1. Odhadněte, zda množina $A \subseteq \mathbb{R}$ má infimum a suprémum, minimum a maximum. Pokud ano, tak je určete.
   (a) $A = \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; $[\min A = -1 = \inf A, \max A \nexists, \sup A = 0]$
   (b) $A = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; $\left[\min A = \inf A = 0, maxA = \sup B = \frac{3}{2}\right]$
   (c) $A = \left\{n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; $[\min A \nexists, \inf A = 0, \max A \nexists, \sup A \nexists]$
   (d) $A = \left\{q : q \in \mathbb{Q} \wedge q < \sqrt{3}\right\}$; $\left[\min A \nexists, \inf A \nexists, \max A \nexists, \sup A = \sqrt{3}\right]$
   (e) $A = \{\sin x \cos x : x \in \mathbb{R}\}$. $\left[\min A = \inf A = -\frac{1}{2}, \max A = \sup A = \frac{1}{2}\right]$
   (f) $A = \mathbb{R}$; $[\min A \nexists, \inf A \nexists, \max A \nexists, \sup A \nexists]$
   (g) $A = (2,4) \cup \{5,6\} \cup (7,8)$; $[\min A \nexists, \inf A = 2, \max A \nexists, \sup A = 8]$
   (h) $A = \left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ $[\min A \nexists, \inf A = 0, \max A = \sup A = 1]$

2. Zakreslete zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.
   Jde o reálnou posloupnost, kterou lze také zapsat jako $\{a_n\}$ (někdy se také píše $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), kde $a_n = 2 - \frac{1}{n}$.

3. Definujte pojem reálná posloupnost.

4. a) Definujte pojem vlastní limita a reálné posloupnosti $\{a_n\}$, tj. $\lim\{a_n\} = a$.
   b) Definujte pojem nevlastní limita $-\infty$ reálné posloupnosti $\{a_n\}$, tj. $\lim\{a_n\} = -\infty$.

5. Rozhodněte, zda je posloupnost $\{2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}, \ldots\}$ monotónní a pokuste se odhadnout její limitu. *[1]*

6. a) Pomocí definice limity posloupnosti dokažte, že $\lim \frac{n}{n+1} = 1$, tj. že daná posloupnost konverguje.
   Nápověda: Ukažte, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - 1| < \varepsilon$.
   b) Doplňte tabulku:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
n_0(minimální)				

7. a) Pomocí definice limity posloupnosti dokažte, že $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$, tj. že daná posloupnost konverguje.
   b) Doplňte tabulku:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
n_0(minimální)				

8. a) Pomocí definice limity posloupnosti dokažte, že $\lim \frac{1}{n!} = 0$, tj. že daná posloupnost konverguje.
   b) Doplňte tabulku:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
n_0(minimální)				

9. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n$ neexistuje, tj. že daná posloupnost diverguje.
   Nápověda: Ukažte, že existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že neexistuje $n_0 = n_0(h)$ tak, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo $|a_n| > h$.

10. a) Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, tj. že daná posloupnost diverguje.
    Nápověda: Ukažte, že ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 = n_0(h)$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n > h$.
    b) Doplňte tabulku:

h	10	100	1000	10000
n_0(minimální)				

11. a) Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = \infty$, tj. že daná posloupnost diverguje.
    b) Doplňte tabulku:

h	10	100	1000	10000
n_0(minimální)				

12. Odhadněte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$. *[0]*

13. Spočtěte následující limity:

a) $\lim \frac{n-1}{n+1}$;	*[1]*	b) $\lim(-1)^n 0.999^n$;	*[0]*
c) $\lim \frac{2^n+1}{2^n}$;	*[1]*	d) $\lim \frac{2^n+3}{1-4\cdot 2^n}$;	*[$-\frac{1}{4}$]*
e) $\lim \left(2-\frac{5}{2n}\right)$;	*[2]*	f) $\lim \sqrt[n]{3}$;	*[1]*
g) $\lim \frac{n^2+2}{4n^2+1}$;	*[$\frac{1}{4}$]*	h) $\lim \frac{\sin n}{n}$;	*[0]*
i) $\lim \frac{2n+\sin n}{3n-1}$;	*[$\frac{2}{3}$]*	j) $\lim \frac{n^2}{n-1}$;	*[∞]*
k) $\lim \frac{n^2+1}{n^3+5n-7}$;	*[0]*	l) $\lim \frac{1+(-1)^n}{2}$;	*[neexistuje]*
m) $\lim \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;	*[1]*	n) $\lim \frac{\cos(-n^3)}{n^3}$;	*[0]*
o) $\lim \frac{3n^2-123n-1000}{2n^2+n}$;	*[$\frac{3}{2}$]*	p) $\lim \frac{-n^2}{1000n+2}$;	*[$-\infty$]*
q) $\lim \frac{n^3+12n^2+12n+12}{n^4-1}$;	*[0]*	r) $\lim \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;	*[1]*
s) $\lim \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$;	*[1]*	t) $\lim \frac{1}{(1-n)^2}$;	*[0]*
u) $\lim \frac{(-1)^n}{n}$;	*[0]*	v) $\lim \frac{n^n}{n!}$;	*[∞]*
w) $\lim \frac{2^n}{n!}$.	*[0]*		

14. Určete hodnotu následujících výrazů:

a) $\lim \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$; *[$\frac{1}{2}$]*
Nápověda: Je třeba využít vztahu $1+2+\ldots+k=\ldots$

b) $\lim \left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$; *[$\frac{1}{3}$]*
Nápověda: Je třeba využít vztahu $1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, který si nejprve dokažte mat. indukcí.

c) $\lim \left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$; *[$\frac{4}{3}$]*
Nápověda: Zkuste si nejprve odvodit vztah pro $1^2+3^2+\ldots+(2k-1)^2=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2=\ldots=$ $=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$.

d) $\lim \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$; *[1]*
Nápověda: Uvědomte si, že například zlomek $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.

e) $\lim \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$; *[$\frac{5}{3}$]*
Nápověda: Snahou je, najít v polynomu $k^3+6k^2+11k+5$ činitel $(k+1)!$, který by se zkrátil. To se bohužel nepovede, ale zkuste rozložit na součin kořenových činitelů polynom $k^3+6k^2+11k+5+1$.

15. Definujte pojem hromadný bod posloupnosti.

16. Určete hromadné body posloupnosti:

a) $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{8}; \frac{7}{8}; \ldots; \frac{1}{2^n}; \frac{2^n-1}{2^n}; \ldots$ *[0, 1]*

b) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \ldots$ *[všechna reálná čísla intervalu $\langle 0,1\rangle$]*

c) $a_n=3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$ *[1, 5]*

17. Definujte pojem limes superior a limes inferior posloupnosti $\{a_n\}$.

18. Odhadněte $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$:

a) $a_n=(-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$ *[-2,2]*

b) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$ *[0,1]*

c) $a_n=(-1)^n n$ *[$-\infty,\infty$]*

d) $a_n=n^{(-1)^n}$ *[$0,\infty$]*

Literatura:

Děmidovič, B. P.: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003

Vanžura, J.: Sbírka příkladů
(v el. podobě na http://www.math.cas.cz/ vanzura/SBIR8.PDF), dostupné v říjnu 2012