11 Racionální funkce

Polynomy

Definice 11.1 (polynomu)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Polynom (celistvá racionální funkce)* je funkce tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Číslo n nazýváme *stupeň polynomu* a čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazýváme *koeficienty polynomu.*

Pro každý polynom P platí $D(P) = \mathbb{R}$ a $H(P) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ \langle b, \infty) & \text{je-li } n \text{ sudé a } a_n > 0, \\ (-\infty, b\rangle & \text{je-li } n \text{ sudé a } a_n < 0. \end{cases}$

Budeme potřebovat širší číselný obor než je $\mathbb{R}$, tím budou komplexní čísla. *Množina komplexních čísel* je množina

$$\mathbb{C} := \{a + b\,\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R}\}, \text{ kde } \mathrm{i}^2 = -1 \quad (\mathrm{i} \text{ se nazývá } \textit{imaginární jednotka}),$$

s operacemi $+ : (a_1{+}b_1\,\mathrm{i}){+}(a_2{+}b_2\,\mathrm{i}) = (a_1{+}a_2){+}(b_1{+}b_2)\,\mathrm{i}$ a $\cdot : (a_1{+}b_1\,\mathrm{i}){\cdot}(a_2{+}b_2\,\mathrm{i}) = (a_1a_2{-}b_1b_2){+}(a_1b_2{+}a_2b_1)\,\mathrm{i}$. Je-li $z = a + b\,\mathrm{i}$, pak $\overline{z} = a - b\,\mathrm{i}$ se nazývá *číslo komplexně sdružené*, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ se nazývá *absolutní hodnota (modul)* čísla z. Platí $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ a $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dále platí $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$. Množina $\mathbb{C}$ s operacemi $+, \cdot$ splňuje axiomy (A1)–(A9) z definice reálných čísel, tvoří tedy pole. Toto pole však nelze uspořádat.

Definice 11.2 (kořene polynomu)**.** Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen (nulový bod)* polynomu P, jestliže platí $P(\alpha) = 0$. Je-li α kořenem P, pak lineární polynom $x - \alpha$ se nazývá *kořenovým činitelem (faktorem)* polynomu P.

Věta 11.3 (základní věta algebry)**.** *Každý polynom stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficienty má komplexní kořen.*

Tato věta je známá od 17. století. První (chybný) pokus o důkaz publikoval d'Alembert roku 1746 (Jean Baptiste Le Rond d'Alembert, 1717–1783, Francouz), větu dokázal Gauss roku 1799 (Carl Friedrich Gauss 1777–1855, Němec). Dodneška je známo mnoho důkazů, zajímavé je, že ač se jedná o algebraický problém, žádný z důkazů nevyužívá čistě algebraické postupy. Obsáhle je o důkazech pojednáno např. v diplomové práci `http://is.muni.cz/th/326140/prif_m/DP_Cechova_Petra.pdf`.

Věta 11.4 (Bézoutova věta (Étienne Bézout 1730–1783, Francouz))**.** *Buď P polynom stupně $n \geq 1$. Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořenem P, právě když existuje polynom Q stupně $n - 1$ takový, že $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť P je polynom stupně n a $\alpha \in \mathbb{C}$ jeho kořen. Pak

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - 0 = P(x) - P(\alpha) \\ &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - (a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0) \\ &= a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha) + a_0(1 - 1). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $(x^k - \alpha^k) = (x - \alpha)(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + x^{k-3}\alpha^2 + \cdots + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1})$. Tedy

$$\begin{aligned} P(x) = a_n(x - \alpha)(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + x^{n-3}\alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}) \\ + a_{n-1}(x - \alpha)(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \cdots + \alpha^{n-2}) + \cdots + a_1(x - \alpha). \end{aligned}$$

Označíme-li $Q(x) = a_n(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + x^{n-3}\alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \cdots + \alpha^{n-2}) + \cdots + a_1$, dostaneme tvrzení.

„$\Leftarrow$“ Zřejmé. □

Je-li $n \geq 1$ stupeň P, pak podle předchozí věty existuje kořen α_1 a polynom Q_1 stupně $n - 1$ takový, že $P(x) = (x - \alpha_1)Q_1(x)$. Je-li $n - 1 \geq 1$, pak $Q_1(x) = (x - \alpha_2)Q_2(x)$ a tedy $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q_2(x)$. Pokud budeme takto analogicky pokračovat, dostaneme po n krocích

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n).$$

Může se stát, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$, $k \leq n$. Pak $P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}\dots(x - \alpha_m)^{k_m}$, přičemž $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Definice 11.5 (násobného kořene polynomu)**.** Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *k-násobný kořen* polynomu P, jestliže $P(x) = (x - \alpha)^k Q(x)$, kde Q je polynom nemající kořen α (1-násobný kořen se nazývá *jednoduchý*.)

Důsledkem věty 11.4 a úvahy pod touto větou je tvrzení:

Věta 11.6 (o rozkladu polynomu na kořenové faktory). *Nechť P je polynom stupně $n \geq 1$ a nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jsou všechny jeho navzájem různé kořeny, přičemž α_1 je k_1-násobný, α_2 je k_2-násobný, ..., α_m je k_m-násobný. Pak*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_m)^{k_m}, \quad k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Důsledek 11.7. *Každý polynom stupně $n \geq 1$ má právě n kořenů, pokud k-násobný kořen počítáme k-krát.*

Poznámka. Předchozí tvrzení mají existenční charakter, nedávají návod, jak kořeny vypočítat. Pro polynomy stupně 1,2,3 a 4 existují obecné vzorce pro výpočet kořenů, pro polynom stupně 5 a výše už žádný takový vzorec neexistuje (přesněji, lze dokázat, že takový vzorec nelze napsat). V praxi je pro nalezení kořenů možno použít Hornerovo (Ruffinovo) schéma (William Gorge Horner 1786–1837, Angličan, Paolo Ruffini 1765–1822, Ital). Je to „tipovací“ metoda pro získání reálného kořene, jejíž předností je, že při jeho nalezení zároveň obdržíme koeficienty polynomu Q z věty 11.4).

Příklad 11.8. Rozložte polynomy a) $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$, b) $P(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$.
Řešení. ad a) $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = x^3(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) = (x-1)\Big(x - \big(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\Big)^2\Big(x - \big(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\Big)^2$.

ad b) $P(x) = (x+1)(x-2)^2(x^2+1)$.

Věta 11.9. *Nechť polynom P má reálné koeficienty a komplexní kořen α. Pak má také komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha}$ a násobnosti kořenů α a $\overline{\alpha}$ jsou stejné.*

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ je $\overline{x} = x$ a tedy $\overline{P(x)} = \bar{a}_n\bar{x}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \dots + \overline{a}_0 = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = P(x)$. Podle věty 11.6 je $P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_m)^{k_m}$, a tedy $\overline{P(x)} = a_n(x-\overline{\alpha}_1)^{k_1}(x-\overline{\alpha}_2)^{k_2}\dots(x-\overline{\alpha}_m)^{k_m}$ (využíváme vlastností $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ a $\overline{z}^n = \overline{z^n}$). Z rovnosti $\overline{P(x)} = P(x)$ plyne tvrzení. □

Poznámka. Polynom s reálnými koeficienty se nazývá *reálný polynom*, s komplexními koeficienty *komplexní polynom.*

Věta 11.10 (o rozkladu reálného polynomu v reálném oboru na ireducibilní polynomy). *Buď P reálný polynom stupně $n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jsou všechny jeho reálné kořeny, přičemž α_1 je k_1-násobný, α_2 je k_2-násobný,..., α_m je k_m-násobný. Nechť $a_1 \pm \mathrm{i}\,b_1, a_2 \pm \mathrm{i}\,b_2, \dots, a_r \pm \mathrm{i}\,b_r$ jsou všechny jeho imaginární kořeny, přičemž $a_1 \pm \mathrm{i}\,b_1$ je ℓ_1-násobný, $a_2 \pm \mathrm{i}\,b_2$ je ℓ_2-násobný,..., $a_r \pm \mathrm{i}\,b_r$ je l_r-násobný. Pak je*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_m)^{k_m}\left[(x-a_1)^2+b_1^2\right]^{\ell_1}\left[(x-a_2)^2+b_2^2\right]^{\ell_2}\dots\left[(x-a_r)^2+b_r^2\right]^{\ell_r},$$

kde $k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2\ell_1 + 2\ell_2 + \dots + 2\ell_r = n$.

Důkaz. Podle věty 11.6 a 11.9 v rozkladu P vystupuje součin faktorů

$$\begin{aligned}
&[x - (a_j + \mathrm{i}\,b_j)]^{\ell_j}[x - (a_j - \mathrm{i}\,b_j)]^{\ell_j} \\
&\quad = [x^2 - (a_j + \mathrm{i}\,b_j)x - (a_j - \mathrm{i}\,b_j)x + (a_j + \mathrm{i}\,b_j)(a_j - \mathrm{i}\,b_j)]^{\ell_j} = [x^2 - 2a_jx + a_j^2 + b_j^2 + \mathrm{i}(a_jb_j - a_jb_j)]^{\ell_j} \\
&\quad = [x^2 - 2a_jx + a_j^2 + b_j^2]^{\ell_j} = [(x-a_j)^2 + b_j^2]^{\ell_j}.
\end{aligned}$$

□

Poznámka. Faktory $(x-a_j)^2 + b_j^2$ se někdy nahrazují kvadratickým polynomem $x^2 + p_jx + q_j$ se záporným diskriminantem $p_j^2 - 4q_j$.

Příklad 11.11. Rozložte v reálném oboru polynom $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$.
Řešení. Podle předchozího příkladu

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+1) = (x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \\
&= (x-1)\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2 \quad \text{nebo} \quad P(x) = (x-1)(x^2+x+1)^2.
\end{aligned}$$

Racionální lomené funkce

Definice 11.12 (racionální lomené funkce)**.** Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce R daná $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá *racionální lomená funkce*. Je-li stupeň P menší než stupeň Q, funkce R se nazývá *ryze lomená*, je-li stupeň P větší nebo roven než stupeň Q, funkce R se nazývá *neryze lomená*.

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jsou všechny reálné kořeny polynomu Q. Je-li R neryze lomená funkce, lze provést naznačené dělení. Výsledkem je polynom S a zbytek – polynom T, který je buď nulový nebo stupeň T je menší než stupeň Q. Tedy $R(x) = S(x)$ nebo $R(x) = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}$. Odtud plyne, že neryze lomená funkce je buď polynomem nebo ji lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Lemma 11.13. *Buď $R = \frac{P}{Q}$ ryze lomená racionální funkce a nechť α je reálný k-násobný kořen polynomu Q, tj. $Q(x) = (x-\alpha)^k Q_1(x)$, $Q_1(\alpha) \neq 0$. Pak existují reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$ taková, že pro všechna $x \in D(R)$ platí*

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

kde P_1 je buď nulový polynom, nebo stupeň P_1 je menší než stupeň Q_1.

Důkaz. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a}{(x-\alpha)^k} + \frac{P(x) - aQ_1(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)}$. Položme $a = a_k = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$. Pak $P(\alpha) - a_k Q_1(\alpha) = 0$. Je-li $P(x) - a_k Q_1(x) = 0$ nulový polynom, tak tvrzení platí. Nechť $P(x) - a_k Q_1(x)$ není nulový. Pak α je jeho kořen a podle věty 11.4 je $P(x) - a_k Q_1(x) = (x-\alpha) P_k(x)$ a tedy

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{P_k(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}.$$

Stejný postup aplikujeme na racionální funkci $\frac{P_k(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}$ a po k krocích dostaneme tvrzení. □

Lemma 11.14. *Buď $R = \frac{P}{Q}$ ryze lomená racionální funkce a nechť $\alpha = a + \mathrm{i}\, b$ je imaginární r-násobný kořen polynomu Q, tj. $Q(x) = [(x-a)^2 + b^2]^r Q_1(x)$, $Q_1(a + \mathrm{i}\, b) \neq 0$. Pak existují reálná čísla $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_r, d_r$, taková, že pro všechna $x \in D(R)$ platí*

$$R(x) = \frac{P(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^r Q_1(x)} = \frac{c_r x + d_r}{[(x-a)^2 + b^2]^r} + \frac{c_{r-1} x + d_{r-1}}{[(x-a)^2 + b^2]^{r-1}} + \dots + \frac{c_2 x + d_2}{[(x-a)^2 + b^2]^2} + \frac{c_1 x + d_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

kde P_1 je buď nulový polynom, nebo stupeň P_1 je menší než stupeň Q_1.

Důkaz. Pro každá dvě $c, d \in \mathbb{R}$ je

$$\frac{P(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^r Q_1(x)} = \frac{cx + d}{[(x-a)^2 + b^2]^r} + \frac{P(x) - (cx+d) Q_1(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^r Q_1(x)}.$$

Nechť $\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \frac{P(a + \mathrm{i}\, b)}{Q_1(a + \mathrm{i}\, b)} = p + \mathrm{i}\, q$. Položme $c = c_r = \frac{q}{b}$, $d = d_r = \frac{pb - qa}{b}$. Pak je

$$P(\alpha) - (c_r \alpha + d_r) Q_1(\alpha) = P(\alpha) - \left(\frac{q}{b} a + \mathrm{i}\, \frac{q}{b} b + p - \frac{qa}{b}\right) Q_1(\alpha) = P(\alpha) - (p + \mathrm{i}\, q) Q_1(\alpha) = P(\alpha) - \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} Q_1(\alpha) = 0.$$

Je-li $P(x) - (c_r x + d_r) Q_1(x)$ nulový polynom, tvrzení platí. Nechť $P(x) - (c_r x + d_r) Q_1(x)$ není nulový. Pak je číslo α jeho kořenem. Podle věty 11.9 je také $\bar{\alpha}$ jeho kořenem a $P(x) - (c_r x + d_r) Q_1(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) P_r(x) = [(x-a)^2 + b^2] P_r(x)$,

$$\frac{P(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^r Q_1(x)} = \frac{c_r x + d_r}{[(x-a)^2 + b^2]^r} + \frac{P_r(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{r-1}}.$$

Stejný postup aplikujeme na racionální funkci $\frac{P_r(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{r-1}}$ a po r krocích obdržíme tvrzení. □

Zlomky tvaru

$$\frac{a}{(x-\alpha)^j} \quad (j=1,2,\dots,k) \quad \text{a} \quad \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^j} \quad (j=1,2,\dots,r)$$

nazýváme *parciální zlomky.* Důsledkem předchozích dvou tvrzení je

Věta 11.15 (o rozkladu ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky)**.** *Každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků. Každému reálnému k-násobnému kořenu α jmenovatele odpovídá skupina zlomků*

$$\frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{x-\alpha}$$

a každému imaginárnímu r-násobnému kořenu $a + \mathrm{i}\, b$ jmenovatele odpovídá skupina zlomků

$$\frac{c_r x + d_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{c_{r-1}x + d_{r-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}} + \dots + \frac{c_2 x + d_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \frac{c_1 x + d_1}{(x-a)^2+b^2}.$$

Poznámka. Koeficienty v rozkladu racionální lomené funkce lze vypočítat postupem naznačeným v důkazech lemmatů 11.13 a 11.14, v praxi se však používá *metoda neurčitých koeficientů*, viz následující příklad.

Příklad 11.16. Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2}$.
Řešení. Rozklad jmenovatele je $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x-2) + x - 2 = (x^2+1)(x-2)$ a tedy

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad / \cdot (x^2+1)(x-2) \\
3x^2 - 5x + 8 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2) = Ax^2 + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C \\
&= (A+B)x^2 + (-2B+C)x + A - 2C.
\end{aligned}$$

Protože dva polynomy se sobě rovnají pouze v případě, kdy se rovnají koeficienty u odpovídajících si mocnin, máme

$$\begin{aligned}
x^2 &: \quad 3 = A + B, \\
x^1 &: -5 = -2B + C, \\
x^0 &: \quad 8 = A - 2C,
\end{aligned}$$

což je SLR. Vyřešením máme $A = 1$, $B = 1$, $C = -3$, a tedy

$$\frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{x-3}{x^2+1}.$$