14 Derivace

Definice 14.1 (derivace funkce v bodě)**.** Nechť f je funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme ji *derivace funkce f v bodě x_0* a označujeme ji $f'(x_0)$. Je-li tato limita nevlastní, řekneme, že f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci*. Neexistuje-li tato limita, řekneme, že funkce f nemá derivaci v bodě x_0.

Poznámka. 1. Má-li f derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě a nějakém jeho okolí definována.
2. Funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in D(f)$ nejvýše jednu derivaci (plyne z jednoznačnosti limity).
3. Derivace je definována pouze v $x_0 \in \mathbb{R}$. Nelze definovat derivaci v $\pm\infty$.
4. Existence a hodnota derivace $f'(x_0)$ je lokální vlastností f.
5. Označíme-li $x = x_0 + h$, lze v definici psát $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
6. Lze definovat i jednostranné derivace f v bodě x_0:

$$\text{derivace zleva } f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$
$$\text{derivace zprava } f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

   Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když v něm má derivaci zprava a derivaci zleva a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.
7. Derivaci v bodě lze geometricky interpretovat jako směrnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě x_0. Tato tečna pak má rovnici

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{kde } [x_0, y_0] = [x_0, f(x_0)] \text{ je tečný bod},$$

   a rovnice normály (přímka kolmá na tečnu a procházející tečným bodem) má tvar

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

8. Derivaci v bodě lze také interpretovat fyzikálně. Má-li proměnná x význam času, tak derivace v bodě pak představuje (okamžitou) rychlost změny veličiny $f(x)$.

Věta 14.2. *Má-li funkce f v bodě $x_0 \in D(f)$ derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Nechť $f'(x_0)$ existuje. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \right)$$
$$= f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

což je požadavek definice spojitosti v bodě (viz definice 13.1). □

Poznámka. Obrácené tvrzení neplatí, např. $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě 0, ale nemá v tomto bodě derivaci (jednostranné derivace se nerovnají).

Věta 14.3. *Nechť f, g mají derivaci v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak platí:*
1. *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.*
2. *$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.*
3. *$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*
4. *Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.*

Důkaz. Je snadný, zkuste si za d.ú. □

Věta 14.4 (o derivaci složené funkce)**.** *Nechť f má derivaci v bodě $\xi_0 \in \mathbb{R}$ a nechť φ má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ takovém, že $\varphi(x_0) = \xi_0$. Pak složená funkce $F : x \mapsto f(\varphi(x))$ má derivaci v bodě x_0 a platí $F'(x_0) = f'(\xi_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$.*

Důkaz. Máme dokázat, že

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = f'(\xi_0)\varphi'(x_0).$$

Definujme pomocnou funkci g předpisem

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} - f'(\xi_0) \quad \text{pro} \quad \xi \neq \xi_0, \quad g(\xi) = 0 \quad \text{pro} \quad \xi = 0.$$

Protože $\lim_{\xi\to\xi_0} g(\xi) = f'(\xi_0) - f'(\xi_0) = 0 = g(\xi_0)$, je funkce g spojitá v bodě ξ_0. Funkce φ je spojitá v bodě x_0, protože má v tomto bodě derivaci (viz věta 14.2). Podle věty 13.5 je pak spojitá v bodě x_0 i složená funkce $f \circ \varphi$, tj. platí

$$\lim_{x\to x_0} g(\varphi(x)) = g(\varphi(x_0)) = g(\xi_0) = 0.$$

Dále platí

$$g(\varphi(x)) = \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} - f'(\xi_0) \quad \text{pro} \quad \varphi(x) \neq \xi_0.$$

Z této rovnosti jednoduchou úpravou dostaneme, že pro každé $x \in O^*(x_0)$ takové, že $\varphi(x) \neq \xi_0$, platí rovnost

$$[g(\varphi(x)) + f'(\xi_0)]\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0}.$$

Tato rovnost je ale splněna i pro ty x z $O^*(x_0)$, pro které je $\varphi(x) = \xi_0$ (protože pak také $\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0 = f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))$). Máme tedy

$$\begin{aligned}
F'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left([g(\varphi(x)) + f'(x_0)] \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x\to x_0} [g(\varphi(x)) + f'(x_0)] \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \\
&= \Big[\lim_{x\to x_0} g(\varphi(x)) + \lim_{x\to x_0} f'(x_0)\Big]\varphi'(x_0) = [0 + f'(x_0)]\varphi'(x_0) = f'(x_0)\varphi'(x_0).
\end{aligned}$$

□

Věta 14.5 (o derivaci inverzní funkce)**.** *Nechť f je ryze monotónní a spojitá na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod I a nechť f má v tomto bodě derivaci $f'(y_0) \neq 0$. Pak inverzní funkce f^{-1} má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Důkaz. Protože f je ryze monotónní, je prostá a tedy inverze existuje. Pro $x \neq x_0$ platí $y = f^{-1}(x) \neq f^{-1}(x_0) = y_0$ a podle věty o limitě složené funkce (viz věta 12.4) platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{x - x_0}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{f'(y_0)},
\end{aligned}$$

kde předposlední rovnost plyne ze spojitosti f ($x \to x_0 \Rightarrow y = f(x) \to f(x_0) = y_0$). □

Definice 14.6 (derivace funkce)**.** Buď $(a, b) \subseteq D(f)$ otevřený interval, na němž má f derivaci. Pak zobrazení $x \mapsto f'(x)$ je funkcí s definičním oborem (a, b). Tato funkce se nazývá *derivace funkce* f a označuje se f'. Analogicky zavedeme derivaci na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ s tím rozdílem, že budeme vyžadovat, aby funkce měla v krajních bodech příslušné jednostranné derivace.

Přehled vzorců pro derivaci

(1) $c' = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$,	(2) $(x^a)' = ax^{a-1}$,
(3) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,	(4) $(a^x)' = a^x \ln a$,
(5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x,}$	(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
(7) $(\sin x)' = \cos x$,	(8) $(\cos x)' = -\sin x$,
(9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,	(10) $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$,
(12) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	(13) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
(13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,	(14) $(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$,
(15) $(\sinh x)' = \cosh x$,	(16) $(\cosh x)' = \sinh x$,
(17) $(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$,	(18) $(\operatorname{cotgh} x)' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}$
(19) $(\operatorname{argsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,	(20) $(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,
(21) $(\operatorname{argtgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$,	(22) $(\operatorname{argcotgh} x)' = \dfrac{-1}{1-x^2}$.

Příklad 14.7. Zderivujte a) $f(x) = \sqrt[x]{x}$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$

ad a) $D(f) = \mathbb{R}^+$. Pro každé $x > 0$ máme

$$f'(x) = (\sqrt[x]{x})' = (\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x})' = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\Big(\frac{-1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\Big) = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x).$$

ad b) $D(f) = \mathbb{R}$. V každém bodě $x \neq 0$ je

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x^2})' = (x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

V bodě $x = 0$ pak platí

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty, \qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty,$$

a tedy derivace v bodě 0 neexistuje.
ad c) $D(f) = \mathbb{R}$. Pro $x \neq 0$ máme

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

a pro $x = 0$ máme

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Naproti tomu $\lim_{x\to 0} f'(x)$ neexistuje. Obecně tedy nelze zaměňovat $f'(x_0)$ (resp. $f'_\pm(x_0)$) s $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0\pm} f'(x)$)!

15 Derivace vyšších řádů, diferenciál

Definice 15.1 (derivace funkce řádu n v bodě)**.** Buď f funkce, která má derivaci na množině $M_1 \subseteq D(f)$ a buď $x_0 \in M_1$. Má-li funkce f' derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *druhou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f''(x_0)$. Obecně: Buď f funkce, která má na množině $M_{n-1} \subseteq D(f)$ $(n-1)$-tou derivaci $f^{(n-1)}$ a buď $x_0 \in M_{n-1}$. Má-li funkce $f^{(n-1)}$ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *n-tou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f^{(n)}(x_0)$.

Užitečné vzorce

(1) $(x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n}$ (2) $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$,

(3) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$, (4) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$,

(5) $(\sin x)^{(n)} = \sin\bigl(x + n\frac{\pi}{2}\bigr)$ (6) $(\cos x)^{(n)} = \cos\bigl(x + n\frac{\pi}{2}\bigr)$,

(7) $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x) g^{(i)}(x)$ (Leibnizova formule).

Důkaz lze ve všech případech provést matematickou indukcí.

Definice 15.2 (diferencovatelnosti a diferenciálu funkce v bodě)**.** Buď f definovaná na nějakém δ-okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, tj. na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Řekneme, že tato funkce je *diferencovatelná v bodě* x_0, jestliže existují $a \in \mathbb{R}$ a funkce $\tau : h \mapsto \tau(h)$ splňující $\lim_{h\to 0} \tau(h) = 0$ takové, že pro $|h| < \delta$ platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\tau(h).$$

V tomto případě se lineární funkce $h \mapsto ah$ nazývá *diferenciál funkce* f *v bodě* x_0 a značí se $\mathrm{d}f(x_0)(h)$, stručně $\mathrm{d}f(x_0)$.

Poznámka. Rozdíl $f(x_0+h) - f(x_0)$ se nazývá přírůstek funkce f v bodě x_0 při přírůstku h nezávisle proměnné a značí se $\Delta f(x_0)(h)$, stručně $\Delta f(x_0)$. Pro diferencovatelnou funkci platí $\Delta f(x_0)(h) = \mathrm{d}f(x_0)(h) + h\tau(h)$.

Věta 15.3. *Funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci. V tomto případě je $a = f'(x_0)$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť f je diferencovatelná v x_0, tj. platí $f(x_0+h) - f(x_0) = ha + h\tau(h)$. Vydělením $h \neq 0$ máme

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a + \tau(h) \text{ a tedy } f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(a + \tau(h))$$
$$= a + \underbrace{\lim_{h\to 0} \tau(h)}_{=0} = a.$$

„$\Leftarrow$“ Nechť f má v bodě x_0 derivaci. Položme $a = f'(x_0)$ a

$$\tau(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h}. \text{ Pak } \lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h}$$
$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

□

Pro diferenciál tedy platí $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h$. Z tohoto vyjádření plyne geometrická interpretace diferenciálu. Diferenciál je přírůstek naměřený na tečně, tj. $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)h$. Toho lze využít k přibližnému výpočtu funkční hodnoty, viz následující příklad.

Příklad 15.4. Vypočtěte přibližně hodnotu $\sqrt{4,02}$.
Řešení. Položme $f(x) = \sqrt{x}$. Potom $\sqrt{4,2} - \sqrt{4} = f(4,02) - f(4) \approx \mathrm{d}f(4)(0.02)$. Protože $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, máme $\mathrm{d}f(4)(0.02) = \frac{1}{4} \cdot 0,02 = 0,005$ a tedy $\sqrt{4,2} \approx 2 + 0,005 = 2,005$ (přesnější hodnota je $2,00499$).

Poznámka. Položíme-li $f(x) = x$, pak $f'(x_0) = 1$ pro $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ a tedy $\mathrm{d}f(x_0) = h$, stručně $\mathrm{d}x = h$. Lze tedy psát $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ a naopak $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, stručně $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (Leibnizův zápis derivace). Za použití této symboliky pak dostane názorný tvar např. vzorec pro derivaci složené funkce

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}.$$

Definice 15.5 (n-tého diferenciálu funkce v bodě)**.** Nechť f má v bodě x_0 n-tou derivaci $f^{(n)}(x_0)$, $n \geq 1$. Pak *n-tý diferenciál v bodě* x_0 je definován jako zobrazení $\mathrm{d}^n f(x_0) : h \mapsto f^{(n)}(x_0)h^n$, symbolicky $\mathrm{d}^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,\mathrm{d}x^n$.

Poznámka. Díky poslednímu vztahu je tedy možno psát $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ (Leibnizův zápis n-té derivace).