1. Mějme množiny A, B. Utvořte jejich průnik $A \cap B$, sjednocení $A \cup B$, rozdíl $A \setminus B$ a rozdíl $B \setminus A$.
   (a) $A = \{1, 4, 7, 9, 12\}$ a $B = \{2, 4, 6, 9, 13\}$;
   (b) $A = \{3, 4, 5\}$ a $B = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 6\}$;
   (c) $A = \{n \in \mathbb{N} : n < 7\}$ a $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$.

2. Mějme množinu A. Určete všechny podmnožiny množiny A.
   Pozn.: Systém všech podmnožin se označuje 2^A.
   (a) $A = \{a, b, c\}$;
   (b) Nechť množina A je množina všech sudých přirozených čísel menších než 10;
   (c) $A = \{\emptyset, 1, 3\}$.

3. Uveďte příklad množin A, B tak, aby platilo:
   (a) $A \in B$ a současně $A \subseteq B$;
   (b) $A \in B$ a současně $A \nsubseteq B$;
   (c) $A \notin B$ a současně $A \subseteq B$.

4. Je dána množina $A = \{0, 1, 2\}$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá a které nepravdivá:
   (a) $0 \in A$;
   (b) $\{0\} \in A$;
   (c) $0 \subseteq A$;
   (d) $\{0\} \subseteq A$;
   (e) $\{\} \in A$;
   (f) $\{\} \subseteq A$;
   (g) $\{\emptyset\} \in A$;
   (h) $\{\emptyset\} \subseteq A$;
   (i) $\{2\} \in \{2, \{2\}\}$;
   (j) $\{2\} \subseteq \{2, \{2\}\}$;
   (k) $\{1; 2\} = \{2; 1\}$.

5. Uveďte formální definici množinových operací.
   (a) $A \cap B$;
   (b) $A \cup B$;
   (c) $A \setminus B$.

6. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí uvedené tvrzení.
   Pozn.: Při dokazování rovnosti množin dokazujeme platnost „$\subseteq$“ (tedy například v při dokazování platnosti a) vyjdeme z tvrzení, že $x \in \big(A \setminus (B \cap C)\big) \Rightarrow x \in A \wedge \ldots$) a řadou platných implikací se snažíme dokázat, že x leží v množině uvedené na pravé straně rovnosti, a potom stejným principem dokazujeme platnost opačné inkluze „$\supseteq$“.
   (a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

7. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C neplatí pro rozdíl množin asociativní zákon, tj. že neplatí $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

8. Definujte pojem kartézský součin množin A a B.

9. Jsou dány množiny $A = \{a\}$ a $B = \{x, y\}$. Určete množiny $A \times B$ a $B \times A$.

10. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 7\}$. Popište (třeba i graficky) množiny $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$, $B \times 2^B$.

11. Udejte příklad množin A, B tak, aby množina $A \times B$ měla právě 32 podmnožin.

12. Jsou dány množiny $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge |x - 3| < 1\}$ a $B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$. Určete a v souřadnicovém systému zakreslete $B \cup (A \setminus B)$, $(A \cap B) \times (B \setminus A)$.

13. Definujte pojem unární relace na množině A.

14. Definujte pojem binární relace R mezi množinami A a B.

15. Udejte příklad dvou různých relací mezi množinami $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{x, y, z\}$.

16. Definujte pojem binární relace R na množině A.

17. Uvažujme M jako množinu příbuzných, kde $M = \{$Adam (otec), Barbora (matka), Cyril (syn), Dana (dcera), Emanuel (dědeček z otcovy strany)$\}$. Vypište prvky relací R_i, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
    (a) Je dána unární relace $R_1 = \{x : x$ je mužského pohlaví$\}$.
    (b) Je dána binární relace $R_2 = \{[x, y] : x$ je otec $y\}$.
    (c) Je dána binární relace $R_3 = \{[x, y] : x$ je rodičem $y\}$.
    (d) Je dána binární relace $R_4 = \{[x, y] : x$ je sourozencem $y\}$.
    (e) Je dána ternární relace $R_5 = \{[x, y, z] : x$ je prarodič, y je rodič a z potomek$\}$.

18. Je dána množina $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a prvky $a, b \in A$ jsou v relaci R právě když $b = a + 2$. Vypište relaci R na množině A, dále relaci R zapište tabulkou, a také Hasseho diagramem.

19. Je dána množina $A = \{a, b, c, d\}$. Zapište libovolnou relaci R na množině A, která má alespoň 4 prvky. Relaci R zapište tabulkou.

20. Na neprázdné množině A definujte pojem relace reflexivní, ireflexivní, symetrická, antisymetrická, asymetrická, tranzitivní, úplná.

21. Mějme množinu $A = \{a, b, c\}$ udejte příklad relací R_1, R_2, R_3, R_4 pomocí tabulky tak, aby každá z těchto relací měla právě jednu z vlastností (pokud je to vůbec možné): reflexivní, symetrická, antisymetrická, úplná.

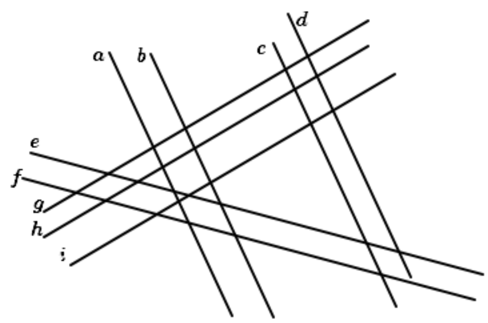
22. Definujte pojem relace ekvivalence na množině A.

23. Je dána množina A a na ní relace R. Rozhodněte, zda je relace R reflexivní, zda je symetrická, zda je tranzitivní.
    (a) $A = \{2, 3, 4, 6, 11\}$, $R = \{[x, y] : y$ je dělitelem $x\}$.
    [$R = \{[2, 2], [3, 3], [4, 2], [4, 4], [6, 2], [6, 3], [6, 6], [11, 11]\}$, je ref., není sym., je tranzit., tedy nejde o relaci ekvivalence]
    (b) $A = \{2, 3, 4, 6, 11\}$, $R = \{[x, y] : y$ je ciferný součet $x\}$.
    [$R = \{[2, 2], [3, 3], [4, 4], [6, 6], [11, 2]\}$, není ref., není sym., je tranzit.]
    (c) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{[a, a], [a, b], [d, d]\}$.
    (d) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{[a, a], [a, b], [b, b], [b, c], [b, d], [c, c], [d, d]\}$.
    (e) $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$.
    (f) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = A \times A$.

24. Pomocí samostatných tabulek udejte příklad množiny A a relací R_1, R_2, R_3, které porušují:
    (a) reflexivitu;
    (b) symetrii;
    (c) antisymetrii.

25. Je dána relace R na množině $\mathbb{N}$. Rozhodněte, zda je relace R reflexivní, zda je symetrická, zda je antisymetrická, zda je tranzitivní, zda je úplná.
    (a) $xR\,y \Leftrightarrow x \cdot y$ je liché číslo; *[sym., tranzit.]*
    (b) $xR\,y \Leftrightarrow y = x \vee y = 2x \vee y = 3x$; *[ref., antisym.]*
    (c) $xR\,y \Leftrightarrow |x - y| = 3 \vee x = y.$; *[ref., sym.]*
    (d) $xR\,y \Leftrightarrow x = y$; *[ref., sym., antisym., tranzit.]*
    (e) $xR\,y \Leftrightarrow y = x^2$. *[antisym.]*

26. Uvažujme jako množinu A množinu studentů FSI (kteří jsou zařazeni do právě jedné studijní skupiny, tedy nestudují současně dva studijní programy :-)). Relace R na množině A je definována tak, že $aRb \Leftrightarrow a$ je ve stejné studijní skupině s b.
    (a) Dokažte, že relace R je relací ekvivalence.
    (b) Jak vypadají třídy ekvivalence a jak vypadá rozklad $\mathscr{A}_R$ množiny A?
27. Uvažujme jako množinu A množinu 2 červených, 5 bílých, 3 modrých, 6 zelených automobilů. Relaci R na množině A definujeme tak, že dvě auta jsou v relaci, právě když mají stejnou barvu.
    (a) Dokažte, že relace R je relací ekvivalence.
    (b) Jak vypadají třídy ekvivalence a jak vypadá rozklad $\mathscr{A}_R$ množiny A?
28. Nechť množina A je množina přímek $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, viz obrázek 1. Relaci R na množině A definujeme tak, že přímky $x, y \in A$ jsou v relaci R právě tehdy, když je přímka x rovnoběžná s y.
    (a) Je tato relace R relací ekvivalence na množině A?
    (b) Pokud jde o relaci ekvivalence, tak určete, kolik má tříd ekvivalence má příslušný rozklad $\mathscr{A}_R$ množiny A a tyto třídy vypište.



Obrázek 1: Zadání množiny přímek k příkladu 28

29. Nechť množina A je množina libovolných přímek v rovině. Relaci R na množině A definujeme tak, že přímky $x, y \in A$ jsou v relaci R právě tehdy, když je přímka x kolmá k přímce y. Dokažte, že R není relace ekvivalence.
30. Definujte pojem relace uspořádání na množině A.
31. Uvažujme jako množinu A množinu čísel vyjadřující tělesnou výšku studentů jedné studijní skupiny. Relaci R na množině A definujeme tak, že aRb, právě když student a je menší nebo je stejně vysoký jako student b. Zjistěte, zda jde o relaci uspořádání.