12 Limita funkce

Definice 12.1 (limity funkce)**.** Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $a \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, jestliže ke každému okolí $O(a)$ existuje ryzí okolí $O^*(x_0)$ takové, že pro každé $x \in O^*(x_0)$ je $f(x) \in O(a)$.

Poznámka. a) Definice zahrnuje 4 případy: je-li $x_0, a \in \mathbb{R}$, hovoříme o *vlastní limitě ve vlastním bodě*, je-li $x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$, hovoříme o *vlastní limitě v nevlastním bodě*, je-li $x \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$, hovoříme o *nevlastní limitě ve vlastním bodě* a je-li $x_0 = \pm\infty$ a $a = \pm\infty$, hovoříme o *nevlastní limitě v nevlastním bodě*.

b) V definici se hovoří o ryzím okolí bodu x_0, nevyskytuje se tedy žádný požadavek na $f(x_0)$. Existence a hodnota $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nezávisí na tom, zda $x_0 \in D(f)$, a pokud ano, tak nezávisí na hodnotě $f(x_0)$. Existuje-li však $\lim_{x\to x_0} f(x)$, musí být funkce f definována v nějakém ryzím okolí bodu x_0.

Příklad 12.2. Ukažte, že $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, kde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$

Řešení. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Potom $\forall x \in O^*_\delta(0)$, kde $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, platí $|x^2 - 0| = x^2 < \delta^2 = \varepsilon$.

Věta 12.3 (Heineho podmínka, Heinrich Eduard Heine 1821–1881, Němec)**.** *Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow$ pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq D(f)$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ a pro $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq x_0$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ a $\{x_n\}$ je posloupnost splňující předpoklady. Buď $O(a)$ libovolné. Pak existuje ryzí okolí $O^*(x_0)$ takové, že pro $x \in O^*(x_0)$ je $f(x) \in O(a)$. Poněvadž $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $x_n \in O(x_0)$ a tedy $f(x_n) \in O(a)$, což znamená, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

„$\Leftarrow$“ Zvolme libovolnou $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Pak existuje $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \in \mathbb{R}^*$. Ukážeme, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Připusťme, že existuje $O(a)$ takové, že v každém ryzím okolí $O^*(x_0)$ existuje x takové, že $f(x) \notin O(a)$. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ (resp. $x_0 = \infty$, resp. $x_0 = -\infty$), položíme $U_n(x_0) = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \setminus \{x_0\}$ (resp. $U_n(x_0) = (n, \infty)$, resp. $U_n(x_0) = (-\infty, -n)$). Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in U_n(x_0)$ takové, že $f(y_n) \notin O(a)$. Z konstrukce $U_n(x_0)$ plyne, že $y_n \to x_0$, $y_n \neq x_0$ a tedy $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = a$. To ale není možné, protože $f(y_n) \notin O(a)$. □

Poznámka. a) Heineho podmínka umožňuje převést vyšetřování vlastností limity funkce na vlastnosti limity posloupnosti.

b) Zejména pak platí analogie vlastností z vět 7.4 (jednoznačnost limity), 7.6 (funkce mající limitu je ohraničená na okolí bodu x_0), 7.8 (limita součtu, součinu, atd.), 7.10 (pro funkce se nazývá věta o 3 limitách).

c) Dále platí:

- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $f(x) \neq 0$ (resp. $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$). Pak $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$, resp. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$).
- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$. Pak $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Je-li $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ a $g(x)$ je zdola ohraničená na nějakém $O^*(x_0)$, pak $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \infty$. Podobně pro limitu $-\infty$ a shora ohraničenou funkci.
- Je-li $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ a $g(x) \geq d > 0$ (resp. $g(x) \leq h < 0$) na nějakém $O^*(x_0)$, pak $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty$).

Základní limity

1. Nechť $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.
2. Buď P polynom. Pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.
3. Buď R racionální lomená funkce a $x_0 \in D(R)$. Pak $\lim_{x\to x_0} R(x) = R(x_0)$.
4. Buď $a > 0$, $f(x) = a^x$. Pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.
5. Buď $a > 0$, $f(x) = x^a$, $x_0 \in D(f)$. Pak $\lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a$.
6. Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$,

Věta 12.4 (o limitě složené funkce)**.** *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{y\to\alpha} f(y) = a \in \mathbb{R}^*$ a nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(i) *existuje ryzí okolí $O^*(x_0)$, v němž platí $\varphi(x) \neq \alpha$,*

(ii) *$f(\alpha) = a$ (podmínka spojitosti funkce f v bodě α, viz následující kapitola).*

Pak $\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = a$ (tj. $\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y\to\lim_{x\to x_0}\varphi(x)} f(y) = a$).

Důkaz. Nechť okolí $O(a)$ je libovolné. K němu existuje ryzí okolí $O^*(\alpha)$ takové, že pro $y \in O^*(\alpha)$ je $f(y) \in O(a)$. K $O(\alpha)$ existuje ryzí okolí $\widetilde{O}^*(x_0)$ takové, že pro $\forall x \in \widetilde{O}^*(x_0)$ je $\varphi(x) \in O(\alpha)$.

Nechť je splněn předpoklad (i). Položme $\widehat{O}^*(x_0) = O^*(x_0) \cap \widetilde{O}^*(x_0)$. Pak pro $\forall x \in \widehat{O}^*(x_0)$ je $\varphi(x) \in O(\alpha)$ a $\varphi(x) \neq \alpha$, tj. $\varphi(x) \in \widehat{O}^*(\alpha)$. Tedy $f(\varphi(x)) \in O(a)$, což znamená $\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = a$.

Pokud je splněn předpoklad (ii) a není splněn předpoklad (i) (tj. $\varphi(x) = \alpha$ na nějakém ryzím okolí $O^*(x_0)$), pak na $\widehat{O}^*(x_0)$ platí $f(\varphi(x)) = f(\alpha) = a \in O(a)$, tj. opět $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = a$. □

Poznámka. a) Pokud není splněn ani jeden z předpokladů (i) nebo (ii), tak tvrzení neplatí. Např. pro $\varphi(x) = 0$, $f(y) = \begin{cases} 0 \text{ pro } y \neq 0, \\ 1 \text{ pro } y = 0 \end{cases}$ platí $f(\varphi(x)) = 1$ a tedy pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je $\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = 1$, avšak $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$.

b) Je-li splněn předpoklad (ii), pak lze psát $\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to x_0} \varphi(x))$.

c) Je-li $\alpha = \pm\infty$, pak je předpoklad (i) splněn automaticky.

Příklad 12.5. Určete limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

Řešení. Provedeme-li substituci $y = \sqrt[3]{1+x}$, pak úlohu převedeme na výpočet limity složené funkce $f(\varphi(x))$, kde $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x}$ a $f(y) = \frac{y-1}{y^3-1}$ (protože ze substituce je $x = y^3 - 1$). Platí $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \sqrt[3]{1+0} = 1$, přičemž na ryzím okolí bodu $x = 0$ máme $\sqrt[3]{1+x} \neq 1$, je tedy splněna podmínka (i) věty 12.4. Dále

$$\lim_{y\to 1} f(y) = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3} \quad \text{a tedy} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{3}.$$

Lze řešit též bez substituce rozšířením faktorem $\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}$.

Definice 12.6 (jednostranných limit)**.** Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ a nahradíme-li v definici limity ryzí okolí $O^*(x_0)$ levým ryzím okolím $O^{*-}(x_0)$ (resp. pravým ryzím okolím $O^{*+}(x_0)$), dostaneme definici *limity zleva* (resp. *limity zprava*). Souhrnně se tyto nazývají *jednostranné* limity. Značíme $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0+} f(x)$.

Věta 12.7. *Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow$ má v tomto bodě limitu zprava i zleva a platí $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = a$.*

Důkaz. Plyne přímo z definic limity a jednostranných limit a z faktu $O^*(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. □

Poznámka. a) Pro jednostranné limity platí analogie Heineho podmínky (posloupnost akorát bereme zleva, resp. zprava od bodu x_0). V důsledku toho platí základní vlastnosti limity i pro jednostranné limity.

b) Pomocí jednostranných limit lze dokázat další „základní“ limitu $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Poznámka. Analogií hromadného bodu posloupnosti je pojem *limitního bodu (částečné limity)* funkce. Pomocí množiny limitních bodů lze potom také zavést lim sup a lim inf funkce v bodě x_0 (např. $\lim_{x\to x_0} \chi(x)$ neexistuje v žádném x_0, ale $\limsup_{x\to x_0} \chi(x) = 1$, $\liminf_{x\to x_0} \chi(x) = 0$ v libovolném $x_0 \in \mathbb{R}^*$).

13 Spojitost funkce

Definice 13.1 (spojitosti funkce v bodě)**.** Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$).

Poznámka. a) Z definice ihned plyne: f je spojitá v $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

b) Je-li f spojitá v bodě, pak je na nějakém okolí tohoto bodu ohraničená.

c) Spojitost je definována pouze v bodech z $\mathbb{R}$. Nelze definovat spojitost v nevlastním bodě.

d) Spojitost funkce v bodě je lokální vlastností této funkce.

Není-li f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a je přitom definována na nějakém okolí (případně ryzím okolí) bodu x_0, mohou nastat tyto možnosti:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje a
   1a. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ existují a jsou reálné různé – *bod nespojitosti 1. druhu* (např. $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x_0 = 1$);
   1b. Alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje – *bod nespojitosti 2. druhu* (např. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x_0 = 0$ nebo $\chi(x)$, x_0 libovolné);

1c. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ existují, jsou různé a alespoň jedna z nich je nevlastní (např. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$);

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq f(x_0)$ a

2a. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ je nevlastní (např. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$);

2b. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ a $f(x_0) \neq a$ nebo $x_0 \notin D(f)$ – *bod odstranitelné nespojitosti*. Nespojitost lze odstranit změnou $f(x_0)$ nebo dodefinováním $f(x_0)$: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in D(f) \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x\to x_0} f(x), \ x = x_0 \end{cases}$, (např. $f(x) = \begin{cases} x^2, \ x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$. Nespojitost odstraníme definováním $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{g}(1) = \frac{1}{2}$).

Věta 13.2. *Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když je v tomto bode spojitá zprava i zleva.*

Důkaz. Plyne ihned z věty 12.7. □

Věta 13.3. *Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Funkce f je spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}$ zprava (resp. zleva) právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $x_n \geq x_0$ (resp. $x_n \leq x_0$) a $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Důkaz. Plyne ihned z Heineho podmínky (věta 12.3) a poznámky a) pod větou 12.7. □

Věta 13.4. *Jsou-li f a g spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak jsou v bodě x_0 spojité také $|f|$, $f+g$, $f-g$, fg. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě x_0.*

Důkaz. Plyne z vlastností limity (limita součtu je součet limit, atd.). □

Věta 13.5. *Nechť φ je spojitá v bodě x_0 a f je spojitá v bodě $\varphi(x_0)$. Pak je také $f(\varphi(x))$ spojitá v bodě x_0.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro $y \in (\varphi(x_0) - \delta_1, \varphi(x_0) + \delta_1)$ platí $|f(y) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon$. K $\delta_1 > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_1$. Tedy pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon$, což znamená $\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$. □

Definice 13.6 (spojitosti funkce na intervalu)**.** Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže platí:

(i) f je spojitá v každém vnitřním bode intervalu I.

(ii) Patří-li levý (resp. pravý) krajní bod intervalu I do tohoto intervalu, pak je v něm funkce f spojitá zprava (resp. zleva).

Poznámka. a) Tedy f je spojitá na otevřeném intervalu $(a, b) \Leftrightarrow$ je spojitá v každém bodě tohoto intervalu a f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ právě tehdy, když je spojitá v každém bodě (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva. Spojitost na intervalu je globální vlastnost.

b) Funkce, která je definovaná na $\langle a, b\rangle$, nazveme „po částech spojitou“, jestliže je spojitá v každém bodě tohoto intervalu s výjimkou konečného počtu bodů, v nichž má nespojitost prvního druhu.

Věta 13.7. *Nechť f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I a zobrazuje tento interval na interval J. Pak f^{-1} je spojitá na intervalu J.*

Důkaz. Nechť f je rostoucí na I, $y_0 \in J$ a y_0 není levý koncový bod J. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zleva v bodě $y_0 = f(x_0)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné takové, že $x_0 - \varepsilon \in I$. Pak $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0)$. Označme $\delta = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0$. Nechť dále $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0\rangle$ je libovolný. Protože podle věty 8.19 je f^{-1} rostoucí, platí $f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y)$, a tedy $f^{-1}(y_0 - \delta) = f^{-1}(f(x_0) - f(x_0) + f(x_0 - \varepsilon)) = x_0 - \varepsilon$. To znamená, že $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y)$, neboli $f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < \varepsilon$. Ukázali jsme tedy, že pro každé $y \in (y_0 - \delta, y_0\rangle = O^-_\delta(y_0)$ platí $f^{-1}(y) \in \big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0)\big\rangle = O^-_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$, tj. f^{-1} je spojitá zleva v bodě y_0. Ostatní možnosti (spojitost zprava v bodě y_0 a jednostrannou spojitost v krajních bodech, pokud patří do intervalu) bychom provedli analogicky. □

Poznámka. Základní elementární funkce, polynomy a racionální lomené funkce jsou spojité na svých definičních oborech.

Věta 13.8 (1. Weierstrassova)**.** *Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.*

Důkaz. Sporem. Připusťme, že funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ není ohraničená shora. Pak ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x_n) > n$. Takto definovaná posloupnost $\{x_n\}$ je ohraničená ($a \le x_n \le b$) a tedy podle věty 7.22 existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Protože $a \le x_{n_k} \le b$, tak také $a \le x_0 \le b$, tj. $x_0 \in \langle a, b\rangle$ (vlastnost $a_n \le b_n \Rightarrow \lim a_n \le \lim b_n$ byla uvedena v poznámce a) pod větou 7.6). Poněvadž f je spojitá (případně jednostranně spojitá), podle věty 13.3 je $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \in \mathbb{R}$. Současně ale $f(x_{n_k}) > n_k$, $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ což implikuje $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. To je spor. Analogicky by se vyloučila možnost, že by funkce f spojitá na uzavřeném intervalu nebyla ohraničená zdola. □

Věta 13.9 (2. Weierstrassova)**.** *Funkce spojitá na uzavřeném intervalu zde nabývá minima a maxima.*

Důkaz. Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Podle 1. Weierstrassovy věty je na tomto intervalu ohraničená a tedy existuje $m = \sup\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$. Ukažme, že existuje $x_1 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x_1) = m$. Připusťme, že $f(x) < m$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak $m - f(x) > 0$ a podle věty 13.4 je funkce $\frac{1}{m-f(x)}$ spojitá. Podle 1. Weierstrassovy věty existuje $c \in \mathbb{R}$, že $\frac{1}{m-f(x)} < c$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $c > 0$. Tedy $f(x) < m - \frac{1}{c}$. Protože m je supremum, existuje $x_0 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(x_0) \ge m - \frac{1}{c}$, tj. $c \le \frac{1}{m-f(x_0)}$, což je spor. Analogicky by se ukázalo, že existuje $x_2 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $x_2 = \inf\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$. □

Věta 13.10 (1. Bolzanova)**.** *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.*

Důkaz. Položme $d = \frac{b-a}{2}$. Pak $d \in (a, b)$. Pokud $f(d) = 0$, je $c = d$. Nechť $f(d) \ne 0$. Jestliže $f(a)f(d) < 0$, položme $a_1 = a$, $b_1 = d$; jestliže $f(a)f(d) > 0$, položme $a_1 = d$, $b_1 = b$. Nyní platí $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, $f(a)f(b_1) < 0$, $f(a_1)f(b) < 0$, $a_1 \ge a$, $b_1 \le b$.

Dále položme $d_1 = \frac{b_1-a_1}{2}$. Pak $d_1 \in (a_1, b_1) \subseteq (a, b)$. Pokud $f(d_1) = 0$, je $c = d_1$. Nechť $f(d_1) \ne 0$. Jestliže $f(a_1)f(d_1) < 0$, položme $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$; jestliže $f(a_1)f(d_1) > 0$, položme $a_2 = d_1$, $b_2 = b_1$. Nyní platí $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$, $f(a)f(b_2) < 0$, $f(a_2)f(b) < 0$, $a_2 \ge a_1$, $b_2 \le b_1$.

Analogicky postupujeme dále. Buď po konečném počtu kroků nalezneme d_k takové, že $f(d_k) = 0$, nebo dostaneme dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takové, že $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $f(a)f(b_n) < 0$, $f(a_n)f(b) < 0$. V prvním případě je $c = d_k$. Nechť nastane druhý případ. Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající, ohraničená shora číslem b a tedy podle věty o monotónních posloupnostech (viz věta 7.12) existuje $c_1 = \lim a_n \le b$. Podobně, posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí, zdola hraničená číslem a a tedy existuje číslo $c_2 = \lim b_n \ge a$. Platí $c_1 - c_2 = \lim a_n - \lim b_n = \lim(a_n - b_n) = \lim \frac{a-b}{2^n} = 0$, tedy $c_1 = c_2 = c \in \langle a, b\rangle$. Kdyby $f(a)f(c) < 0$ a $f(c)f(b) < 0$, pak by $f(a)f(c)f(c)f(b) > 0$, tj. $f(a)f(b) > 0$, což by byl spor. Pokud $f(a)f(c) \ge 0$, pak $0 \le f(a)\lim f(b_n) = \lim f(a)f(b_n) \le 0$, tedy $f(a)f(c) = 0$, což je možné, pouze když $f(c) = 0$. Pokud $f(c)f(b) \ge 0$, pak $0 \le (\lim f(a_n))f(b) = \lim f(a_n)f(b) \le 0$, tedy $f(c)f(b) = 0$, což je možné, pouze když $f(c) = 0$. □

Poznámka. Princip důkazu spočívá v metodě, která se v numerické matematice nazývá *metoda půlení intervalu (bisekce)*.

Věta 13.11 (2. Bolzanova)**.** *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak zde nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

Důkaz. Položme $M = \max\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$, $m = \min\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$, $p \in \mathbb{R}$ tak, že $m < p < M$. Podle 2. Weierstrassovy věty existují $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_2 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Potom $f(x_1) - p > 0$, $f(x_2) - p < 0$, tedy $(f(x_1) - p)(f(x_2) - p) < 0$. Podle 1. Bolzanovy věty existuje v uzavřeném intervalu s krajními body x_1 a x_2 číslo c takové, že $0 = (f - p)(c) = f(c) - p$, tedy $f(c) = p$. □

Důsledek 13.12. *Spojitým obrazem uzavřeného intervalu je buď jednoprvková množina nebo uzavřený interval.*

Definice 13.13 (stejnoměrné spojitosti funkce)**.** Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každá dvě $x_1, x_2 \in I$ taková, že $|x_1 - x_2| < \delta$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Poznámka. a) Stejnoměrně spojitá funkce na I je spojitá na I. Naopak tvrzení neplatí, např. funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je na $(0, \infty)$ spojitá, ale není zde stejnoměrně spojitá. Skutečně, negací podmínky v definici dostaneme, že funkce nebude stejnoměrně spojitá, pokud existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\delta > 0$ existují x_1, x_1 splňující $|x_1 - x_2| < \delta$ a přitom $|f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon$. Nechť $\delta > 0$ je libovolné a vezměme m takové přirozené číslo, že $1/m < \delta$. Položme $x_1 = \frac{1}{2m}$ a $x_2 = \frac{1}{m}$. Potom $|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}| = 2m - m = m \ge 1$. Pro $\varepsilon = 1$ tedy neexistuje žádné $\delta > 0$, které by vždy splňovalo pro $|x_1 - x_1| < \delta$ vztah $|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}| < \varepsilon$ a tedy funkce není stejnoměrně spojitá.

b) Stejnoměrně spojitou funkci na (a, b) lze spojitě prodloužit na $\langle a, b\rangle$ (pomocí jednostranných limit v krajních bodech).

c) Stejnoměrně spojitá funkce na libovolném intervalu konečné délky je na tomto intervalu ohraničená.

Věta 13.14 (Heineho–Cantorova)**.** *Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.*

Důkaz. Sporem: Připusťme, že f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, ale ne stejnoměrně. Existuje tedy $\varepsilon > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existuje dvojice bodů $x, y \in \langle a, b\rangle$ taková, že $|x - y| < \delta$ a zároveň $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Zejména tedy pro $\delta = \frac{1}{n}$ existují $x_n, y_n \in \langle a, b\rangle$, tak že $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ je ohraničená a tedy podle věty 7.22 existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z $\{x_n\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \langle a, b\rangle$. Dále platí $\lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$, tedy $\lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$, což znamená $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$. Poněvadž f je spojitá v x_0, je $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$, což implikuje $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$. To je ale spor s tím, že $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. □