5 Zobrazení

Definice 5.1 (zobrazení a souvisejících pojmů). a) *Zobrazení z množiny A do množiny B* je binární relace R, která splňuje $(aRb \wedge aRc) \Rightarrow (b = c)$ (tato podmínka říká, že k jednomu prvku z A nemůžeme mít dva různé prvky z B, prvkům A říkáme vzory a prvkům B obrazy). Značíme obvykle f, přičemž namísto $f \subseteq A \times B$ píšeme $f : A \to B$ a namísto afb píšeme $b = f(a)$.

b) *Definiční obor:* $D(f) := \{a \in A, \text{ pro která } \exists b \in B \text{ tak, že } f(a) = b\}$.

c) *Obor hodnot:* $H(f) := \{b \in B, \text{pro která } \exists a \in A \text{ tak, že } f(a) = b\}$.

d) Je-li $D(f) = A$, hovoříme o *zobrazení množiny A do množiny B.*

e) Je-li $H(f) = B$, hovoříme o *zobrazení na množinu B (surjekce – pokrytí).*

f) Platí-li $\forall a, b \in D(f) : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ (tj. každé dva různé vzory mají dva různé obrazy), hovoříme o *prostém (injektivním) zobrazení.*

g) Je-li $D(f) = A$ a f je zároveň surjekce i injekce, hovoříme o *bijektivním (vzájemně jednoznačném) zobrazení.*

Poznámka. a) Chceme-li zdůraznit, že se jedná o zobrazení množiny a ne z množiny, používá se obratu „Nechť $f : A \to B$ je zobrazení na A“. Podobně, „$f : A \to B$ je surjekce na A“ znamená, že hovoříme o zobrazení množiny na množinu.

b) Množinová rovnost $D(f) = A$ v definici bijektivního zobrazení se v literatuře často požaduje již v definici prostého zobrazení, je tedy potřeba dávat pozor na užitou terminologii.

Příklad 5.2. Je dána množina $A = \{2, 3, 4, 6, 11\}$ a relace R na A, kde $aRb \Leftrightarrow b$ dělí a. Je R zobrazení?

Řešení. Relace obsahuje např. dvojice $[4, 2]$ a $[4, 4]$ a tedy nemůže být zobrazením.

Definice 5.3 (inverzního zobrazení). Nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Je-li inverzní relace k f také zobrazením, hovoříme o *inverzním zobrazení* a píšeme $f^{-1} : B \to A$.

Následující věta říká, za jakých podmínek f^{-1} existuje.

Věta 5.4. *Zobrazení f je prosté, právě když existuje inverzní zobrazení f^{-1}.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ (sporem): Nechť $f : A \to B$ je prosté. Předpokládejme, že relace $f^{-1} = \{[b, a] \in B \times A : [a, b] \in f\}$ není zobrazení, tj. existují prvky $b \in B$ a $a_1 \neq a_2 \in A$ takové, že $[b, a_1] \in f^{-1} \wedge [b, a_2] \in f^{-1}$. Tedy $[a_1, b] \in f \wedge [a_2, b] \in f$. To je ale spor s předpokladem, že f je prosté.

„$\Leftarrow$“ (sporem): Nechť f^{-1} je zobrazení a předpokládejme, že f není prosté. Potom existují $a_1 \neq a_2 \in A$ a $b \in B$ tak, že $[a_1, b] \in f \wedge [a_2, b] \in f$ a tedy také $[b, a_1] \in f^{-1} \wedge [b, a_2] \in f^{-1}$. To je ovšem spor s předpokladem, že f^{-1} je zobrazení. □

Příklad 5.5. Vyjádřete se k typu zobrazení $f : A \to B$, kde $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{u, v, w\}$, $u = f(a)$, $u = f(c)$, $w = f(d)$, $w = f(e)$.

Řešení. Nezobrazuje celou A ($D(f) \neq A$), není surjekce ($H(f) \neq B$), není injekce, protože např. a, c se oba zobrazují na u.

Poznámka. Zřejmě, každá bijekce má inverzi. Tato inverze je bijekcí, přičemž platí $f^{-1}(f(a)) = a$ pro každé $a \in A$ a $f(f^{-1}(b)) = b$ pro každé $b \in B$.

Pomocí bijektivního (resp. injektivního) zobrazení lze porovnávat množiny z hlediska počtu prvků, a to i v případě, kdy množiny jsou nekonečné.

Definice 5.6. (porovnání množin z hlediska mohutnosti)

a) Řekneme, že *množiny A a B jsou stejně mohutné (mají stejnou kardinalitu)*, jestliže existuje bijektivní zobrazení $f : A \to B$. Značíme $A \approx B$.

b) Řekneme, že množina A *má stejnou nebo menší mohutnost než množina B (má menší nebo stejnou kardinalitu)*, jestliže existuje injektivní zobrazení $f : A \to B$, přičemž $D(f) = A$. Píšeme $A \preceq B$.

c) Řekneme, že *množina A má menší mohutnost než množina B (má měnší kardianlitu)*, jestliže $A \preceq B$, ale přitom neplatí $A \approx B$. Píšeme $A \prec B$.

Poznámka. Uvedená definice má komparativní charakter (potřebujeme dvě množiny), nedefinuje mohutnost množiny přímo. Pro kvantitativní popis mohutnosti se užívá pojem *kardinálního čísla.* V případě konečných množin je mohutnost rovna počtu jejích prvků (mohutnost množiny A značíme $|A|$ nebo $\mathrm{card}(A)$). Poznamenejme ještě, že Cantorova věta (Georg Cantor 1845–1918, Němec) říká, že pro jakoukoliv množinu A platí, že $A \prec 2^A$.

6 Reálná čísla

Pro matematickou analýzu je to nejdůležitější číselná množina. Na střední škole se vychází z geometrické interpretace reálného čísla, kde reálná čísla ztotožňujme s body na přímce (číselné reálné ose). Ke korektnímu zavedení některých pojmů však toto pojetí nestačí. Existují dvě možnosti, jak reálná čísla vybudovat. První možnost je založena na postupném budování, nejprve přirozených čísel, pak celých čísel, dále racionálních a z nich pak čísel reálných (motivací k zavedení $\mathbb{N}$ je počet prvků nějaké množiny, na této množině umíme sčítat a násobit, umíme ji uspořádat, ale nelze zde bez omezení odečítat nebo dělit, $\mathbb{Z}$ lze chápat jako doplnění $\mathbb{N}$ tak, aby operace odečítání měla vždy výsledek, $\mathbb{Q}$ je zase doplnění $\mathbb{Z}$ tak, aby operace dělení měla vždy výsledek, motivací k $\mathbb{I}$ je potřeba pracovat s čísly, která nelze vyjádřit ve tvaru $\frac{p}{q}$, např. $\sqrt{2}$, $\ln 3, \dots$). Tato cesta je relativně zdlouhavá a technicky náročná. Druhá možnost je zavést množinu reálných čísel axiomaticky (a výše zmíněné číselné množiny chápat jako určité podmnožiny).

Definice 6.1 (pojmy týkající se uspořádaných množin)**.** Nechť M je množina s relací uspořádání $\preceq$ a $A \subseteq M$. Řekneme, že:

a) prvek $m \in M$ je *horní* (resp. *dolní*) *závora* množiny A, jestliže $\forall a \in A$ platí $a \preceq m$, resp. $m \preceq a$;
b) množina A je *ohraničená shora* (resp. *zdola*), jestliže existuje horní (resp. dolní) závora;
c) $b \in A$ je *maximum* (resp. *minimum*) a píšeme $b = \max A$ (resp. $b = \min A$), jestliže $\forall a \in A$ platí $a \preceq b$ (resp. $b \preceq a$);
d) $s \in M$ je *supremum* (resp. *infimum*) množiny A, jestliže je nejmenší horní závorou množiny A (resp. největší dolní závorou), tj. jestliže platí

$$\begin{aligned}&(\text{s1})\ \forall a \in A : a \preceq s, \\ &(\text{s2})\ (\forall a \in A : a \preceq b) \Rightarrow s \preceq b,\end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned}&(\text{i1})\ \forall a \in A : s \preceq a, \\ &(\text{i2})\ (\forall a \in A : b \preceq a) \Rightarrow b \preceq s.\end{aligned}$$

Věta 6.2. *Libovolná $A \subseteq M$ má nejvýše jedno supremum (resp. infimum).*

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že suprema existují alespoň dvě, označme je $m = \sup A$ a $m^* = \sup A$. Potom m^* je horní závora A, tj. $m \preceq m^*$. Analogicky m je horní závora a tedy $m^* \preceq m$. Protože ale $\preceq$ je antisymetrická relace, platí $m = m^*$, což je spor. Pro infimum se ukáže analogicky. □

Definice 6.3 (množiny reálných čísel)**.** *Množina reálných čísel* (budeme ji značit $\mathbb{R}$) je množina, na které jsou definovány dvě binární operace (binární operace na množině M je zobrazení $M \times M \to M$) $+$ (plus), $\cdot$ (krát) a jedna binární relace $<$, které splňují podmínky:

(A1) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (komutativita sčítání);
(A2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita sčítání);
(A3) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall a \in \mathbb{R}$ je $a + 0 = a$ (existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání);
(A4) ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje prvek $-a \in \mathbb{R}$ tak, že $a + (-a) = 0$ (existence opačného prvku);
(A5) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení);
(A6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativita násobení);
(A7) existuje prvek $1 \in \mathbb{R}$ $(1 \neq 0)$ takový, že $\forall a \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot 1 = a$ (existence neutrálního prvku vzhledem k násobení);
(A8) ke každému $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že $a \cdot a^{-1} = 1$ (existence inverzního prvku);
(A9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (distributivní zákon);
(A10) každá dvojice prvků $a, b \in \mathbb{R}$ splňuje právě jeden ze vztahů $a < b$, $a = b$, $b < a$, tj. každé dva prvky jsou porovnatelné (zákon trichotomie);
(A11) jestliže pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a < b$ a $b < c$, pak také $a < c$ (tranzitivita relace $<$);
(A12) jestliže pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a < b$, pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $a + c < b + c$ (monotonie vzhledem ke sčítání);
(A13) jestliže pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a < b$ a $0 < c$, pak $a \cdot c < b \cdot c$ (monotonie vzhledem k násobení);
(A14) je-li M neprázdná shora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$, pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$ (supremum je zde chápáno vzhledem k relaci $\leq$ odvozené z relace $<$; připomeňme, že ta je definována: $a \leq b$, jestliže $a < b \vee a = b$). Této vlastnosti říkáme axiom spojitosti.

Poznámka. a) Axiomy (A1)–(A4) a (A5)–(A8) jsou axiomy komutativní grupy, (A1)–(A9) jsou axiomy pole, axiomy (A10)–(A11) říkají, že relace $<$ je ostré lineární uspořádání (ireflexivita je zde schována v trochu jiné formulaci trichotomie). Vedle relace $\leq$ pak definujeme další odvozené relace $>$ a $\geq$ jako: $a > b$, jestliže $b < a$ a $a \geq b$, jestliže $b \leq a$. Axiomy (A1)–(A13) jsou axiomy uspořádaného pole, axiomy (A1)–(A14) jsou axiomy spojitě uspořádaného pole (axiom (A14) odlišuje reálná čísla od racionálních). Až na izomorfismus (zhruba řečeno jiné pojmenování prvků) existuje jediné spojitě uspořádané pole (jeho modelem je právě množina $\mathbb{R}$).

b) Pomocí axiomu (A14) a (A1)–(A4) lze ukázat, že každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

Příklad 6.4. Pro množinu $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ platí $\sup A = \max A = 1$, $\min A$ neexistuje, $\inf A = 0$. Skutečně, platí $\frac{1}{n} \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, tj. 1 je horní závora. Zároveň neexistuje menší horní závora, protože $1 \in A$. Odtud $\sup A = \max A = 1$. Dále, číslo 0 je dolní závorou, neboť $0 \leq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\delta > 0$ libovolně a předpokládejme, že δ je také dolní závora. Položíme-li ale $n_0 = \lfloor 1/\delta \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ je celá část x), potom pro všechny prvky $\frac{1}{n}$ takové, že $n > n_0$, platí $\frac{1}{n} < \delta$, což je spor s předpokladem, že δ je dolní závora. Máme tedy $\inf A = 0$ (toto číslo ale není minimem, protože $0 \notin A$).

Příklad 6.5. Ukažte, že a) neutrální prvek vzhledem ke sčítání je jediný, b) platí vlastnost $0 \cdot a = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Řešení. ad a) Sporem. Předpokládejme, že v $\mathbb{R}$ existují alespoň dva různé neutrální prvky 0 a 0^*. To znamená, že každý prvek $x \in \mathbb{R}$ splňuje $x + 0 = x$ a také $x + 0^* = x$. Dosadíme-li do prvního vyjádření $x = 0^*$ a do druhého $x = 0$, dostaneme $0^* + 0 = 0^*$ a $0 + 0^* = 0$. Protože je ale sčítání komutativní, viz axiom (A1), poslední rovnost můžeme psát jako $0^* + 0 = 0$. Obě rovnosti tedy dávají $0^* = 0^* + 0 = 0$, tj. $0^* = 0$ (přičemž jsme využili symetrii a tranzitivitu relace =). To je spor s předpokladem různosti prvků 0 a 0^*.

ad b) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, tedy číslo $0 \cdot a$ se chová jako neutrální prvek. Protože ale neutrální prvek je jediný, viz část a), musí být $0 \cdot a = 0$.

Definice 6.6 (rozšířené množiny reálných čísel)**.** Množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nazýváme *rozšířená množina reálných čísel*, symboly $-\infty, \infty$ (mínus a plus nekonečno) nazýváme nevlastní reálná čísla (nevlastní body číselné osy). Klademe $-\infty < a < \infty\ \forall a \in \mathbb{R}$. Pozor, symboly $-\infty, \infty$ nejsou čísla, nejsou pro ně definovány veškeré početní operace. Přesněji, definovány jsou následující operace: Pro libovolné $c \in \mathbb{R}^+$ je

$$\begin{array}{llll}
\infty + \infty = \infty, & \infty - c = \infty, & \infty \cdot \infty = \infty, & c \cdot \infty = \infty, \\
-\infty - \infty = -\infty, & \infty + c = \infty, & \infty \cdot (-\infty) = -\infty, & -c \cdot \infty = -\infty, \\
\dfrac{\pm c}{\infty} = \dfrac{\pm c}{-\infty} = 0, & -\infty - c = -\infty, & -\infty \cdot (-\infty) = \infty, & -c \cdot (-\infty) = \infty, \\
 & -\infty + c = -\infty, & \dfrac{\pm\infty}{\pm c} = \dfrac{1}{\pm c} \cdot (\pm\infty), & c \cdot (-\infty) = -\infty.
\end{array}$$

Definice 6.7 (intervalů)**.** Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom

a) *uzavřeným intervalem* o krajních (koncových, hraničních) bodech a, b rozumíme množinu $\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,
b) *otevřeným intervalem* množinu $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
c) *polouzavřenými intervaly* zprava (resp. zleva) množiny $(a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
d) Nekonečné intervaly definujeme jako množiny
   $\langle a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,
   $(-\infty, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
   $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.
   Je-li J interval jakéhokoliv typu a $x_0 \in J$, přičemž x_0 není krajní, řekneme, že x_0 je vnitřní bod intervalu J.

Definice 6.8 (okolí a ryzího okolí)**.** a) *Okolím* (podrobněji *(symetrickým) δ-okolím, $\delta > 0$) bodu $x_0 \in \mathbb{R}$* rozumíme interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Značíme $O_\delta(x_0)$, stručně $O(x_0)$.
b) *Okolím bodu* ∞ (resp. $-\infty$) rozumíme interval (a, ∞) (resp. $(-\infty, a)$), kde $a \in \mathbb{R}$.
c) *Ryzím (prstencovým) okolím bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu $O(x_0) \setminus \{x_0\}$. Okolí nevlastního bodu je vždy ryzí. Budeme značit $O^*(x_0)$.

Definice 6.9 (jednostranných okolí)**.** Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. *Pravým* (resp. *levým*) *δ-okolím bodu* x_0 rozumíme interval $\langle x_0, x_0 + \delta)$ (resp. $(x_0 - \delta, x_0\rangle$). Budeme označovat $O^+_\delta(x_0)$, stručně $O^+(x_0)$ (resp. $O^-_\delta(x_0)$, stručně $O^-(x_0)$). *Ryzím pravým* (resp. *levým*) *δ-okolím bodu* x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0, x_0+\delta)$ (resp. $(x_0-\delta, x_0)$). Budeme označovat $O^{*+}_\delta(x_0)$, stručně $O^{*+}(x_0)$ (resp. $O^{*+}(x_0)$, stručně $O^{*-}(x_0)$).

Poznámka. Někdy se okolí bodu x_0 uvažuje jako libovolný otevřený interval takový, že x_0 je vnitřním bodem tohoto intervalu. V takovém případě hovoříme o *okolí v širším smyslu.*

Věta 6.10. (i) *Mezi dvěma libovolnými reálnými čísly x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) leží racionální i iracionální číslo.*
(ii) *V libovolném okolí libovolného čísla $x_0 \in \mathbb{R}$ leží racionální i iracionální číslo.*

Důkaz. ad (i) Položme $n = \lfloor \frac{1}{x_2 - x_1} \rfloor + 1$, $m = \lfloor n x_1 \rfloor + 1$ (připomeňme, že $\lfloor \cdot \rfloor$ značí celou část reálného čísla). Pak $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, a tedy $q := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Z definic čísel m a n plyne, že $m > n x_1$ (tj. $x_1 < \frac{m}{n}$), $m \leq n x_1 + 1$, $n > \frac{1}{x_2 - x_1}$ (tj. $n x_2 - n x_1 > 1$, tj. $n x_2 > n x_1 + 1$). Odtud

$$x_1 < \frac{m}{n} \leq \frac{n x_1 + 1}{n} < \frac{n x_2}{n}.$$

To znamená, že q je racionální číslo mezi x_1 a x_2.

Položme dále $s = \lfloor \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \rfloor + 1$, $r = \lfloor \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 \rfloor + 1$. Pak $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ a $t = \sqrt{2}\frac{r}{s} \in \mathbb{I}$ (kdyby nebylo, pak by i $\sqrt{2}$ muselo být racionální, což víme, že není). Z definic čísel r a s plyne, že $r > \frac{s}{\sqrt{2}} x_1$ (tj. $x_1 < \sqrt{2}\frac{r}{s}$), $r \leq s\sqrt{2}x_1 + 1$, $s > \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1}$ (tj. $\frac{s}{\sqrt{2}} x_2 > \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 + 1$). Odtud

$$x_1 < \sqrt{2}\frac{r}{s} \leq \frac{\sqrt{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} x_1 + 1\right)}{s} < \frac{\sqrt{2}\frac{s}{\sqrt{2}} x_2}{s} = x_2.$$

To znamená, že t je iracionální číslo mezi x_1 a x_2.

ad (ii) Tvrzení je důsledkem (i), protože mezi čísly $x_0 - \delta$ a $x_0 + \delta$ leží racionální i iracionální číslo. $\square$

Poznámka. Množina, která má stejnou mohutnost jako nějaká podmnožina množiny přirozených čísel se nazývá *spočetná* (její prvky můžeme očíslovat), přičemž mohutnost množiny přirozených čísel značíme $\aleph_0$ („alef“ – první písmeno v hebrejské abecedě), tj. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. V opačném případě hovoříme o *nespočetné* množině. Intuice by mohla svádět k tomu, že např. množina $\mathbb{Z}$ všech celých bude mít „dvakrát více“ prvků něž $\mathbb{N}$ a množina $\mathbb{S}^+$ všech přirozených sudých čísel naopak „dvakrát méně“ prvků než $\mathbb{N}$. Na intuici však v případě nekonečných množin nelze příliš spoléhat. Platí totiž $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{S}^+| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ (příslušná bijektivní zobrazení mezi množinami není těžké zkonstruovat). Stejně tak $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Existence nespočetných množin plyne přímo z Cantorovy věty, podle které je $\mathbb{N} \prec 2^{\mathbb{N}}$. Mohutnost množiny $2^{\mathbb{N}}$ nazýváme *mohutnost kontinua*. Důvodem názvu je, že množina všech reálných čísel má stejnou mohutnost jako množina $2^{\mathbb{N}}$ – reálná čísla na sebe „kontinuálně (spojitě) navazují“ (nejsou mezi nimi „díry“). Nespočetnost množiny $\mathbb{R}$ lze ukázat poměrně jednoduše pomocí Cantorovy diágonální metody. Mohutnost kontinua se označuje c nebo $2^{\aleph_0}$. Georg Cantor v roce 1878 publikoval tzv. *hypotézu kontinua*, která říká, že neexistuje podmnožina S reálných čísel, pro kterou by platilo $\aleph_0 < |S| < 2^{\aleph_0}$ (tj. první ostře větší mohutnost (kardinální číslo) než $\aleph_0$ by byla $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Až v roce 1963 Paul Cohen (americký matematik 1934–2007) dokázal, že o pravdivosti hypotézy nelze v rámci Zermelo–Fraenkelovy teorie množin rozhodnout.