3 Množiny

Množina je primitivní pojem, lze ji popsat jako soubor objektů, které nazýváme prvky množiny (prvky se v množině neopakují a nezáleží na pořadí, v jakém je zapíšeme). Množiny značíme obvykle velkými písmeny a její prvky malými. Zápis $a \in A$ značí, že prvek a patří (náleží) do množiny A. Podobně, $b \notin A$ znamená, že prvek b nepatří do A. Množina je obvykle určena výčtem jejích prvků nebo řečením charakteristické vlastnosti prvků množiny, např. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x : x \text{ je sudé}\}$. U zadání množiny charakteristickou vlastností je třeba dbát jisté obezřetnosti, může totiž dojít k *paradoxu.* Asi nejznámější příklad byl objeven roku 1901 a je znám jako *Rusellův paradox* (Bertrand Russell 1872–1970, Velšan). Uvažujme množinu (označme ji např. M), která obsahuje právě ty množiny, které neobsahují samy sebe (jako svůj prvek). Tj. $M = \{A : A \notin A\}$. Jak je to se samotnou množinou M? Pokud neobsahuje samu sebe, pak $M \in M$. Na druhou stranu, když $M \in M$ (tj. M je prvkem M), pak M obsahuje samu sebe. Podle definice $M \notin M$. Nelze tedy rozhodnout, zda M je nebo není prvkem M. Právě takové důvody vedly na začátku 20. století ke vzniku axiomatické teorie množin, ve které jsou dána přesná pravidla o tom, co množina je a co není. V současnosti je nejpoužívanější *Zermelo–Fraenkelova teorie množin* (Ernst Zermelo 1971–1953, Němec, Adolf Fraenkel 1891–1965, Žid).

Definice 3.1 (množinových operací a souvisejících pojmů)**.** a) *Prázdná množina:* je to množina, která neobsahuje žádné prvky, značíme ji $\emptyset$ nebo $\{\}$ (pozor na $\{\emptyset\}$ – to není prázdná množina, ale jednoprvková množina, jejímž prvkem je prázdná množina);

b) *Podmnožina:* Řekneme, že množina A je podmnožinou množiny B (píšeme $A \subseteq B$, znaku $\subseteq$ se říká *inkluze*), jestliže platí, že každý prvek $a \in A$ je zároveň prvkem množiny B, formálně zapsáno: $A \subseteq B$, jestliže $\forall a : a \in A \Rightarrow a \in B$ (pro libovolnou B vždy platí $\emptyset \subseteq B$ a $B \subseteq B$);

c) *Rovnost množin:* $A = B$, jestliže $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$;

d) *Vlastní podmnožina:* $A \subset B$, jestliže $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$;

e) *Sjednocení množin:* $A \cup B := \{a : a \in A \vee a \in B\}$ (čteme A sjednoceno s B);

f) *Průnik množin:* $A \cap B := \{a : a \in A \wedge a \in B\}$ (čteme A průnik B), množiny A, B nazveme *disjunktní*, právě když $A \cap B = \emptyset$;

g) *Doplněk množiny:* je-li $A \subseteq U$ (universum), pak doplněk množiny A v množině U definujeme jako $A' := \{u \in U : u \notin A\}$;

h) *Rozdíl množin:* $A \setminus B := \{a \in A : a \notin B\}$ (značí se také $A - B$);

i) *Symetrický rozdíl množin:* $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (značí se také $A \div B$ nebo $A \ominus B$);

Příklad 3.2. Mějme množiny $A = \{a, b, c, e, j\}$, $B = \{a, c, e, g\}$. Určete: a) je B podmnožina A?, b) $A \cap B$, c) $A \cup B$, d) $A \setminus B$, e) $A \triangle B$.

ad a) Není, protože $g \notin A$. ad b) $A \cap B = \{a, c, e\}$. ad c) $A \cup B = \{a, b, c, e, g, j\}$. ad d) $A \setminus B = \{b, j\}$. ad e) $B \setminus A = \{g\} \Rightarrow A \triangle B = \{b, g, j\}$.

Definice 3.3 (potenční množiny)**.** Nechť A je libovolná množina. Potom množinu všech podmnožin množiny A nazveme *potenční množinou*, značíme 2^A.

Příklad 3.4. Mějme množinu $A = \{\square, \triangle, \circ\}$. Napište 2^A.

$2^A = \{\emptyset, \{\square\}, \{\triangle\}, \{\circ\}, \{\square, \triangle\}, \{\square, \circ\}, \{\triangle, \circ\}, \{\square, \triangle, \circ\}\}$ – 2^3 prvků.

Věta 3.5. *Vlastnosti (Vennovy diagramy, John Venn 1834–1923, Angličan):*

a) $A \cup B = B \cup A$ *a* $A \cap B = B \cap A$ *(komutativita);*

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *a* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asociativita);*

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *a* $A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivita);*

d) *Je-li* $A, B \subseteq U$*, pak* $(A \cup B)' = (A' \cap B')$ *a* $(A \cap B)' = (A' \cup B')$ *(de Morganovy zákony);*

e) *Je-li* $A \subseteq B$ *a* $B \subseteq C$*, pak* $A \subseteq C$ *(tranzitivita inkluze).*

Důkaz. ad a) Podle definice je $A \cup B$ je množina všech prvků, které leží v A nebo B. $B \cup A$ je ale definováno stejně.

ad b) „$\subseteq$“: Nechť $a \in A \cup (B \cup C)$. To znamená, že $a \in A \vee a \in (B \cup C)$ a tedy $a \in A \vee (a \in A \vee a \in C)$. Protože ale platí asociativita pro logické „nebo“, viz příklad 1.3h), máme $(a \in A \vee a \in B) \vee a \in C$, tj. $a \in (A \cup B) \cup C$. Dokázali jsme tedy inkluzi $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$. Obrácená inkluze se ukáže analogicky, stejně tak asociativita průniku.

ad c) „$\subseteq$“: Nechť $x \in A \cup (B \cap C)$. Podle definice sjednocení $x \in A \vee x \in (B \cap C)$. Pokud $x \in A$, tak je určitě také v $(A \cup B)$ a zároveň v $(A \cup C)$, tj. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Pokud $x \in (B \cap C)$, tak $x \in B \wedge x \in C$. Potom ale musí platit $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$, což znamená, že $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Celkově tedy platí inkluze $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Obrácená inkluze a druhý distributivní zákon se dokáží analogicky.

ad d) „$\subseteq$“: Nechť $a \in (A \cup B)'$, tedy $a \notin (A \cup B)$. To znamená $\neg(a \in A \vee a \in B)$. To ale podle De Morganova zákona pro logické nebo je $\neg(a \in A) \wedge \neg(a \in B)$, tedy $a \notin A \wedge a \notin B \Rightarrow a \in A' \wedge a \in B' \Rightarrow a \in (A' \cap B')$. Obrácená inkluze a druhý De Morganův zákon se ukáží obdobně.

ad e) Nechť $a \in A$ je libovolné. Protože $A \subseteq B$ znamená, že $a \in A \Rightarrow a \in B$, máme $a \in B$. Protože ale také $B \subseteq C$, máme $a \in B \Rightarrow a \in C$, tedy $a \in C$. Díky tranzitivitě implikace (viz příklad 1.7b) tedy platí $a \in A \Rightarrow a \in C$, což znamená, že $A \subseteq C$. $\square$

4 Relace

Relace představuje matematický ekvivalent pojmu vztah.

Definice 4.1 (kartézského součinu)**.** *Kartézský součin* množin A, B (v tomto pořadí) je množina $A \times B := \{[a,b] : a \in A \wedge b \in B\}$ ($[a,b]$ je zde uspořádaná dvojice).

Příklad 4.2. Napište kartézské součiny $A \times B$ a $B \times A$ množin $A = \{a, b\}$, $B = \{\square, \triangle, \circ\}$.

$A \times B = \{[a,\square], [a,\triangle], [a,\circ], [b,\square], [b,\triangle], [b,\circ]\}$.
$B \times A = \{[\square,a], [\square,b], [\triangle,a], [\triangle,b], [\circ,a], [\circ,b]\}$.
Zřejmě tedy $A \times B \neq B \times A$, rovnost platí pouze v případě, kdy $A = B$ nebo alespoň jedna z A, B je prázdná množina.

Definice 4.3 (binární relace)**.** *Binární relací* R mezi množinami A, B nazýváme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$, tj. $R \subseteq A \times B$. Zápis aRb (nebo $[a,b] \in R$) čteme jako „a je v relaci s b“. Naopak $\neg(aRb)$ bude znamenat, že a není v relaci s b (budeme psát stručně $b\overline{R}a$). Je-li $A = B$, hovoříme o relaci na množině A, tj. $R \subseteq A^2$ ($A^2 := A \times A$).

Příklad 4.4. Mějme množiny s relací a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, R představuje vztah „písmeno – pořadí písmene v abecedě“, b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $aRb \Leftrightarrow a < b$, c) A je potenční množina množiny $\{1, 2\}$ a relace R na A představuje vztah „být vlastní podmnožinou“. Vypište R.

ad a) $R = \{[a,1], [b,2], [c,3]\}$;
ad b) $R = \{[1,2], [1,3], \ldots, [2,3], [2,4], \ldots\}$;
ad c) $R = \{[\emptyset, \{1\}], [\emptyset, \{2\}], [\emptyset, \{1,2\}], [\{1\}, \{1,2\}], [\{2\}, \{1,2\}]\}$.

Definice 4.5 (významných relací na množině)**.** Nechť R je relace na neprázdné množině A. Řekneme, že R je:
a) *reflexivní*, jestliže $\forall a \in A : aRa$;
b) *ireflexivní*, jestliže $\forall a \in A : a\overline{R}a$;
c) *symetrická*, jestliže $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$;
d) *antisymetrická*, jestliže $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$;
e) *asymetrická (silně antisymetrická)*, jestliže $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow b\overline{R}a$;
f) *tranzitivní*, jestliže $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Příkladem reflexivity (každý prvek musí být v relaci sám se sebou) je rovnost na $\mathbb{N}$ nebo dělitelnost na $\mathbb{N}$ ($aRb \Leftrightarrow a|b$). Naopak relace „menší než“ na $\mathbb{N}$ není reflexivní ($a < a$ neplatí), je ireflexivní. Příkladem symetrie je např. relace „být sourozencem“. Již zmíněná relace „menší než“ symetrická není (nemůže být zároveň $a < b$ a $b < a$) je to antisymetrická relace. Pozor, antisymetrie není opakem symetrie, relace může být symetrická i antisymetrická zároveň, např. zmíněná rovnost na $\mathbb{N}$. Relace je asymetrická $\Leftrightarrow$ je ireflexivní a antisymetrická. Příkladem asymetrie je opět relace „menší než“, ale např. relace „menší nebo rovno“ asymetrická není (není totiž ireflexivní). Relace „být sourozencem“ je také příkladem tranzitivní relace. Relace, která není tranzitivní je např. „být matkou své dcery“ (pokud Alena je matkou Jany a Jana matkou Heleny, tak Alena není matkou Heleny, je babičkou).

Příklad 4.6. Je dána množina $A = \{a, b, c, d\}$ a relace $R = \{[a,b], [b,a], [b,b], [b,c]\}$. Zjistěte, zda R je reflexivní, symetrická, tranzitivní.

	a	b	c	d
a		$\surd$		
b	$\surd$	$\surd$	$\surd$	
c				
d				

Relace není reflexivní (na diagonále by musely být samé „$\surd$“). Není symetrická, tabulka by musela být symetrická podle diagonály. Není ani tranzitivní (aRb, bRc, ale $a\overline{R}c$).

Definice 4.7. Relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní se nazývá *ekvivalencí*.

Příkladem relace ekvivalence je „obce ČR náležející stejnému kraji“ (obec a je v relaci s obcí $b \Leftrightarrow a$ i b leží ve stejném kraji), rozmyslete si proč.

Definice 4.8 (rozkladu množiny)**.** Nechť $A \neq \emptyset$. *Rozklad množiny* A je množina $\mathscr{A} \subseteq 2^A$, která splňuje:
a) $\emptyset \notin \mathscr{A}$;
b) Pokud $M_1, M_2 \in \mathscr{A}$, pak buď $M_1 = M_2$, nebo $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ (tj. M_1 a M_2 jsou *disjunktní*);
c) $\bigcup_{M \in \mathscr{A}} M = A$.

Prvkům množiny $\mathscr{A}$ se říká *třídy rozkladu.*

Věta 4.9. *1. Nechť R je relace ekvivalence na množině A. Pro každé $a \in A$ definujme množinu $[a] := \{b \in A : aRb\}$ (tzv.* třídu ekvivalence*) a označme $\mathscr{A}_R := \{[a] : a \in A\}$. Pak $\mathscr{A}_R$ je rozklad množiny A.*
2. Nechť $\mathscr{A}$ je rozklad množiny A. Definujme relaci $R_{\mathscr{A}}$ tak, že $aR_{\mathscr{A}}b \Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{A}$ taková, že $a, b \in M$. Potom $R_{\mathscr{A}}$ je relace ekvivalence.

Důkaz. ad 1. Nechť R je relace ekvivalence na A. Ukažme, že množina $\mathscr{A}_R$ je rozklad A (tj. ověřme body a)–c) z definice 4.8).

ad a) Pro každé $[a] \in \mathscr{A}_R$ je $[a] \neq \emptyset$, protože $a \in [a]$.

ad b) Nechť $[a], [b] \in \mathscr{A}_R$ a ukažme, že když $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, pak $[a] = [b]$. Jestliže $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, pak existuje $c \in A$ takové, že $c \in [a]$ a zároveň $c \in [b]$. Podle definice $[a]$, $[b]$ to znamená, že $aRc \wedge bRc$ a tedy také cRb z důvodu symetrie R. Protože R je tranzitivní, platí aRb a také bRa opět z důvodu symetrie. „$[a] \subseteq [b]$:“ Nechť $p \in [a]$. Pak aRp a dále bRa (viz výše). Protože R je tranzitivní, máme bRp, což znamená, že $p \in [b]$. „$\supseteq$:“ Nechť $p \in [b]$. Pak bRp a také aRb (viz výše). Tranzitivita dává aRp, tedy $p \in [a]$. Celkově tedy $[a] = [b]$.

ad c) Platí $\bigcup_{[a] \in \mathscr{A}_R} [a] = A$, protože $a \in [a]$ pro všechna $a \in A$.

ad 2. Nechť $\mathscr{A}$ je rozklad množiny A. Ukažme, že $R_{\mathscr{A}}$ je relace ekvivalence na A.

Reflexivita: Buď $a \in A$ libovolné. Protože $\mathscr{A}$ je rozklad na A, musí existovat $M \in \mathscr{A}$ tak, že $a \in M$ (jinak spor s podmínku c) z definice 4.8). Proto $aR_{\mathscr{A}}a$, tj. $R_{\mathscr{A}}$ je reflexivní.

Symetrie: Nechť $aR_{\mathscr{A}}b$. Podle definice $R_{\mathscr{A}}$ pak existuje $M \in \mathscr{A}$ tak, že $a, b \in M$. To ale znamená, že také $bR_{\mathscr{A}}a$, tedy $R_{\mathscr{A}}$ je symetrická.

Tranzitivita: Nechť $aR_{\mathscr{A}}b$ a $bR_{\mathscr{A}}c$. Podle definice $R_{\mathscr{A}}$ existují množiny M_1, $M_2 \in \mathscr{A}$ tak, že $a, b \in M_1$ a $b, c \in M_2$. Protože $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, musí být $M_1 = M_2$, viz podmínka b) z definice 4.8. Tedy $a, c \in M_1 = M_2$ a podle definice $R_{\mathscr{A}}$ je $aR_{\mathscr{A}}c$. □

Poznámka. Uvedené přiřazení rozkladu $\mathscr{A}_R$ relaci R (resp. přiřazení relace $R_{\mathscr{A}}$ rozkladu $\mathscr{A}$) je jednoznačné v tom smyslu, že máme $R_{\mathscr{A}_R} = R$ (resp. $\mathscr{A}_{R_{\mathscr{A}}} = \mathscr{A}$).

Příklad 4.10. Uvažujte relaci na $\mathbb{N}$, ve které $aRb \Leftrightarrow a + b$ je sudé. Je R ekvivalence? Pokud ano, napište příslušný rozklad.

Řešení: R je reflexivní, protože $\forall a \in \mathbb{N}$ je $a + a = 2a$ je sudé. R je i symetrická, protože když $a + b$ je sudé, tak $b + a$ je také sudé (komutativita sčítání). Ukažme, že R je i tranzitivní, tj. je-li $a + b$ sudé a zároveň $b + c$ sudé, tak nutně $a + c$ bude sudé. Platí vlastnost, že $a + b$ sudé, právě když a i b jsou obě sudá nebo obě lichá (ověřte!!). Případ 1: a i b je sudé. Potom, je-li $b + c$ sudé, tak c je také sudé, protože b je sudé. Protože nyní a i c jsou sudé, tak $a + c$ je také sudé. Případ 2: a i b je liché. Je-li $b + c$ sudé, tak c musí být liché, protože b je liché. Nyní jsou a i c lichá a tedy $a + c$ je sudé. Celkově, R je tranzitivní. Rozklad se potom skládá ze dvou tříd: $[1] = \{1, 3, 5, \dots\}$, $[2] = \{2, 4, 6, \dots\}$.

Definice 4.11 (uspořádání)**.** Relace na A, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní se nazývá *uspořádání* (přesněji *neostré částečné uspořádání).* Značíme $\preceq$.

Tuto relaci chápeme stejně jako v běžném slova smyslu, např. uspořádaní potravin podle ceny – je-li rohlík levnější než chleba, stěží chtít, aby byl chleba levnější než rohlík (antisymetrie). Je-li dále chleba levnější než kilo párků, tak zjevně rohlík je také levnější než kilo párků (tranzitivita). Konečně reflexivita říká, že rohlík stojí méně nebo stejně jako rohlík. Proč hovoříme o částečném uspořádání? V částečném uspořádání nemusí být každé dva prvky porovnatelné! Vezměme například relaci uspořádaní, kde $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ (množiny A, B jsou prvky nějaké množiny). Je-li $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, pak jistě $A \preceq B$, protože $A \subseteq B$. Je-li ale např. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, pak $A \nsubseteq B$ a $B \nsubseteq A$, tj. neplatí $A \preceq B$ ani $B \preceq A$, takové dva prvky tedy nejdou porovnat.

Definice 4.12 (ostrého uspořádání)**.** Relace na A, která je ireflexivní a tranzitivní se nazývá *ostré uspořádání.* Značíme $\prec$.

Příkladem ostrého uspořádání je relace „menší než“ na $\mathbb{N}$, tj. $a \prec b \Leftrightarrow a < b$. V ostrém uspořádání opět nemusí být každé dva prvky porovnatelné. Poznamenejme ještě, že ireflexivita a tranzitivita implikují antisymetrii. Skutečně, předpokládejme, že v relaci jsou „symetrické dvojice“, tj. máme $aRb \wedge bRa$. Pak tranzitivita dává

$aRb \wedge bRa \Rightarrow aRa$, což je ale spor s ireflexivitou. Případ $aRb \wedge bRa$ tedy nastat nemůže, a proto je podmínka v definici antisymetrické relace splněna triviálně (předpoklad $aRb \wedge bRa$ v implikaci je nepravdivý, a tedy implikace $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ je pravdivá, viz pravdivostní tabulka v kapitole 1). Ostré uspořádání je tedy dokonce asymetrická relace (protože je ireflexivní a antisymetrická).

Definice 4.13 (dalších významných relací)**.** a) *Identická relace* je relace na A definovaná $\mathrm{id}_A := \{[a, a] : a \in A\}$;
b) *Univerzální relace* na A je relace $A \times A$;
c) *Úplná relace* na A je relace, ve které platí $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$;
d) *Trichotomická relace* na A je relace, ve které platí $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa \vee a = b$;
e) Relace, která je částečným neostrým uspořádáním a úplná se nazývá *lineární (úplné) uspořádání.*
f) Relace, která je ostrým uspořádáním a navíc trichotomická se nazývá *ostré lineární (úplné) uspořádání.*

Relace identity je nejmenší (ve smyslu nejmenšího počtu prvků) relací ekvivalence. Naopak největší relací ekvivalence je univerzální relace. Vezměme např. $A = \{\Box, \triangle\}$. Potom příkladem trichotomické relace na A je $R = \{[\Box, \Box], [\Box, \triangle]\}$. Tato relace ale není úplná, aby byla úplná, musela by obsahovat ještě dvojici $[\triangle, \triangle]$. Příkladem lineárního uspořádání je relace „$\leq$“ na $\mathbb{N}$ a příkladem ostrého lineárního uspořádání je relace „$<$“ na $\mathbb{N}$. V lineárním uspořádání jsou každé dva prvky porovnatelné.

Poznámka. Je-li $\preceq$ relace uspořádání na množině A, pak relace $\prec$ definovaná $a \prec b$, jestliže $a \preceq b \wedge a \neq b$ (množinově $\prec := \preceq \setminus \mathrm{id}_A$), se nazývá *ostré uspořádání odvozené z uspořádání* $\preceq$. Není tak těžké ověřit, že takto definovaná relace je skutečně ostrým uspořádáním (ve smyslu definice 4.12). Zřejmě platí $a \prec b \Rightarrow a \preceq b$. Podobně, vyjdeme-li z relace ostrého uspořádaní $\prec$ na množině A a definujeme relaci $\preceq$ jako $a \preceq b$, jestliže $a \prec b \vee a = b$ (množinově $\preceq := \prec \cup \mathrm{id}_A$), pak se $\preceq$ nazývá *(částečné) uspořádání odvozené z ostrého uspořádání* $\prec$. Opět lze ověřit, že takto definovaná relace je uspořádáním (ve smyslu definice 4.11).

Definice 4.14 (složení relací)**.** Nechť $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$. *Složení relací* R a S (v tomto pořadí) je relace $S \circ R \subseteq A \times C$ definovaná $S \circ R := \{[a, c] \in A \times C : \exists b \in B \text{ tak, že } aRb \wedge bSc\}$ (čteme „R složeno s S“ nebo „S po R“).

Příklad 4.15. Uvažujme relace
$R = \{[\text{Jan}, \text{Petr}], [\text{Pavel}, \text{Roman}]\}$ – relace otec–syn,
$S = \{[\text{Petr}, \text{Jana}], [\text{Petr}, \text{Hana}], [\text{Roman}, \text{Lucie}]\}$ – relace bratr–sestra.
Napište $S \circ R$ a interpretujte tuto relaci.

Řešení: $S \circ R = \{[\text{Jan}, \text{Jana}], [\text{Jan}, \text{Hana}], [\text{Pavel}, \text{Lucie}]\}$ – relace otec–dcera.

Definice 4.16 (inverzní relace)**.** Nechť R je relace mezi A a B. *Inverzní relací* k R nazveme relaci mezi množinami B a A (značíme R^{-1}), jestliže $\forall a \in A, \forall b \in B : aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$.

Příklad 4.17. $A = \{Marek, Norbert, Ota\}$, $B = \{25, 50, 38\}$, $R = \{[Marek, 52], [Ota, 25]\}$. Napište R^{-1}.
Řešení: $R^{-1} = \{[52, Marek], [25, Ota]\}$.

Poznámka. Pro inverzi složené relace platí $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. Skutečně, je-li $c(S \circ R)^{-1}a$, pak $aS \circ Rc$, tj. podle definice složené relace existuje $b \in B$ takové, že $aRb \wedge bSc$. To ale znamená, že $cS^{-1}b \wedge bR^{-1}a$, neboli $cR^{-1} \circ S^{-1}a$.

Poznámka. Vedle binární relace je možné uvažovat obecněji n-nární relaci ($n = 1, 2, 3, \dots$) jakožto libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.