16 Obecné věty o derivaci

Věta 16.1 (Rolleova, Michel Rolle 1652–1719, Francouz). *Nechť funkce f splňuje předpoklady:*
(i) *je spojitá na $\langle a, b\rangle$;*
(ii) *má vlastní nebo nevlastní derivaci v každém bodě (a, b);*
(iii) $f(a) = f(b)$.
Pak existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Je-li f konstantní, stačí za c vzít libovolný bod z (a, b). Nechť f není konstantní. Podle 2. Weierstrassovy věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = \max\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$. Nechť nejprve $f(c) > f(a) = f(b)$. Podle (ii) existuje $f'(c) \in \mathbb{R}^*$. Připusťme $f'(c) > 0$, tedy $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$. To znamená, že existuje $O^*(c)$ takové, že pro $x \in O^*(c)$ je $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$. Zvolme $x_1 \in \langle a, b\rangle \cap O^*(c)$, $x_1 > c$. Pak $x_1 - c > 0$, $f(x_1) - f(c) \leq 0$, tedy $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, což je spor. Analogicky vyloučíme možnost $f'(c) < 0$. Je tedy $f'(c) = 0$. Pokud $f(a) = f(b) = \max\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$, položíme $c = \min\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$ a provedeme analogické úvahy. □

Poznámka. Z důkazu plyne, že za c lze volit bod, ve kterém f nabývá svého maxima nebo minima. Neplyne z něho ale, že jiné body, ve kterých je nulová derivace, neexistují.

Věta 16.2 (Lagrangeova věta o střední hodnotě, věta o přírůstku funkce, Joseph-Louis Lagrange 1736–1813, Francouz italského původu). *Nechť funkce f splňuje:*
(i) *je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*
(ii) *v každém bodě (a, b) má vlastní nebo nevlastní derivaci.*
Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Položme $F(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x$. Díky předpokladům na f splňuje F předpoklady Rolleovy věty (ověřte), a tedy existuje $c \in (a, b)$ tak, že $F'(c) = 0$. Derivace F je $F'(x) = (b - a)f'(x) - (f(b) - f(a))$, a tedy $F'(c) = (b - a)f'(c) - (f(b) - f(a)) = 0$. Vyjádříme-li odtud $f'(c)$, dostáváme tvrzení. □

Poznámka. Z tvrzení plyne $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Levá strana představuje přírůstek funkční hodnoty mezi body a, b – odtud druhý název věty.

Věta 16.3 (Cauchyova věta o střední hodnotě, věta o podílu přírůstků funkce). *Nechť funkce f, g splňují:*
(i) *jsou spojité na $\langle a, b\rangle$,*
(ii) *v každém bodě (a, b) existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x)$ a vlastní nebo nevlastní derivace $g'(x) \neq 0$.*
Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Důkaz. Funkce g splňuje předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě a tedy existuje $d \in (a, b)$ takové, že $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(d) \neq 0$, z čehož plyne $g(b) - g(a) \neq 0$, takže zlomek na levé straně tvrzení věty má smysl. Položme $F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$. Protože tato funkce splňuje předpoklady Rolleovy věty, existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$. Tedy $0 = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c)$, z čehož plyne tvrzení. □

Poznámka. Důkaz Lagrangeovy věty využívá Rolleovu větu. Důkaz Cauchyovy věty využívá Lagrangeovu a Rolleovu větu. Bezprostředně je ale vidět, že Lagrangeova věta je důsledkem Cauchyovy věty a Rolleova věta je důsledkem Lagrangeovy věty. Všechny tři věty jsou tedy ekvivalentní.

Věta 16.4 (l'Hospitalovo pravidlo, Johann Bernoulli 1667–1748, Švýcar (skutečný autor), Guillaume Francois de l'Hospital 1661–1704, Francouz). *Nechť f, g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ *nebo* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. *Existuje-li*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^*,$$
pak existuje i
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{a platí} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Stejné tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro případ nulových limit funkcí f, g (druhý případ je složitější). Nechť tedy existuje vlastní nebo nevlastní limita
$$L := \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Uvažujme nejprve limitu zprava $x \to x_0+$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$ (tj. x_0 je vlastní bod). Existence limity L implikuje, že funkce f', g' a f'/g' jsou definovány v nějakém pravém okolí bodu x_0, tj. na intervalu $(x_0, x_0+\delta)$ $(\delta > 0)$. Podle věty 14.2 jsou pak f, g spojité v každém bodě tohoto intervalu. Pokud navíc položíme $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (to můžeme, protože existence limity nezávisí na hodnotách funkce v bodě x_0), pak f, g budou spojité zprava v bodě x_0, tj. celkově máme spojitost těchto funkcí na intervalu $\langle x_0, x_0+\delta)$. Zvolme nyní číslo $x_1 \in (x_0, x_0+\delta)$ libovolně. Pak funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$, přičemž $g'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (x_0, x_1)$ (kdyby nastal opak, nemohl by výraz f'/g' být definován v intervalu $(x_0, x_0+\delta)$). Funkce f, g tedy splňují předpoklady Cauchyovy věty o střední hodnotě (viz věta 16.3), a proto existuje $\xi \in (x_0, x_1)$ takové, že
$$\frac{f(x_1)-f(0)}{g(x_1)-g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad\Rightarrow\quad \frac{f(x_1)-0}{g(x_1)-0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad\Rightarrow\quad \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$
Poslední rovnost platí nezávisle na volbě bodu x_1, pro $x_1 \to x_0+$ tedy máme i $\xi \to 0+$ (věta o 3 limitách), přičemž
$$\lim_{x_1\to x_0+} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \lim_{\xi\to x_0+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \qquad \text{tj.} \qquad \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$
Analogicky bychom ukázali případ $\lim_{x\to x_0-}$, kdy opět
$$\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Pokud je x_0 nevlastní bod, např. $x_0 = \infty$, použijeme právě dokázané tvrzení na limitu
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)},$$
která se rovná (pokud existuje) limitě
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$
□

Poznámka. a) l'Hospitalovo pravidlo lze při zachování uvedených předpokladů opakovat.

b) Limity vedoucí k neurčitým výrazům $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 a 1^∞ lze řešit pomocí l'Hospitalova pravidla zprostředkovaně:

(i) Typ $0\cdot\infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

(ii) Typ $\infty-\infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} [f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} \left[\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right] = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$.

(iii) Typy 0^0, ∞^0, 1^∞ : $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, kde vnitřní limita je typu $0\cdot\infty$.

Příklad 16.5. $\lim_{x\to 0+}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$
$$\lim_{x\to 0+}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-(\sin x + x\cos x)}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

17 Taylorův polynom

Definice 17.1 (Taylorova polynomu)**.** Nechť f má v bodě $x_0 \in D(f)$ derivace až do n-té včetně. Polynom
$$T_{n,f,x_0}(x) = T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
se nazývá *Taylorův polynom funkce f se středem v bodě x_0* (Brook Taylor 1685–1731, Angličan). Je-li $x_0 = 0$, nazývá se tento polynom *Maclaurinův* (Colin Maclaurin 1698–1746, Skot).

Maclaurinovy polynomy některých elementárních funkcí

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$, $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ a tedy
$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

2. $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$, $f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$, $f^{(4)} = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0, \ldots$ Celkem $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$, $f^{(2n)}(0) = 0$. Odtud
$$T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

3. $f(x) = \cos x$, $f(0) = 1$, $f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$, $f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$, $f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$, $f^{(4)} = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1, \ldots$ Celkem $f^{(2n-1)}(0) = 0$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$. Odtud
$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$, $f^{(4)}(0) = -2\cdot 3, \ldots$. Celkem $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Odtud
$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}.$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \ldots$. Celkem $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$. Definujeme-li $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\binom{\alpha}{0} = 1$, pak
$$T_n(x) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k.$$

   Pro $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \le n$ je Maclaurinův polynom rozepsáním výrazu $(1+x)^\alpha$ podle binomické věty.

Věta 17.2 (Taylorova)**.** *Buď f funkce, $x_0 \in D(f)$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť existuje $O(x_0)$ takové, že f má $(n+1)$-ní derivaci v každém bodě z $O(x_0)$ a nechť $x \in O(x_0)$. Pak v otevřeném intervalu s krajními body x_0 a x existuje číslo ξ takové, že platí*
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Důkaz. Nechť $\tilde{x} \in O^{*+}(x_0)$ je libovolné. Položme $K = \frac{f(\tilde{x}) - T_n(\tilde{x})}{(\tilde{x}-x_0)^{n+1}}$, tj. $f(\tilde{x}) = T_n(\tilde{x}) + K(\tilde{x}-x_0)^{n+1}$. Dále položíme $F(x) = f(x) - T_n(x) - K(x-x_0)^{n+1}$ pro $x \in \langle x_0, \tilde{x}\rangle$. Funkce F má na $\langle x_0, \tilde{x}\rangle$ spojité derivace až do řádu n, protože f má na tomto intervalu $(n+1)$-ní derivaci (viz věta 14.2) a T_n, $(x-x_0)^{n+1}$ mají derivace všech řádů. Dosazením $x = x_0$ do F (s využitím definice T_n) je snadné ověřit, že $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \cdots = F^{(n)}(x_0) = 0$. Dále $F(\tilde{x}) = 0$. Tedy F splňuje na $\langle x_0, \tilde{x}\rangle$ předpoklady Rolleovy věty (viz věta 16.1). Odtud plyne, že existuje $\xi_1 \in (x_0, \tilde{x})$ takové, že $F'(\xi_1) = 0$.

To dále znamená, že funkce F' splňuje předpoklady Rolleovy věty na $\langle x_0, \xi_1\rangle$, z čehož plyne, že existuje $\xi_2 \in \langle a, c_1\rangle$ takové, že $F''(\xi_2) = 0$.

Takto pokračujeme dále, až v n-tém kroku ukážeme, že existuje $\xi_n \in (x_0, \tilde{x})$ takové, že $F^{(n)}(\xi_n) = 0$. Protože i $F^{(n)}$ splňuje předpoklady Rolleovy věty, existuje $\xi \in (x_0, \xi_n) \subseteq (x_0, \tilde{x})$ takové, že $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Přitom $F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - K(n+1)! = 0$. Odtud plyne $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Dokázali jsme tedy vzorec pro $x = \tilde{x}$. Protože ale $\tilde{x} \in O^{*+}(x_0)$ bylo libovolné, platí vzorec na celém pravém okolí $O^{*+}(x_0)$. Jeho platnost na levém okolí bodu by se ukázala analogicky. $\square$

Poznámka. a) Rovnost ve větě lze obecně napsat jako $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, kde funkce R_n se nazývá *Taylorův zbytek*. V našem případě je $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ a toto vyjádření se nazývá *Lagrangeův tvar Taylorova zbytku*. Existují i jiné tvary Taylorova zbytku, např. *Cauchyův tvar* $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-x_0)(x-\eta)^n$, $\eta \in (x_0, x)$.

b) Číslo ξ lze napsat ve tvaru $\xi = x_0 + \vartheta(x-x_0)$, kde $\vartheta \in (0,1)$.

c) Lagrangeovu větu o střední hodnotě (věta 16.2) lze chápat jako speciální případ Taylorovy věty (pro $n = 1$).

Zbytky Maclaurinových polynomů vybraných elementárních funkcí

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $R_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$;
2. $f(x) = \sin x$, $R_{2n-1}(x) = \dfrac{\sin(\vartheta x + n\pi)}{(2n)!}x^{2n}$;
3. $f(x) = \cos x$, $R_{2n}(x) = \dfrac{\cos\left(\vartheta x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$;
4. $f(x) = \ln(x+1)$, $R_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}}$;
5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $R_n(x) = \dbinom{\alpha}{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$.

Příklad 17.3. Určete Maclaurinův polynom, který na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ aproximuje funkci $f(x) = \sin x$ s přesností 10^{-5}.

Řešení. Pro Taylorův zbytek funkce sin na zadaném intervalu platí

$$|R_{2n-1}(x)| = \left|\frac{\sin(\vartheta x + n\pi)}{(2n)!}x^{2n}\right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}.$$

Protože $|R_9(x)| \leq 0{,}00002$ a $|R_{11}| \leq 0{,}0000005 < 10^{-5}$, stačí vzít

$$T_{11}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040} + \frac{x^9}{362\,880} - \frac{x^{11}}{39\,916\,800}.$$