8 Funkce reálné proměnné

Definice 8.1 (funkce reálné proměnné)**.** *Funkcí reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Množina $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tak, že } y = f(x)\}$ se nazývá *definiční obor funkce* f. Množina $H(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tak, že } f(x) = y\}$ se nazývá *obor hodnot funkce* f.

Poznámka. Namísto $y = f(x)$ někdy píšeme $x \mapsto y$ nebo $x \overset{f}{\mapsto} y$. Prvky z $D(f)$ se nazývají *hodnoty nezávislé proměnné* (*argumentu*). Prvky z $H(f)$ se nazývají *hodnoty závislé proměnné* (*funkční hodnoty*). Pokud není explicitně uvedeno jinak, definičním oborem rozumíme největší (vzhledem k množinové inkluzi) množinu, pro jejíž prvky lze funkční hodnotu vypočítat.

Definice 8.2 (grafu funkce)**.** *Grafem funkce* f rozumíme množinu $G = \{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$, kde $[x, y]$ značí kartézské souřadnice bodu v rovině.

Příklad 8.3. Napište $D(f)$ a $H(f)$ pro funkce a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ je-li } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ je-li } x \in \mathbb{I} \end{cases}$ (Dirichletova funkce, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805–1859, Němec).

ad a) $D(f) = (-1, 1)$, neboť musí platit $1 - x^2 > 0 \Rightarrow 1 > x^2 \Rightarrow 1 > |x|$. $H(f) = \mathbb{R}$, neboť pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ je $r = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1 - x^2)r^2 = x^2 \Rightarrow r^2 = (1 + r^2)x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\pm|r|}{1+r^2}$. Znaménko u x musí být stejné jako znaménko u r, tedy $x = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \in (-1, 1)$.

ad b) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \{0, 1\}$.

Definice 8.4 (zúžení funkce)**.** a) Funkce g se nazývá *zúžením (restrikcí)* funkce f, jestliže $D(g) \subset D(f)$ a pro $\forall x \in D(g)$ platí $g(x) = f(x)$.

b) Řekneme, že $f = g$, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro $\forall x \in D(f)$ je $f(x) = g(x)$.

Definice 8.5 (početních operací s funkcemi)**.** Buďte f, g funkce, $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$. Pak definujeme

součet a rozdíl funkcí f, g: $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$,

součin funkcí f, g: $(fg)(x) := f(x)g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$,

podíl funkcí f, g: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \in D(f) \cap (D(g) \setminus \{x \in D(g) : g(x) = 0\})$,

absolutní hodnotu funkce f: $|f|(x) = |f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ pro $x \in D(f)$.

Definice 8.6 (ohraničenosti funkce)**.** Funkce f se nazývá *ohraničená* (*shora ohraničená, zdola ohraničená*), je-li množina $H(f)$ ohraničená (shora ohraničená, zdola ohraničená) podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

Poznámka. Funkce f je ohraničená právě tehdy, když existují $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a \leq f(x) \leq b$ pro každé $x \in D(f)$, což nastane právě tehdy, když existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq h$ pro každé $x \in D(f)$. Analogická tvrzení platí pro funkci ohraničenou shora nebo zdola.

Definice 8.7 (sudosti a lichosti funkce)**.** Funkce f se nazývá *sudá*, jestliže $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$. Funkce f se nazývá *lichá*, jestliže $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$.

Příklad 8.8. Příklady sudé funkce: x^2, $\cos x$, $|x|$. Příklady liché funkce: x^3, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.

Poznámka. Graf sudé funkce je symetrický pode osy y, graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Věta 8.9. *Má-li funkce f vlastnost $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$, pak ji lze vyjádřit jako součet funkce sudé a liché.*

Důkaz. $f(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$. Označíme-li $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$, pak $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x)+f(x)) = g(x)$, tj. g je sudá. Označíme-li $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, pak $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -f(x)$, tj. h je lichá. □

Definice 8.10 (periodičnosti funkce)**.** Buď $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Řekneme, že funkce f je *periodická s periodou* p, jestliže $x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f)$ a $f(x + p) = f(x)$.

Příklad 8.11. Funkce $\sin x, \cos x$ jsou periodické s periodou 2π, $\operatorname{tg} x$ s periodou π, $f(x) = c \in \mathbb{R}$ má periodu jakékoliv $p > 0$.

Poznámka. a) Je-li f periodická s periodou $p > 0$, pak je periodická i s periodou np, $n \in \mathbb{N}$.

b) Množina period periodické funkce je nekonečná, tedy neprázdná a zdola ohraničená nulou. Musí tedy existovat $p_0 = \inf\{p : p \text{ je perioda funkce } f\}$. Pokud p_0 je periodou f, nazýváme ji *nejmenší* nebo *základní periodou* funkce f. Periodická funkce nemusí mít nejmenší periodu. Např. periodou Dirichletovy funkce je každé kladné racionální číslo.

Definice 8.12 (monotonie funkce)**.** Řekneme, že funkce f je

(i) *rostoucí* (resp. *klesající*) *na intervalu* I, jestliže $I \subseteq D(f)$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).

(ii) *neklesající* (resp. *nerostoucí*) *na intervalu* I, jestliže $I \subseteq D(f)$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$).

Funkce buď rostoucí, nebo klesající na intervalu se nazývá *ryze monotónní na intervalu*, funkce buď nerostoucí, nebo neklesající na intervalu se nazývá *monotónní na intervalu.*

Poznámka. Slovo „interval I“ v předchozí definici lze nahradit slovem „množina $M \subseteq D(f)$“. Uvedené pojmy v definici lze namísto v intervalu (globální vlastnost) zavést také v bodě (lokální vlastnost).

Příklad 8.13. Ukažte, že funkce $f(x) = x^2$ není monotónní na $\mathbb{R}$, ale je monotónní na $\langle 0, \infty)$.

Řešení: Např. pro $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ je $x_1 < x_2$ a $f(x_1) = 4 < 9 = f(x_2)$, a pro $x_1 = -3$, $x_2 = -2$ je $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) = 9 > 4 = f(x_2)$, f tedy nemůže být na $\mathbb{R}$ monotónní. Omezíme-li se ale na interval $\langle 0, \infty)$, pak $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 x_1 < x_1 x_2 < x_2 x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$ (využili jsme axiomu (A13) množiny $\mathbb{R}$). Tedy, $f(x_1) < f(x_2)$, což znamená, že f je rostoucí, tedy je (ostře) monotónní.

Definice 8.14 (konevexnosti a konkávnosti funkce)**.** Řekneme, že funkce f je

(i) *konvexní* (resp. *konkávní*) na intervalu I, jestliže pro $\forall \xi \in \langle 0, 1\rangle$ a $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) \leq \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2)$ (resp. $f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) \geq \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2)$);

(ii) *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) na intervalu I, jestliže pro $\forall \xi \in (0, 1)$ a $\forall x_1 \neq x_2 \in I$ platí $f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) < \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2)$ (resp. $f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) > \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2)$).

Poznámka. Konvexnost znamená, že vedeme-li přímku body x_1 a x_2, pak pro libovolný bod $x_3 \in \langle x_1, x_2\rangle$ leží $f(x_3)$ pod nebo na této přímce.

Definice 8.15 (složené funkce)**.** Nechť f, φ jsou funkce přičemž platí $H(\varphi) \subseteq D(f)$. Pak funkce $F = f \circ \varphi : D(\varphi) \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f(\varphi(x))$$

se nazývá *složená funkce.* Funkce φ se nazývá *vnitřní složka funkce* F, funkce f se nazývá *vnější složka funkce* F.

Příklad 8.16. a) $\varphi(x) = x^2$, $H(\varphi) = \langle 0, \infty)$ $f(u) = \sin u$, $D(f) = (-\infty, \infty)$. Tedy $H(\varphi) \subseteq D(f)$, $F(x) = f(\varphi(x)) = \sin x^2$. b) $\varphi(x) = -x^2$, $H(\varphi) = (-\infty, 0\rangle$, $f(x) = \ln u$, $D(f) = (0, \infty)$. Složená funkce neexistuje.

Poznámka. Podmínka $H(\varphi) \subseteq D(f)$ je nutná a postačující pro existenci složené funkce. Není-li tato podmínka splněna, lze jí někdy dosáhnout vhodným zúžením $D(\varphi)$. Proces skládání lze opakovat, např. $y = \ln^3(\sqrt{x})$ je složení $y = u^3$, $u = \ln v$, $v = \sqrt{x}$.

Definice 8.17 (inverzní funkce)**.** *Inverzní funkce* k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí: $D(f^{-1}) = H(f)$ a zároveň každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Poznámka. a) Protože f je prosté a zároveň surjekce $D(f)$ na $H(f)$, je tedy bijekcí mezi $D(f)$ a $H(f)$ a musí platit také $H(f^{-1}) = D(f)$.

b) Graf inverzní funkce f^{-1} je symetrický s grafem funkce f podle osy prvního a třetího kvadrantu.

Věta 8.18. *Je-li funkce f ryze monotónní, pak je prostá.*

Důkaz. Nechť pro určitost je f rostoucí a buďte $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$. Pokud $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$; pokud $x_1 > x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$, a tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

Poznámka. Naopak tvrzení neplatí, např. $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ na } \langle 0, 1\rangle \\ 2 - x \text{ na } (1, 2) \end{cases}$ je na intervalu $(0, 2)$ prostá, ale není ryze monotónní.

Věta 8.19. *Nechť f je rostoucí (resp. klesající) na množině $D(f)$. Pak f^{-1} je rostoucí (resp. klesající) na množině $H(f)$.*

Důkaz. Nechť f je rostoucí na $D(f)$ a nechť $y_1, y_2 \in H(f)$, $y_1 < y_2$. Označme $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, tj. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Kdyby $x_1 \geq x_2$, pak by $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, což by byl spor s předpokladem $y_1 < y_2$. Platí tedy $x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2$. □

9 Rozdělení funkcí

Základní elementární funkce: konstantní, mocninná, exponenciální a logaritmická, goniometrická a cyklometrická, hyperbolická a hyperbolometrická funkce.

Elementární funkce: jsou to funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pouze pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a mocnění racionálním číslem, přičemž můžeme použít i skládání. Ne každá funkce je elementární, např. $\chi(x)$ nebo $\operatorname{sgn}(x)$.

Algebraické funkce: jsou to ty elementární funkce, které lze vytvořit pomocí operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a mocnění s racionálním exponentem pouze z konstantní funkce a mocninné funkce x^α, $\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, přičemž opět připouštíme skládaní. Např. $x^3 - 2x + 1$, $\sqrt[3]{x^2+1}$.

Transcendentní funkce: jsou to elementární funkce, které nejsou algebraické, např. $\sin(x^2 - 1)$, $\ln x\mathrm{e}^{-x}$.

Vyšší transcendentní funkce: jsou funkce, které nelze vyjádřit v konečném tvaru pomocí elementárních funkcí, např. $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Racionální funkce: jsou to algebraické funkce, které jsou vytvořené pouze pomocí operací sčítání, odčítání, násobení a dělení z konstantní funkce a funkce x, např. $x^2 + 4x - 5$, $\frac{x^2-2}{x^3+1}$. Racionální funkce lze dále rozdělit na *polynomy* a *racionální lomené funkce (ryze a neryze)*.

Iracionální funkce: jsou to algebraické funkce, které nejsou racionální, např. $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x-1}}$

10 Základní elementární funkce

Funkce exponenciální a logaritmická

U exponenciální funkce jde o zavedení obecné mocniny a^x, kde $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Vyjdeme z

$$x = n \in \mathbb{N}: \ a^n := \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n\times}, \quad a^0 := 1, \quad x = -n \in \mathbb{Z}: \ a^{-n} := \frac{1}{a^n},$$

$$x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}: \ a^{1/n} := \sqrt[n]{a} \text{ je číslo, pro které } (\sqrt[n]{x})^n = a,$$

$$x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}: \ a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Lemma 10.1. a) *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost racionálních čísel $\{x_n\}$ s $\lim x_n = x$ (existuje dokonce monotónní posloupnost s limitou x).*

b) *Nechť $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel taková, že $\lim x_n = x$, pak existuje $\lim a^{x_n} = \alpha \in \mathbb{R}$. Platí $\alpha > 0$ a tato hodnota nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$.*

Důkaz. ad a) Tvrzení je důsledkem věty 6.10. Hledanou posloupnost je možné sestrojit takto. Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ vybereme z intervalu $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ libovolně $x_n \in \mathbb{Q}$ (takové racionální číslo jistě existuje podle věty 6.10(ii)). Dostáváme tak posloupnost $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ tak, že $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Protože $\lim(x - \frac{1}{n}) = \lim(x + \frac{1}{n}) = x$, podle věty o třech posloupnostech (viz věta 7.10) je $\lim x_n = x$. Pokud bychom racionální x_n vybírali např. z intervalu $(x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n+1})$ (resp. $(x + \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n})$), tak výsledná posloupnost bude rostoucí (resp. klesající).

ad b) Nechť $a > 1$ a $\{x_n\}$ neklesající posloupnost racionálních čísel s limitou x. Neklesající posloupnost znamená, že $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$, což dává $a^{x_1} \leq a^{x_2} \leq a^{x_3} \leq \ldots$, tj. $\{a^{x_n}\}$ je neklesající. Zvolíme-li $h \in \mathbb{Q}$ tak, že $h \geq x$, pak také $h \geq x_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, a tudíž $a^h \geq a^{x_n}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. To ale znamená, že $\{a^{x_n}\}$ je shora ohraničená. Podle věty 7.12 (o monotónních posloupnostech) existuje $\lim a^{x_n} = \alpha \in \mathbb{R}$, přičemž $\alpha \geq a^{x_n} > 0$. Dále, nechť nyní $\{y_n\} \subset \mathbb{Q}$ je libovolná posloupnost, která má limitu x a ukažme, že také $\lim a^{y_n} = \alpha$. Položme $z_n = y_n - x_n$ (z_n je tedy racionální číslo). Pak podle věty 7.8 platí $\lim z_n = \lim y_n - \lim x_n = x - x = 0$. Ukažme, že $\lim a^{z_n} = 1$. Platí $\lim \sqrt[n]{a} = 1 = \lim a^{1/n}$ (tuto limitu lze ověřit pomocí Bernoulliovy nerovnosti) a tedy také (podle věty 7.8(iv)) $\lim \frac{1}{a^{1/n}} = 1$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_1$ je $1 - \varepsilon < a^{1/n} < 1 + \varepsilon$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_2$ je $1 - \varepsilon < a^{-1/n} < 1 + \varepsilon$. Tedy pro $m = \max\{n_1, n_2\}$ platí $1 - \varepsilon < a^{-1/m} < 1 < a^{1/m} < 1 + \varepsilon$. Protože $\lim z_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ je $-\frac{1}{m} < z_n < \frac{1}{m}$ a tedy $1 - \varepsilon < a^{-1/m} < a^{z_n} < a^{1/m} < 1 + \varepsilon$, což znamená, že $\lim a^{z_n} = 1$. Celkově tedy, $\lim a^{y_n} = \lim a^{z_n + x_n} = \lim(a^{z_n} \cdot a^{x_n}) = \lim a^{z_n} \cdot \lim a^{x_n} = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

Nechť $a = 1$. Tento případ je triviální, neboť $1^{x_n} = 1$ pro každé $x_n \in \mathbb{Q}$ a tedy $\lim 1^{x_n} = 1$.

Nechť $0 < a < 1$. Pak $b = \frac{1}{a} > 0$. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x, pak podle první části důkazu existuje limita $\beta = \lim b^{x_n}$. Podle věty 7.8(iv) existuje $\lim a^{x_n} = \lim \frac{1}{b^{x_n}} = \frac{1}{\beta}$. $\square$

Definice 10.2 (exponenciální funkce)**.** Buď $a > 0$. *Exponenciální funkce* $f(x) = a^x$ *je definována pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *předpisem* $a^x = \lim a^{x_n}$, kde $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x.

Vlastnosti:

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$;
b) Pro každá dvě $x, y \in \mathbb{R}$ platí $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$;
c) Pro $a > 1$ je funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající, pro $a = 1$ je $1^x = 1$.

Poznámka. a) Je-li $x > 0$, pak lze definici rozšířit i na případ $a = 0$, kdy klademe $0^x = 0$.

b) Z exponenciálních funkcí má největší význam funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$, kde $\mathrm{e} = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (označuje se také $\exp x$). Tuto funkci nazýváme *přirozená exponenciální funkce.*

Definice 10.3 (logaritmické funkce)**.** Buď $a > 0$, $a \neq 1$. Inverzní funkce k funkci $f(x) = a^x$ se nazývá *logaritmická funkce.* Značíme ji $\log_a x$.

Vlastnosti:

(i) $D(f) = \mathbb{R}^+$, $H(f) = \mathbb{R}$;
(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, pro $x \in \mathbb{R}^+$ a $y \in \mathbb{R}$ platí: $\log_a x^y = y \log_a x$;
(iii) Pro $a > 0$ je rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající.

Poznámka. Buďte $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1 \neq b$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ platí $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$. Podobně jako u exponenciální funkce má největší význam logaritmická funkce $\log_e x$. Značí se $\ln x$ a nazývá *přirozená* nebo *přirozený logaritmus.* Libovolný logaritmus lze převést na přirozený: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Také obecnou exponenciální funkci lze převést na přirozenou, neboť pro $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^{x \ln a} = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = a^x$.

Mocninná funkce

Definice 10.4 (mocninné funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x) = x^a$ definovaná jako $x^a := \mathrm{e}^{a \ln x}$ se nazývá *obecná mocninná funkce.*

Vlastnosti:

a) $D(f) = \mathbb{R}^+$, $H(f) = (0, \infty)$;
b) Pro každá dvě $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí: $(xy)^a = x^a y^a$, $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$.
c) Je rostoucí pro $a > 0$ a klesající pro $a < 0$.

Poznámka. Mocninná funkce má v některých speciálních případech definiční obor širší než $(0, \infty)$.

· Je-li $a \in \mathbb{N}_0$, pak $D(f) = \mathbb{R}$.
· Je-li $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, pak $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
· Je-li $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, m, n nesoudělná a n liché, pak pro $a \geq 0$ je $D(f) = \mathbb{R}$ a pro $a < 0$ je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Funkce goniometrické a cyklometrické

Na jednotkovou kružnici se středem v počátku naneseme od bodu $A = (1, 0)$ oblouk délky $|x|$ v kladném smyslu pro $x > 0$ a v záporném smyslu pro $x < 0$. Obdržíme bod B, jehož první souřadnici označíme $\cos x$ a druhou $\sin x$. Dále klademe $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Tento popis není definicí, protože se používá vágní pojem „délka oblouku“, který nebyl přesně zaveden. *Goniometrické funkce* sin, cos, tg, cotg jsou tedy prozatím dány intuitivně.

Vlastnosti:

a) $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle$, $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $H(\operatorname{tg}) = H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$;
b) sin, cos jsou periodické se základní periodou 2π, tg, cotg jsou periodické se základní periodou π.
c) sin je rostoucí na $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, klesající na $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, cos je rostoucí na $\langle (2k-1)\pi, 2k\pi \rangle$, klesající na $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, cotg je klesající na $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
d) sin, tg, cotg jsou liché, cos je sudá funkce;
e) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$, $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pro všechna přípustná x;
f) Vzorce (vybrané):

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \quad \sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)),$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y)), \quad \sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)).$$

Funkce cyklometrické jsou funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Ve všech případech je nutno zúžit definiční obor příslušné goniometrické funkce tak, aby funkce byla ryze monotónní (tedy prostá). Je přirozené tento interval vzít „co nejblíže počátku“.

Pro $\begin{array}{l}\sin\\ \cos\\ \mathrm{tg}\\ \mathrm{cotg}\end{array}$ vezmeme interval $\begin{array}{l}\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle\\ \langle 0,\pi\rangle\\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ (0,\pi)\end{array}$. Funkce cyklometrické se nazývají *arcus* a značí se arcsin, arccos, arctg, arccotg.

Vlastnosti:

(i) $D(\arcsin) = D(\arccos) = \langle -1,1\rangle$, $H(\arcsin) = \left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$, $H(\arccos) = \langle 0,\pi\rangle$, $D(\mathrm{arctg}) = D(\mathrm{arccotg}) = \mathbb{R}$, $H(\mathrm{arctg}) = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $H(\mathrm{arccotg}) = (0,\pi)$;

(ii) Pro každé $x \in \langle -1,1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(iii) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}$.

(iv) Vztahy mezi cyklometrickými funkcemi:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arccotg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arccotg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\mathrm{arctg}\, x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arccotg}\, x,$$
$$\mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x.$$

Lze odvodit celou řadu dalších identit podobně jako u goniometrických funkcí, např. platí $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, y = \mathrm{arctg}\,\frac{x+y}{1-xy}$ pro $|xy| < 1$.

Poznámka. Namísto kartézských souřadnic $[x,y]$ bodu v rovině lze tento bod zapsat pomocí polárních souřadnic $[\varphi,\rho]$, $\varphi \in \langle 0,2\pi)$. Transformace polárních souřadnic na kartézské je $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a transformace kartézských na polární je

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\,2(x,y),$$

kde $\mathrm{arctg}\,2(x,y) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \langle 0,2\pi)$ definovaná

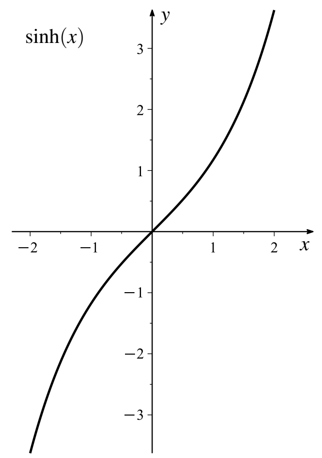
$$\mathrm{arctg}\,2(x,y) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} & \text{pro } x>0, y\geq 0,\\ \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}+\pi & \text{pro } x<0, y\in\mathbb{R},\\ \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}+2\pi & \text{pro } x>0, y<0,\\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x=0, y>0,\\ \frac{3\pi}{2} & \text{pro } x=0, y<0,\\ \text{nedefinováno} & \text{pro } x=0, y=0.\end{cases}$$

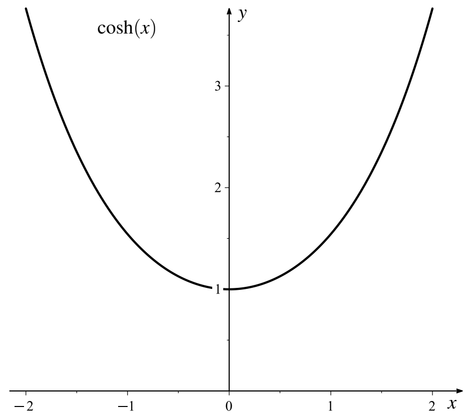
Pro počátek $[0,0]$ je $\rho = 0$ a φ není funkcí $\mathrm{arctg}\,2$ definováno, pro tento bod pak obvykle klademe $\varphi = 0$.

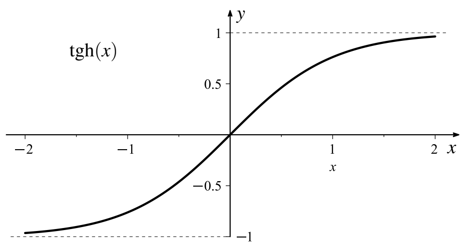
Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

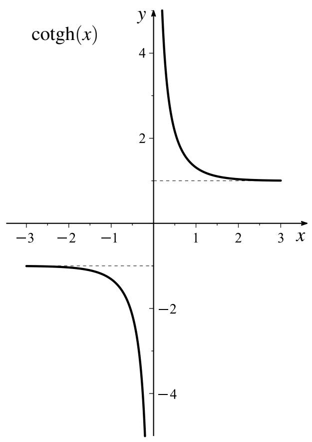
Hyperbolické funkce jsou sinh, cosh, tgh, cotgh. Mají podobné vlastnosti jako goniometrické funkce. Definujeme

$$\sinh x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ (řetězovka)},$$
$$\mathrm{tgh}\, x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \mathrm{cotgh}\, x := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$









Vlastnosti:

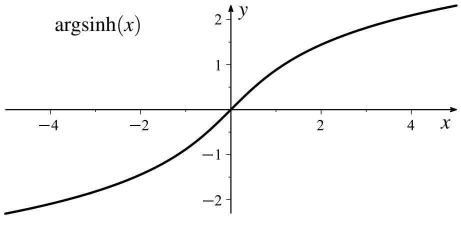
a) $D(\sinh) = D(\cosh) = D(\mathrm{tgh}) = \mathbb{R}$, $D(\mathrm{cotgh}) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $H(\sinh) = \mathbb{R}$, $H(\cosh) = \langle 1, \infty)$, $H(\mathrm{tgh}) = (-1, 1)$, $H(\mathrm{cotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;

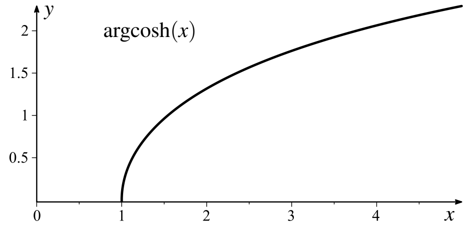
b) sinh, tgh a cotgh jsou liché funkce, cosh je sudá.

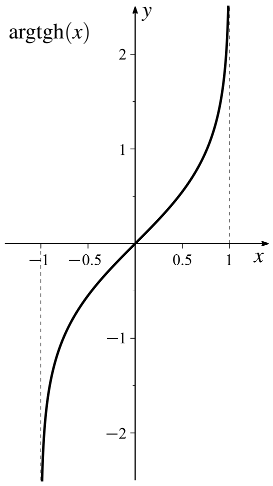
c) Vzorce:

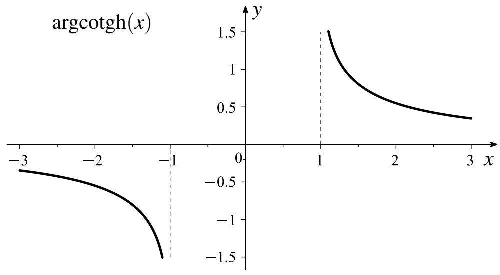
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x,$$
$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \quad \mathrm{tgh}\, 2x = \frac{2\,\mathrm{tgh}\, x}{1 + \mathrm{tgh}^2\, x},$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$$
$$\mathrm{tgh}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tgh}\, x \pm \mathrm{tgh}\, y}{1 \pm \mathrm{tgh}\, x\, \mathrm{tgh}\, y}.$$

Hyperbolometrické funkce argsinh, argcosh, argtgh, argcotgh (arg je zkratka z „argument") jsou funkce inverzní k hyperbolickým (hyperbolický kosinus není na svém $D(f)$ prostá, bereme tedy interval $\langle 0, \infty)$).









Vlastnosti:

(i) $D(\text{argsinh}) = \mathbb{R}$, $D(\text{argcosh}) = \langle 1, \infty)$, $D(\text{argtgh}) = (-1, 1)$, $D(\text{argcotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $H(\text{argsinh}) = \mathbb{R}$, $H(\text{argcosh}) = \langle 0, \infty)$, $H(\text{argtgh}) = \mathbb{R}$, $H(\text{argcotgh}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(ii) argsinh, argtgh a argcotgh jsou liché funkce;

(iii) Na svých definičních oborech platí:

$$\begin{aligned}
&\text{argsinh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \text{argcosh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\\
&\text{argtgh}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{argcotgh}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.
\end{aligned}$$