7 Posloupnosti

Definice 7.1 (posloupnosti)**.** *Posloupností* rozumíme zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, přičemž $D(f) = \mathbb{N}$. Namísto $f_n := f(n)$ píšeme obvykle a_n (nazýváme *členem posloupnosti*, posloupnost se pak značí $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, stručně $\{a_n\}$).

Definice 7.2 (ohraničenosti a monotonie posloupnosti)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je:
a) *shora* (resp. *zdola*) *ohraničená (omezená)*, jestliže $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \le c$ (resp. $a_n \ge c$) $\forall n \in \mathbb{N}$;
b) *ohraničená*, jestliže je shora i zdola ohraničená;
c) *neklesající* (resp. *nerostoucí*), jestliže $a_n \le a_{n+1}$ (resp. $a_n \ge a_{n+1}$);
d) *rostoucí* (resp. *klesající*), jestliže $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$);
e) *monotónní* (resp. *ostře monotónní*), jestliže je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající).

Definice 7.3 (limity posloupnosti)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu* a (píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ nebo stručněji $\lim a_n = a$, $a_n \to a$), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \ge n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Posloupnost, která má limitu, se nazývá *konvergentní.*

Věta 7.4 (o jednoznačnosti limity)**.** *Jakákoliv posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\lim a_n = a$ a $\lim a_n = b$, $a \ne b$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $a < b$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}(b-a) > 0$. Protože a i b jsou limity, od určitého n_0 platí $|a_n - a| < \frac{1}{4}(b-a)$, $|a_n - b| < \frac{1}{4}(b-a)$. Odtud máme $b - a = |b-a| = |b - a + a_n - a_n| = |(a_n - a) - (a_n - b)| \le |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{2}{4}(b-a) \Rightarrow b - a < \frac{1}{2}(b-a) \Rightarrow 2b - 2a < b - a \Rightarrow b < a \Rightarrow$ spor. □

Příklad 7.5. Dokažte, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.
Řešení. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně a položme $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ (horní celá část, např. $\lceil 2{,}8 \rceil = 3$). Potom $\forall n \ge n_0$ platí $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Věta 7.6. *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Důkaz. Nechť $\lim a_n = a$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \ge n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Označme $h = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a + \varepsilon\}$, $d = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a - \varepsilon\}$. Potom zřejmě $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $d \le a_n \le h$, tj. $\{a_n\}$ je shora i zdola ohraničená. □

Poznámka. a) Jsou-li $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti takové, že $a_n < b_n$ (nebo $a_n \le b_n$) pro $\forall n \ge n_0 \in \mathbb{N}$, pak $\lim a_n \le \lim b_n$.
b) Je-li pro $\{a_n\}$ $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je ohraničená, pak $\lim a_n b_n = 0$.
c) Posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = c$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ se nazývá *stacionární posloupnost* a platí pro ni $\lim a_n = c$.
d) Je-li $\{a_n\}$ je monotónní a neohraničená, pak $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Důkaz. ad a) Připusťme opak, tj. $a > b$ a položme $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Pak $\varepsilon > 0$ a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \ge n_1$ je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \ge n_2$ je $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$. Pro $n \ge \max\{n_0, n_1, n_2\}$ tedy platí $a - \varepsilon = \frac{a+b}{2} < a_n \le b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$, což je spor.

ad b) Protože $\{b_n\}$ je ohraničená, existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $|b_n| < h$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. K $\frac{\varepsilon}{h} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \ge n_0$ je $|a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{h}$. Pro tato n tedy pak platí $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{h} h = \varepsilon$, tj. $\lim a_n b_n = 0$.

ad c) Zřejmě pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí $|a_n - a| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, tj. $\lim a_n = \lim c = c$.

ad d) Nechť $\{a_n\}$ je neklesající a $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože je $\{a_n\}$ neohraničená, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$. Dále platí také $a_n \ge a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ pro $\forall n \ge n_0$, protože $\{a_n\}$ je neklesající. Odtud plyne, že pro $\forall n \ge n_0$ platí $|\frac{1}{a_n} - 0| = |\frac{1}{a_n}| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$, tj. $\lim \frac{1}{a_n} = 0$. Pro nerostoucí posloupnost by se důkaz provedl analogicky. □

Příklad 7.7. Určete limity a) $\lim \frac{\sin n^2}{n}$, b) $\lim \frac{1}{n^2}$.
Řešení: ad a) Položme $b_n = \sin n^2$ a $a_n = \frac{1}{n}$. Platí $|\sin n^2| \le 1$ a tedy b_n je ohraničená. Protože $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$, je podle předchozí poznámky b) $\lim \frac{\sin n^2}{n} = 0$.

ad b) Posloupnost $\{a_n\} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ je (ostře) monotónní, neboť $a_{n+1} = (n+1)^2 = (n+1)(n+1) > (n+1)n > nn$. Využíváme přitom axiomů (A11) –(A13) množiny $\mathbb{R}$. (Monotonii je možné ověřit také matematickou indukcí.) Dále, posloupnost $\{a_n\}$ není shora ohraničená. Skutečně, předpokládejme opak, tj., že je shora ohraničená. Musí tedy existovat $h > 0$ takové, že $n^2 \le h$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Vezměme libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$, které splňuje $n_0 > \sqrt{h}$ (takové n_0 určitě existuje, protože množina $\mathbb{N}$ je neohraničená). Potom ale každé přirozené $n \ge n_0$ splňuje $n^2 \ge n_0^2 > (\sqrt{h})^2 = h$, což je spor s předpokladem. Podle předchozí poznámky d) je tedy $\lim \frac{1}{n^2} = 0$. Jiný způsob: a) přímo z definice, b) využitím předchozí poznámky b) a příkladu 7.5.

Věta 7.8. *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti tak, že $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak*

(i) *existuje $\lim |a_n|$ a platí $\lim |a_n| = |a|$,*

(ii) *existuje $\lim(a_n \pm b_n)$ a platí $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$,*

(iii) *existuje $\lim a_n b_n$ a platí $\lim a_n b_n = ab$,*

(iv) *pokud $b_n \neq 0$, $b \neq 0$, pak existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$ a platí $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*

Důkaz. ad (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Pro $n \geq n_0$ tedy platí $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, což znamená $\lim |a_n| = a$.

ad (ii) Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ a tedy $\lim(a_n + b_n) = a + b$. Pro rozdíl se ukáže podobně (využijme $|x - y| \leq |x| + |y|$).

ad (iii) Je-li $a = 0$, plyne tvrzení z věty z předchozí poznámky b) a věty 7.6. Nechť $a \neq 0$ a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle věty 7.6 existuje $h > 0$ takové, že $|b_n| < h$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. K $\frac{\varepsilon}{2h}$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2h}$. K $\frac{\varepsilon}{2|a|}$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$. Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí obě nerovnosti současně, tedy $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2h} h + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

ad (iv) Podle (i) je $\lim |b_n| = |b|$ a podle předpokladu $|b| > 0$. Tedy k $\frac{|b|}{2}$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $||b_n| - |b|| < \frac{|b|}{2}$, tj. $|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$. Odtud plyne, že pro $n \geq n_1$ je $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{b^2 \varepsilon}{2}$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{b^2 \varepsilon}{2}$. Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ je $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b - b_n}{|b||b_n|}| < \frac{b^2 \varepsilon}{2} \frac{1}{|b|} \frac{2}{|b|} = \varepsilon$ a tedy $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Podle (iii) je $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = a \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. □

Poznámka. Z věty 7.8(iii) a předchozí poznámky c) plyne, že $\lim(c a_n) = c \lim a_n$, $c \in \mathbb{R}$.

Příklad 7.9. Určete $\lim \frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 4n - 3}$.

Řešení:

$$\lim \frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 4n - 3} = \lim \left(\frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 4n - 3} \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2} \right) = \lim \frac{3 - 4/n}{1 + 1/n - 3/n^2} = 3,$$

kde v posledním kroku jsme využili vlastností z věty 7.8 a faktu, že $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$ (viz příklady 7.5 a 7.7).

Poznámka. Je-li $a_k \neq 0$, $b_\ell \neq 0$, pak platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 k + a_0}{b_\ell n^\ell + b_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{je-li } k < \ell, \\ a_k / b_\ell & \text{je-li } k = \ell, \\ \pm\infty & \text{je-li } k > \ell \quad \text{(nevlastní limita, viz definice 7.15).} \end{cases}$$

V posledním případě je znaménko plus, jsou-li obě a_k, b_k kladná nebo záporná, a znaménko minus v opačném případě.

Věta 7.10 (o třech posloupnostech)**.** *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ jsou posloupnosti takové, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$. Jestliže $\lim a_n = \lim c_n = a$, pak také $\lim b_n = a$.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|a_n - a| < \varepsilon$ a tedy $a_n > a - \varepsilon$. Dále existuje $n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_3$ je $|c_n - a| < \varepsilon$ a tedy $c_n < a + \varepsilon$. Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, tj. $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, což znamená $\lim b_n = a$. □

Příklad 7.11. Určete $\lim \frac{\ln n}{n^2}$.

Řešení: Protože $n \geq \ln n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

a podle předchozí věty tedy musí k nule konvergovat i posloupnost $\{\ln n / n^2\}$, tj. máme

$$\lim \frac{\ln n}{n^2} = 0.$$

Věta 7.12 (o monotónních posloupnostech)**.** (m1) *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající a shora ohraničená (resp. nerostoucí a zdola ohraničená), pak je konvergentní a platí $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$).*

(m2) *Je-li monotónní posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená, pak je konvergentní.*

Důkaz. ad (m1) Nechť $\{a_n\}$ je neklesající a shora ohraničená posloupnost. Potom podle axiomu (A14) z definice $\mathbb{R}$ existuje $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Dále, nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Protože a je horní závora, existuje $a_{n_0} \in \{a_n\}$ takové, že $a - \varepsilon < a_{n_0}$ (kdyby takový prvek neexistoval, byla by $a - \varepsilon$ horní závora menší než a, což je spor s $a = \sup\{a_n\}$). Protože $\{a_n\}$ je neklesající, je také $a - \varepsilon < a_n$ pro každé $n \geq n_0$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$, neboli $\lim a_n = a$. Pro nerostoucí a zdola ohraničenou posloupnost se tvrzení ukáže analogicky.

Tvrzení (m2) je přímým důsledkem (m1). □

Příklad 7.13. Dokažte, že posloupnost $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu.

Řešení: Nejprve ukažme, že posloupnost je rostoucí. K tomu využijeme Bernoulliovu nerovnost $(1+x)^n > 1+nx$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $x \neq 0$ (Jacob Bernoulli 1654–1705, Švýcar), kterou lze dokázat matematickou indukcí. Položíme-li $x = -\frac{1}{n^2}$, dává tato nerovnost

$$\begin{aligned}&\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^n > 1-\frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n > 1-\frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n > \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{1-n}\\ =&\Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)^{n-1}, \quad \text{tedy } a_n > a_{n-1} \text{ pro } \forall n \geq 2, \text{ což znamená, že } \{a_n\} \text{ je rostoucí.}\end{aligned}$$

Dále ukažme, že posloupnost je ohraničená. Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned}&\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ =&1 + \frac{n}{1!n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{n!n^n}\\ =&1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big)\\ <&1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\Big) = 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 1 + 2\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big) < 1+2 = 3,\end{aligned}$$

kde v předposledním řádku jsme využili nerovnost $n! > 2^n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ a vzorce pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti. Dále $a_n > a_1 = 2$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Ukázali jsme tedy, že $2 < a_n < 3$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. posloupnost je ohraničená. Celkově, podle věty 7.12(m2) má posloupnost limitu.

Definice 7.14 (Eulerova čísla)**.** Limitu z předchozího příkladu nazýváme *Eulerovým číslem* (Leonhard Paul Euler 1707–1783, Švýcar) a značíme e (e $\in \mathbb{I}$, e $\approx 2,71828182846$).

Poznámka. Eulerovo číslo lze (ekvivalentně) definovat vícero způsoby, jeho objev (právě skrz limitu z příkladu 7.13) je přisuzován již zmíněnému Jacobu Bernoullimu.

Definice 7.15 (nevlastní limity posloupnosti)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* ∞ (resp. $-\infty$), jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > h$ (resp. $a_n < h$). Má-li posloupnost $\{a_n\}$ buď nevlastní limitu, nebo žádnou limitu nemá, řekneme, že *diverguje* (někdy dále rozlišujeme, má-li nevlastní limitu, říkáme, že *určitě diverguje* a nemá-li žádnou limitu, říkáme, že *osciluje*).

Poznámka. a) Nahradíme-li ve větách 7.4 a 7.10 slovo „limita“ slovem „nevlastní limita“, zůstanou obě tvrzení v platnosti.

b) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost taková, že $\lim a_n = 0$. Jestliže existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_1$ je $a_n > 0$ (resp. $a_n < 0$, resp. $a_n \neq 0$), pak $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$ (resp. $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$, resp. $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty$).

c) Nechť $\lim a_n = \infty$ (resp. $\lim a_n = -\infty$) a nechť posloupnost $\{b_n\}$ je zdola (resp. shora) ohraničená. Pak $\lim(a_n + b_n) = \infty$ (resp. $\lim(a_n + b_n) = -\infty$).

d) Nechť $\lim a_n = \infty$ a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost taková, že existují $n_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ taková, že pro $n \geq n_1$ je $b_n > \delta$ (resp. $b_n < -\delta$). Pak $\lim a_n b_n = \infty$ (resp. $\lim a_n b_n = -\infty$). Nechť $\lim a_n = -\infty$ a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost taková, že existují $n_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ taková, že pro $n \geq n_1$ je $b_n > \delta$ (resp. $b_n < -\delta$). Pak $\lim a_n b_n = -\infty$ (resp. $\lim a_n b_n = \infty$).

e) Nechť $\lim |a_n| = \infty$ a $\{b_n\}$ je ohraničená posloupnost. Pak $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

f) Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající (resp. nerostoucí) a není ohraničená shora (resp. zdola), pak je určitě divergentní a $\lim a_n = \infty$ (resp. $\lim a_n = -\infty$).

Definice 7.16 (vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$.

Například $\{a_{2n}\} = \{a_2, a_4, a_6, \dots\}$, $\{a_{n^2}\} = \{a_1, a_4, a_9, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=m}^{\infty} = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$ jsou posloupnosti vybrané z $\{a_n\}$.

Věta 7.17. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$ *pro každou vybranou posloupnost* $\{a_{n_k}\}$ *platí* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Důkaz. „$\Rightarrow$" Nechť $a \in \mathbb{R}$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Poněvadž $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k_0} \geq n_0$ a $n_k \geq n_{k_0}$ pro každé $k \geq k_0$. Tedy pro každé $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, což znamená $\lim a_{n_k} = a$. Pro $a = \pm\infty$ dokážeme tvrzení analogicky.

„$\Leftarrow$" Je triviální. Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ pro každou n_k, platí to zejména pro $n_k = k$. □

Definice 7.18 (hromadného bodu)**.** Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme *hromadným bodem* posloupnosti a_n, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho indexů $m \in \mathbb{N}$ tak, že platí $|a_m - a| < \varepsilon$.

Příklad 7.19. Nalezněte hromadné body posloupnosti $\{a_n\} = \{2(-1)^n\}$.

Řešení. Platí $a_n = 2$ pro $n = 2k$ a $a_n = -2$ pro $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost má tedy dva hromadné body 2 a -2 (žádný další bod hromadným bodem být nemůže, protože vždy lze najít okolí, ve kterém se nenachází žádný bod posloupnosti).

Věta 7.20. *Číslo $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ $\Leftrightarrow$ existuje posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, která konverguje k číslu a.*

Důkaz. „$\Rightarrow$" Nechť a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. K $\varepsilon_1 = 1$ a $n_0 = 1$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq 1$ takové, že $|a_{n_1} - a| < 1$. K $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ a $n_1 + 1 \in \mathbb{N}$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ takové, že $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$. K $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ a $n_2 + 1 \in \mathbb{N}$ existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ takové, že $|a_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$. Touto konstrukcí dostaneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takových, že $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$. Protože $\lim \frac{1}{k} = 0$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\frac{1}{k} - 0| = \frac{1}{k} < \varepsilon$ pro $\forall k \geq k_0$. Tedy pro $k \geq k_0$ platí $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$, což znamená, že $\lim a_{n_k} = a$.

„$\Leftarrow$" Jestliže existuje $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim a_{n_k} = a$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall k \geq k_0$ (tedy pro nekonečně mnoho indexů k) platí $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, což znamená, že a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. □

Věta 7.21 (Bolzanova–Weierstrassova, Bernard Bolzano 1781–1848, Čech, Karl Weierstrass 1815–1897, Němec)**.** *Každá ohraničená posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.*

Důkaz. Ohraničenost $\{a_n\}$ znamená, že $h \leq a_n \leq H$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $M_k = \{a_n : n \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Z konstrukce plyne, že $M_k \neq \emptyset$ a M_k je shora ohraničená (H je její horní závora). Existuje tedy $b_k = \sup M_k$. Zřejmě $b_k \geq h$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a poněvadž $M_k \supseteq M_{k+1}$, platí $b_k \geq b_{k+1}$. Tedy posloupnost $\{b_k\}$ je nerostoucí a zdola ohraničená. Podle věty 7.12 je $\{b_k\}$ konvergentní, tj. existuje $b \in \mathbb{R}$ tak, že $\lim b_k = b$.

Ukažme, že b je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ je $|b_k - b| < \varepsilon$, což dává $b_k < b + \varepsilon$. Pro $k \geq k_0$ je také $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \geq a_k$. Celkově $a_k \leq b_k < b + \varepsilon$. Připusťme, že b není hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$. Pak v intervalu $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ leží pouze konečný počet členů této posloupnosti. To vzhledem k poslední nerovnosti znamená, že existuje $n_0 \geq k_0$ takové, že pro $k \geq n_0$ je $a_k \leq b - \varepsilon$. Tedy i $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \leq b - \varepsilon$. Protože pro dvě konvergentní $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $c_n \leq d_n$, platí $\lim c_n \leq \lim d_n$ (viz poznámka a) za větou 7.6), je $b = \lim b_k \leq b - \varepsilon$, což je spor. □

Přímým důsledkem vět 7.20 a 7.21 je následující tvrzení.

Věta 7.22. *Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Je-li množina hromadných bodů posloupnosti prázdná, je posloupnost neohraničená.*

Definice 7.23 (čísel lim sup a lim inf)**.** Buď $\{a_n\}$ posloupnost a M množina jejích hromadných bodů.

a) Nechť $M \neq \emptyset$. Je-li $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup_{n\to\infty} a_n := \max M$ (stručně $\limsup a_n$), je-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\liminf_{n\to\infty} a_n := \min M$. Není-li $\{a_n\}$ ohraničená shora (resp. zdola), klademe $\limsup a_n = \infty$ (resp. $\liminf a_n = -\infty$).

b) Nechť $M = \emptyset$. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená shora (resp. zdola), klademe $\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$, je-li $\{a_n\}$ (resp. $\limsup a_n = \liminf a_n = \infty$). Není-li $\{a_n\}$ ohraničená shora ani zdola, klademe $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

Číslo $\limsup a_n$ (resp. $\liminf a_n$) se nazývá *limes superior* (resp. *limes inferior*) posloupnosti $\{a_n\}$.

Poznámka. Stručně: $\limsup a_n$ (resp. $\liminf a_n$) je největší (resp. nejmenší) hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, pokud je tato posloupnost ohraničená shora (resp. zdola), lim sup (resp. lim inf) tedy představuje nejmenší (resp. největší) omezení posloupnosti shora (zdola) „v nekonečnu". Definice je korektní, lze totiž ukázat, že je-li množina hromadných bodů M shora (resp. zdola) ohraničená, pak existuje $\max M$ (resp. $\min M$). Dále lze ukázat, že v případě shora (resp. zdola) ohraničené posloupnosti

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}) \quad (\text{resp.} \quad \liminf a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k : k \geq n\})\ ).$$

Tyto vztahy se někdy berou za definiční. Dále zřejmě platí $\liminf a_n \leq \limsup a_n$, $\liminf a_n = \limsup a_n \Leftrightarrow$ existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim a_n$. Zdůrazněme, že na rozdíl od limity, $\limsup$ a $\liminf$ existují vždy!

Z početního hlediska je užitečné následující tvrzení:

Věta 7.24. *Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je ohraničená a $\{a_{n_k^{(1)}}\}, \{a_{n_k^{(2)}}\}, \dots, \{a_{n_k^{(\ell)}}\}$ jsou vybrané podposloupnosti z $\{a_n\}$ takové, že $\lim a_{n_k^{(j)}} = a^{(j)} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, \ell$ a platí $\{n_k^{(1)}\} \cup \{n_k^{(2)}\} \cup \dots \cup \{n_k^{(\ell)}\} = \mathbb{N}$. Potom $\limsup a_n = \max\{a^{(1)}, \dots, a^{(\ell)}\}$ a $\liminf a_n = \min\{a^{(1)}, \dots, a^{(\ell)}\}$.*

Důkaz. Nechť $\{a_{n_r}\}$ je vybraná podposloupnost z $\{a_n\}$ taková, že $\limsup a_n = \lim a_{n_r} \in \mathbb{R}$ (taková posloupnost určitě existuje, neboť $\limsup a_n$ je podle definice největším hromadným bodem a každý hromadný bod je podle věty 7.20 limitou nějaké vybrané podposloupnosti z $\{a_n\}$). Protože sjednocení posloupností výběrů $\{n_k^{(j)}\}$ je celá množina $\mathbb{N}$, musí platit, že průnik $\{n_r\} \cap \{n_k^{(j)}\}$ obsahuje nekonečně mnoho prvků (indexů) pro nějaké $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. Pokud prvky tohoto průniku uspořádáme do rostoucí posloupnosti $\{n_s\}$, pak $\{a_{n_s}\}$ je vybraná podposloupnost zároveň z $\{a_{n_r}\}$ i z $\{a_{n_k^{(j)}}\}$. Podle věty 7.17 je tedy $\lim a_{n_s} = \lim a_{n_r} = \lim a_{n_k}^{(j)} = a^{(j)} = \limsup a_n$. Protože číslo $a^{(j)}$ je limes superior posloupnosti, musí podle definice být největší ze všech čísel $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(\ell)}$. Pro $\liminf$ bychom ukázali analogicky. □

Poznámka. Tvrzení zůstane v platnosti, i když vynecháme předpoklad ohraničenosti $\{a_n\}$. Potom, pokud je některá z limit $a^{(1)}, \dots, a^{(\ell)}$ plus (resp. minus) nekonečno, tak namísto maxima (resp. minima) klademe plus (resp. minus) nekonečno.

Příklad 7.25. Určete $\liminf$ a $\limsup$ posloupnosti $\{a_n\} = \{2^{n \sin \pi n/2}\}$

Řešení. Platí $\lim a_{2n} = 2^0 = 1$, $\lim a_{4n-3} = \lim 2^n = \infty$, $\lim a_{4n-1} = \lim 2^{-n} = 0$, přičemž $\{2n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{4n - 3\}_{n=1}^{\infty} \cup \{4n-1\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{N}$ a tedy podle předchozí věty platí $\liminf a_n = 0$ a $\limsup a_n = \infty$.

Definice 7.26 (cauchyovské posloupnosti). Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *cauchyovská (fundamentální)*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ a $\forall m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Věta 7.27 (Cauchyovo–Bolzanovo kriterium konvergence, Augustin Louis Cauchy 1789–1857, Francouz). *Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní $\Leftrightarrow$ je cauchyovská.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní a $\lim a_n = a$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro $m \geq n_0$ je $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro $n \geq n_0$ a $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

„$\Leftarrow$“ Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská. K číslu 1 existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq N$ platí $|a_n - a_N| < 1$, tedy $a_N - 1 < a_n < a_N + 1$. Položme $h = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N - 1\}$, $H = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N + 1\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $h \leq a_n \leq H$, tedy $\{a_n\}$ je ohraničená a podle věty existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Současně existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall m, n \geq n_0$ je $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $n \geq n_0$ je libovolné. Zvolme $k_1 \geq k_0$ takové, že $n_{k_1} \geq n_0$. Pak $|a_n - a| = |a_n - a_{n_{k_1}} + a_{n_{k_1}} - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □