1. Rozhodněte, zda jde o výrok a u výroků určete pravdivostní hodnotu:
   (a) $3 \cdot 3 = 10$.
   (b) Praha je hlavní město České republiky.
   (c) Pozor, schody jsou mokré!
   (d) $\frac{0}{0} = 0$.
   (e) Červená barva je nejhezčí.

2. Mějme výroky A a B. Sestavte tabulku pravdivostních hodnot pro negaci výroku B, a dále pro konjunkci, disjunkci, implikaci a ekvivalenci výroků A a B.

3. Určete pravdivostní hodnotu výroku V.
   (a) V: Je-li číslo 10 je sudé, pak číslo 2 dělí číslo 11.
   (b) V: $\big((2 \cdot 3 = 6) \vee (3 \cdot 4 = 14)\big) \Rightarrow (2 < 1)$;
   (c) V: $\big((1 < 2) \wedge (2 \neq 2)\big) \Rightarrow (3 \cdot 5 = 16)$.
   (d) V: $\big(5 \cdot 2 = 9 \vee 2 \cdot 3 = 6\big) \Rightarrow 7 \leq 8$.

4. Uveďte ekvivalentní výrok k dané negaci a pomocí tabulky pravdivostních hodnot tuto ekvivalenci ověřte, tj. dokažte, že vámi vytvořená ekvivalence je tautologií.
   (a) $\big(\neg(A \wedge B)\big) \Leftrightarrow \dots$
   (b) $\big(\neg(A \vee B)\big) \Leftrightarrow \dots$
   (c) $\big(\neg(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow \dots$
   (d) $\big(\neg(A \Leftrightarrow B)\big) \Leftrightarrow \dots$

5. Mějme výrok ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ (například výrok $\forall n \in \mathbb{N} : 6|n \Rightarrow 2|n$). Rozhodněte, které z uvedených tvrzení je pravdivé.
   (a) A je nutnou podmínkou pro B a B je postačující podmínkou pro A;
   (b) A je postačující podmínkou pro B a B je nutnou podmínkou pro A.

6. Určete pravdivostní hodnotu výroku V, určete negaci výroku V a pravdivostní hodnotu výroku $\neg V$.
   (a) $V : 2 \leq 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$.
   (b) $V : (1 + 2 = 3) \Rightarrow (1 > 2 \vee 3 \leq 4)$.
   (c) $V : \forall n \in \mathbb{N} : n > 3 \Rightarrow 2n > 5$.
   (d) V : Všichni žijící lidé jsou vyšší než 230 cm.
   (e) V : 3 je liché číslo $\Rightarrow \big(3 \cdot 7 = 21 \wedge 2$ je sudé číslo$\big)$.
   (f) $V : (10 > 5) \Rightarrow \big(5 + 2 = 8 \vee 2 < 7\big)$.
   (g) $V : \exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \leq 5$ a platí pro ně, že $2n < 7$.
   (h) $V : \forall x \in \mathbb{R} : x > 10$ platí, že $2x \leq 17$.

7. Dokažte, že následující výroky jsou tautologie.
   a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   b) $\big(\neg(A \wedge B)\big) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
   c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
   d) $\big(\neg(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

8. Dokažte, že výroky $\big(\neg(A \Rightarrow B)\big)$ a $(\neg A \Rightarrow \neg B)$ nejsou ekvivalentní.

9. Rozhodněte, zda pro implikaci platí asociativní zákon, tj. ověřte platnost ekvivalence $\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\big) \Leftrightarrow \big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big)$.

10. Rozhodněte, zda je relace implikace tranzitivní, tzn. zda platí $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

11. A tvrdí, že B lže. B tvrdí, že C lže. C tvrdí, že A i B lžou. Kdo mluví pravdu?

12. Máme dokázat tvrzení $A \Rightarrow B$. Stručně a výstižně popište princip důkazu přímého, nepřímého a sporem.
13. Dokažte přímo, nepřímo i sporem tvrzení $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$.
14. Dokažte přímo, nepřímo i sporem tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \Rightarrow 6n + 3 > 13$.
15. Dokažte, že tvrzení $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : c|ab \Rightarrow c|a \vee c|b$ neplatí.
16. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte nepřímo, že je-li n^2 sudé, potom je i n je sudé.
17. Dokažte nepřímo tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : n^3$ je sudé $\Rightarrow n$ je sudé.
18. Mějme $n \in \mathbb{N}$ a liché číslo $p \in \mathbb{N}$. Dokažte, že p^n je liché:
    (a) důkazem přímým s využitím znalosti binomické věty;
    (b) nepřímým důkazem.
19. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ je 3^n liché číslo.
20. Dokažte sporem, že $\log_2 3$ není racionální číslo.
21. Dokažte sporem, že $\log 5$ není racionální číslo.
22. Dokažte sporem, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.
23. Dokažte sporem, že $\sqrt{13} \geq 2\sqrt{2}$.
24. Dokažte, že součin dvou sudých čísel je dělitelný čtyřmi.
25. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
26. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
27. Dokažte, že kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ má alespoň jeden kořen rovný nule, právě když $c = 0$.
28. Nechť má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ celočíselné koeficienty, přičemž $a \neq 0$ a b je liché číslo. Dokažte, že rovnice nemůže mít dvojnásobný kořen.
29. Jak postupujeme při důkazu výrokové formule $V(n)$ matematickou indukcí?
30. Dokažte matematickou indukcí tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : 3|\left(2^{2n} - 7\right)$.
31. Dokažte matematickou indukcí tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : 7|\left(6^{2n} - 8\right)$.
32. Dokažte matematickou indukcí tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : 3|\left(10^n + 4^n - 2\right)$.
33. Dokažte matematickou indukcí tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : 31|\left(5^{n+1} + 6^{2n-1}\right)$.
34. Dokažte matematickou indukcí tvrzení, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:
    (a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$.
    (b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
    (c) $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{n-1}(2n-1) = (-1)^{n-1}n$.
    (d) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.
    (e) $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n$
35. Dokažte, že pro počet p_n úhlopříček v konvexním n-úhelníku pro $n > 3$ platí vzorec $p_n = \frac{1}{2}n(n-3)$.
36. Určete vzorec pro výpočet délky strany a_n pravidelného 2^n-úhelníka $(n > 1)$, který je vepsaný do kruhu o poloměru R a pomocí matematické indukce dokažte jeho platnost.
37. Dokažte matematickou indukcí že n různých přímek v rovině, které mají společný průsečík, rozděluje rovinu na $2n$ částí.

Vhodné zdroje k této tématice jsou například:

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky* 1. část, nakladatelství ALFA, Bratislava, 4. vydání (1976)

L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený: *Matematická analýza 1 (velmi předběžná verze)*,
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/ pick/analyza-pro-studenty.pdf`, 4. 10. 2018

Miškovský Pavel: *Důkazy*,
`http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/M_opakovaci_seminar/02_studijni_texty/Dukazy.pdf`, 4. 10. 2018