1. Definujte pojem zobrazení f mezi množinami A a B.

   [Zobrazení mezi množinami A do B je binární relace f mezi množinami A a B, která splňuje ... Místo $f \subseteq A \times B$ píšeme obvykle $f : A \to B$ a místo afb píšeme obvykle $b = f(a)$.]

   Poznámka: Zobrazení f mezi číselnými množinami říkáme častěji funkce a píšeme $f : A \to B$.

2. Vysvětlete rozdíl mezi zobrazením f z množiny A do množiny B, zobrazením g z množiny A na množinu B, zobrazením h množiny A do B a zobrazením i z množiny A na množinu B. Udejte příklad takových zobrazení f, g, h, i.

3. Jsou dány množiny A, B a relace f. Rozhodněte, zda platí:

   α) f je zobrazení z množiny A do množiny B;
   β) f je zobrazení z množiny A na množinu B;
   γ) f je zobrazení množiny A do množiny B;
   δ f je zobrazení množiny A na množinu B (tedy zda jde o surjekci).

   (a) $A = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R}$ a relace $f = \left\{[0,0], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, 1\right], \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]\right\}$;
   (b) $A = \mathbb{N}$, $B = \langle -1, 1\rangle$, $y = \sin x$, kde $x \in A, y \in B$;
   (c) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $y = \arcsin x$, kde $x \in A, y \in B$.

4. Na množině $A = \{2, 3, 4, 6, 11\}$ je dána relace $R = \{[x, y] : y \text{ je dělitelem } x\}$. Rozhodněte, zda relace R definuje na množině A zobrazení. *[není to zobrazení]*

   Poznámka: Zobrazením f na množině A je myšleno zobrazení f z množiny A do množiny A.

5. Definujte pojem injektivní (tj. prosté) zobrazení, resp. surjektivní zobrazení, resp. bijektivní zobrazení.

6. Jaký je postup při důkazu, že zobrazení f je injektivní, resp. není injektivní, resp. je surjektivní, resp. není surjektivní?

7. Na množině $A = \{2, 3, 4, 6, 11\}$ je dána relace $R = \{[x, y] : y \text{ je ciferný součet } x\}$. Rozhodněte, zda relace R definuje na množině A zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda jde o zobrazení prosté.

   [Je to zobrazení, není prosté]

8. Rozhodněte, zda dané zobrazení $f : A \to B$ je injektivní, resp. surjektivní.

   (a) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = |x + 2|$, $\quad \forall x \in \mathbb{Z}$;
   (b) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{u, v, w\}$, $f(a) = u, f(b) = u, f(c) = u, f(d) = w, f(e) = w$;
   (c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{S}$, $f(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$;
   (d) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$;
   (e) $A = \mathbb{R}$, $B = \langle -1; 1\rangle$, $f(x) = \sin x$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$;
   (f) $A = B = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, $\quad \forall x \in \mathbb{N}$;
   (g) $A = B = \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 1, \\ x - 1 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$

   Poznámka:
   $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel, tedy $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
   $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel, tedy $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
   $\mathbb{S}$ je množina sudých čísel, tedy $\mathbb{S} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$.

   [a) není I, je S, b) není I, není S, d) není I, není S, e) není I, je S, f) je I, není S, g) není I, je S]

9. Rozhodněte, zda dané zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je injektivní, resp. surjektivní.

   (a) $f(x) = 2x - 1$. *je I, není S*
   (b) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pro } x \leq 3, \\ x - 3 & \text{pro } x > 3. \end{cases}$ *není I, je S*
   (c) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pro } x \text{ sudé}, \\ x + 1 & \text{pro } x \text{ liché}. \end{cases}$ *je B*
   (d) $f(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$. *není I, je S*
   (e) $f(x) = \left\lfloor \frac{3x+1}{2} \right\rfloor$. *je I, není S*

   Poznámka: $\lfloor a \rfloor$ znamená dolní celou část čísla a.

10. Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní.

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6$. *je I, není S*

    (b) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2$. *je I, je S*

    Poznámka:
    $\mathbb{R}^+$ *je množina kladných reálných čísel, tedy* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$,
    $\mathbb{R}_0^+$ *je množina nezáporných reálných čísel, tedy* $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,
    $\mathbb{R}^*$ *je rozšířená množina reálných čísel, tedy* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

11. Dokažte, že mezi množinami $A = \mathbb{Z}$ a $B = \mathbb{S}$ existuje bijekce.

12. Dokažte, že mezi množinami $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $B = \mathbb{R}$ existuje bijekce.

13. Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dáno předpisem $y = 2x - 1$. V případě, že jde o injektivní zobrazení, určete inverzní zobrazení f^{-1}.

14. Jsou dána bijektivní zobrazení $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = 2x + \frac{5}{3}$. Zapište předpis pro zobrazení $f \circ g$ a $g \circ f$.

Vhodné zdroje k této tématice jsou například:

Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I.*, vydala Masarykova universita v Brně, 1991

L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený: *Matematická analýza 1 (velmi předběžná verze)*, `https://www.karlin.mff.cuni.cz/ pick/analyza-pro-studenty.pdf`, 4. 10. 2018

Pick, L.: *Sbírka příkladů k přednášce Matematická analýza I a II*, `https://www.karlin.mff.cuni.cz/ pick/sbirka.pdf`, 11. 10. 2018

Ukázkový materiál z e-matematika, `https://www.e-matematika.cz/vysoke-skoly/04-relane-funkce-priklady.pdf`, 11. 10 .2018