy důkaz. Věty mají obvykle tvar elementárního (nekvantifikovaného nebo kvantifikovaného) výroku, implikace nebo ekvivalence.

*Poznámka.* Nové pojmy (definice) často zavádíme pomocí spojky „jestliže", resp. „právě když". Např. definici sudého čísla bychom mohli formulovat také takto: „Nechť $z$ je celé číslo. Řekneme, že $z$ je sudé, jestliže je dělitelné dvěma". Použili jsme tedy implikaci „je-li $z$ dělitelné dvěma, pak je sudé" (předpokladem „nechť $z$ je celé číslo" jsme vymezili obor čísel, kterých se sudost týká). Neříkáme tedy nic o číslech, která dělitelná dvěma nejsou, nicméně tím, že výrok uvozujeme jako definici, říkáme, že čísla, která nejsou dělitelná dvěma za sudá nepovažujeme. Z tohoto pohledu je korektnější uvést definici jako ekvivalenci, tj. „Nechť $z$ je celé číslo. Řekneme, že $z$ je sudé, právě když dělitelné dvěma". Na druhou stranu, argumentem proti je, že až do chvíle, kdy definujeme nový pojem (v našem příkladu sudé číslo), nemá smysl implikace „je-li $z$ sudé číslo, pak je dělitelné dvěma" (protože sudost teprve definujeme pomocí opačné implikace). V dalším tedy budeme (pokud to bude definice vyžadovat) používat „jestliže".

## Věty ve tvaru elementárního výroku

$V$ – výrok, který se má dokázat.

**Přímý důkaz**
Vyjdeme z pravdivého výroku $A$ (nalezeného mezi axiomy nebo již dokázanými výroky) a pomocí pravdivé implikace (konečného počtu pravdivých implikací) přejdeme k výroku $V$. Využíváme zde tzv. pravidlo odvozování (modus ponens): jestliže platí $A$ a zároveň $A \Rightarrow V$, pak musí platit $V$, viz tabulka.

| $A$ | $V$ | $A \Rightarrow V$ |
|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

**Důkaz sporem**
Předpokládáme, že $V$ neplatí, tj. platí $\neg V$ a pomocí pravdivé implikace (konečného počtu pravdivých implikací) dojdeme k výroku $A$, který je ve sporu se známou skutečností (tj. platilo by $A$ i $\neg A$). Toto nám zaručí, že platí $V$, viz tabulka.

| $\neg V$ | $A$ | $\neg V \Rightarrow A$ | $V$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| **0** | **0** | **1** | **1** |

**Příklad 2.1.** Dokažte, že pro $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (reálná čísla, viz kapitola 6) platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

– přímo: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. □

– sporem: předpokládejme, že $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $a^2 + b^2 < 2ab \;/ -2ab \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab < 0 \Rightarrow 0 \leq (a-b)^2 < 0$, což je spor. Musí tedy platit původní tvrzení. □

## Věty ve tvaru implikace

Jedná se tedy o výrok typu $A \Rightarrow B$ ($A$ – předpoklady věty, $B$ – tvrzení věty, říkáme také, že $A$ je postačující podmínka pro $B$ nebo $B$ je nutná podmínka pro $A$)

**Přímý důkaz**
Předpokládáme, že výrok $A$ je pravdivý a pomocí konečného počtu pravdivých implikací dokážeme $B$ (tj. $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_k \Rightarrow B$).

**Nepřímý důkaz (kontrapozice)**
Využívá tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (viz příklad 1.3a)), které se říká transpozice (obměna) implikace. Dále stejně jako u přímého důkazu, tj. $\neg B \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_k \Rightarrow \neg A$.

**Důkaz implikace sporem**
Využívá tautologie $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ (viz příklad 1.3c)). Předpokládáme platnost negace $\neg(A \Rightarrow B)$, tedy platnost výroku $A \wedge \neg B$ a následně ukážeme jeho nepravdivost tím, že pravdivou implikací (konečným počtem pravdivých implikací) dojdeme k tomu, že pravdivé je nějaké tvrzení $C$ i $\neg C$ (tj. máme spor). Předpoklad pravdivosti $A \wedge \neg B$ je tedy chybný, a proto musí platit původní tvrzení.

**Příklad 2.2.** Dokažte větu „je-li přirozené číslo dělitelné 4, potom je dělitelné 2“.

Máme tedy dokázat: $\forall n \in \mathbb{N} : 4|n \Rightarrow 2|n$.

– přímo: $4|n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 4k \Rightarrow n = 2\overbrace{(2k)}^{\in \mathbb{N}} \Rightarrow 2|n$. □

– nepřímo: $2 \nmid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1$. Pokud $k$ je sudé, pak existuje $\ell \in \mathbb{N}$ tak, že $k = 2\ell$, a tedy $n = 4\ell - 1 \Rightarrow 4 \nmid n$. Pokud je $k$ liché, pak existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $k = 2m - 1$, a tedy $n = 2(2m-1) - 1 = 4m - 3 \Rightarrow 4 \nmid n$. □

– sporem: předpokládejme, že platí $4|n \wedge 2 \nmid n$. Protože $4|n$, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 4k = 2(2k) \Rightarrow 2|n$. Zároveň má ale platit $2 \nmid n$, což je spor. Byla tedy chyba v předpokladu $2 \nmid n$ a platí původní tvrzení. □.

## Věty ve tvaru ekvivalence

Díky tautologii $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ (viz příklad 1.3d)) dokazujeme dvojici implikací.

**Příklad 2.3.** Dokažte větu „Je-li $n$ přirozené, pak $3|n$, právě když $3|n^2$“

„$\Rightarrow$“: přímý důkaz – $3|n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 = 3(3k^2) \Rightarrow 3|n^2$.

„$\Leftarrow$“: nepřímý důkaz – $3 \nmid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : (n = 3k - 1 \vee n = 3k - 2) \Rightarrow [n^2 = (3k-1)^2 = 9k^2 - 6k + 1 = 3(3k^2 - 2k) + 1 \vee n^2 = (3k-2)^2 = 9k^2 - 12k + 4 = 3(3k^2 - 4k) + 4] \Rightarrow 3 \nmid n^2$. $\square$

## Důkaz matematickou indukcí

Touto technikou dokazujeme věty typu „Pro všechna $n$ přirozená (případně pro všechna $n$ přirozená, taková, že $n \geq n_0$) platí $V(n)$“, tj. chceme ukázat platnost $V(n)$ pro $n = 1, 2, \dots$ (resp. pro $n = n_0, n_0 + 1, \dots$). Princip matematické indukce říká (coby axiom), že k důkazu stačí, když provedeme následující dva kroky:

1. krok: Ukážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$ (resp. $n = n_0$) – báze;

2. krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo $n = k \geq 1$ (resp. $n = k \geq n_0$) a ukážeme, že platí pro následující číslo $n = k + 1$. Dokazujeme tedy $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

*Poznámka.* Princip matematické indukce je podobný domino efektu (první kostka domina vyvolá pád druhé, druhá pád třetí, atd.). Když v prvním kroku ukážeme, že platí $V(1)$ (resp. $V(n_0)$), tak podle druhého kroku platí $V(2)$ (resp. $V(n_0+1)$). Když ale platí $V(2)$ (resp. $V(n_0+1)$), tak (opět podle druhého kroku) platí $V(3)$ (resp. $V(n_0+2)$), atd. Jak již bylo řečeno, princip matematické indukce není věta, kterou můžeme dokázat, ale je to axiom. Je to vlastně trochu jinak formulovaný 5-tý Peanův axiom (Giuseppe Peano 1858–1932, Ital), pět Peanových axiomů umožňuje korektně definovat množinu všech přirozených čísel, není to ale jediná možná konstrukce této množiny, viz SLA.

**Příklad 2.4.** Dokažte, $\forall n \geq 5$ platí $2^n > n^2$.

Pro $n = 5$ tvrzení platí, protože $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Potřebujeme ukázat, že pokud platí $2^k > k^2$, tak platí i $2^{k+1} > (k+1)^2$. Pomůžeme si následující nerovností. Pro $k \geq 5$ jistě platí $(k-1)^2 \geq 4^2 > 2$. Odtud $k^2 - 2k + 1 > 2 \ / + k^2 \Rightarrow 2k^2 - 2k - 1 > k^2 \Rightarrow 2k^2 > (k+1)^2$. Tato nerovnost a indukční předpoklad $2^k > k^2$ dávají $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 > (k+1)^2$, tedy $2^{k+1} > (k+1)^2$. $\square$

*Poznámka.* Ne každé tvrzení lze dokázat výše uvedenými metodami, např. některé věty typu „$\exists x \in M : V(x)$“. Zde je potřeba (nějak) nalézt takové $x$ (konstruktivní důkaz) nebo, když to nelze, tak prokázat, že $x$ musí existovat (existenční důkaz). Naopak, pokud potřebujeme prokázat neplatnost tvrzení $\forall x \in M : V(x)$, stačí nalézt $x$, při kterém neplatí $V(x)$. Tomu se potom říká, že jsme ukázali (nalezli) *protipříklad.*