18 Průběh funkce

Věta 18.1. *Nechť f je spojitá na intervalu I a má zde vlastní nebo nevlastní derivaci. Pak f je rostoucí (resp. klesající) na $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) na I, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I (tj. může nastat pouze v izolovaných bodech).*

Důkaz. „$\Rightarrow$" Nechť f je rostoucí na I, tj. platí pro všechny dvojice x_1, x_2, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$. Nechť $x_0 \in I$ je libovolný bod. Pak pro každé $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$, tj.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \text{a tedy} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Analogicky, pro každé $x > x_0$ je $f(x) > f(x_0)$, a tedy také

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad \text{z čehož plyne} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Protože dle předpokladu má f v každém bodě $x_0 \in I$ derivaci, platí $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$ (v případě, kdy $x_0 \in I$ je krajní bod I, uvažujeme pouze jednostrannou derivaci). Zbývá ukázat, že nulová hodnota derivace nemůže nastat na intervalu $J \subseteq I$. Kdyby tomu tak bylo, tak by funkce musela být na J konstantní, což je spor s tím, že f je rostoucí.

Analogicky bychom ukázali, že v případě klesající funkce musí být $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in I$.

„$\Leftarrow$" Nechť $f'(x) \geq 0$ na I, přičemž $f'(x) = 0$ případně nastane pouze v izolovaných bodech I. Nechť $x_1, x_2 \in I$ jsou libovolné body takové, že $x_1 < x_2$. Potom podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $c \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, a tedy $f(x_2) \geq f(x_1)$, protože $f'(c) \geq 0$ a $x_2 - x_1 > 0$. To znamená, že f je neklesající na I. Předpokládejme, že na nějakém intervalu $J \subseteq I$ je f konstantní. Potom ale na tomto intervalu je $f'(x) = 0$, což je spor s předpokladem. Funkce f tedy musí být rostoucí.

Analogicky bychom ukázali, že předpoklad $f'(x) \leq 0$ vede na klasající funkci. □

Definice 18.2 (lokálních a globálních extrémů).

1. Řekneme, že f má v bodě $x_0 \in D(f)$ *lokální maximum* (resp. *minimum*), jestliže existuje $O(x_0) \subseteq D(f)$ takové, že pro každé $x \in O(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
2. Lokální maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže existuje $O^*(x_0) \subseteq D(f)$ takové, že pro každé $x \in O^*(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) > f(x_0)$).
3. Lokální maxima a minima souhrnně nazýváme *lokální extrémy*, případně *ostré lokální extrémy.*
4. Řekneme, že funkce f má na množině $M \subseteq D(f)$ v bodě $x_0 \in M$ *globální (absolutní) maximum* (resp. *minimum*), jestliže pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
5. Globální maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže příslušné nerovnosti jsou ostré.
6. Globální maxima a minima souhrnně nazýváme *globální extrémy.*

Poznámka. Okolí bodu x_0 z předchozí definice leží celé v $D(f)$. To znamená, že je-li x_0 krajním bodem $D(f)$, o lokálním extrému v tomto bodě neuvažujeme, např. funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě 0 lokální extrém nemá. V některé literatuře je podmínka oslabena tak, že se v definici požaduje $O(x_0) \cap D(f)$. V tomto případě by $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě 0 měla lokální minimum.

Bezprostředním důsledkem 2. Weierstrassovy věty je následující tvrzení:

Věta 18.3 (o globálních extrémech). *Funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ zde nabývá svých globálních extrémů buď v bodech lokálních extrémů, nebo v krajních bodech a, b.*

Věta 18.4 (Fermatova věta o nutné podmínce pro lokální extrém, Pierre de Fermat 1601–1665, Francouz). *Má-li funkce v bodě $x_0 \in D(f)$ lokální extrém a existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.*

Důkaz. Nechť f má v bodě x_0 lokální extrém (tj. na nějakém okolí bodu x_0 platí $f(x) \leq f(x_0)$ nebo $f(x) \geq f(x_0)$) a má v tomto bodě derivaci. Připusťme, že

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Pak by existovalo okolí $O^*(x_0)$, na kterém je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Pro x z tohoto okolí ležící nalevo od x_0 je $x - x_0 < 0$, tudíž musí být $f(x) - f(x_0) < 0$, neboli $f(x) < f(x_0)$. Pro x ležící napravo od x_0 je naopak $x - x_0 > 0$, takže musí být $f(x) - f(x_0) > 0$, tj. $f(x) > f(x_0)$. To je spor s tím, že v bodě x_0 je lokální extrém.

Analogicky bychom vyloučili případ $f'(x_0) < 0$. □

Poznámka. a) Body, v nichž $f'(x) = 0$ nazýváme *stacionární body funkce* f. Stacionární bod může, ale nemusí být bodem lokálního extrému. Např. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = 3x^2 > 0$ pro $x \neq 0$. Tedy podle věty 18.1 je f rostoucí na $\mathbb{R}$.

b) Funkce může mít lokální extrém buď ve stacionárním bodě, nebo v bodě, kde neexistuje vlastní ani nevlastní derivace. Např. $f(x) = |x|$ má v bodě $x_0 = 0$ ostré lokální minimum, ale derivace v tomto bodě neexistuje.

Věta 18.5. *Nechť f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$. Existuje-li $O^{*-}(x_0)$, v němž je f neklesající (resp. nerostoucí, resp. rostoucí, resp. klesající) a $O^{*+}(x_0)$, v němž je f nerostoucí (resp. neklesající, resp. klesající, resp. rostoucí), pak má f v bodě x_0 lokální maximum (resp. lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum).*

Důkaz. Nechť f je v $O^{*-}(x_0)$ neklesající a v $O^{*+}(x_0)$ nerostoucí. Protože f je spojitá v bodě x_0, existují konečné limity $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x_0)$. Není těžké ověřit, že platí $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in O^{*-}(x_0)\}$ a $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in O^{*+}(x_0)\}$ (existence limity implikuje ohraničenost funkce na nějakém okolí, a tedy existenci suprema), a tedy $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in O^{*-}(x_0) \cup O^{*+}(x_0)\}$. To znamená, že $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in [O^{*-}(x_0) \cup O^{*+}(x_0) \cup \{x_0\}]$, tj. v bodě x_0 je lokální maximum.

Je-li f v $O^{*-}(x_0)$ rostoucí a v $O^{*+}(x_0)$ klesající, pak pro libovolný bod $x \in O^{*-}(x_0)$ platí $x_1 \in (x, x_0) \subseteq O^{*-}(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_1) \leq f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in O^{*-}(x_0)\}$. Podobně by se ukázalo, že pro $x \in O^{*+}(x_0)$ je $f(x_0) > f(x)$. Celkově tedy, v x_0 je ostré lokální maximum.

Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech. □

Poznámka. Obrácená věta neplatí. Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, nemusí být v žádném ryzím jednostranném okolí monotónní. Předpoklad o spojitosti f v bodě x_0 je podstatný.

Bezprostředním důsledkem vět 18.1 a 18.5 je:

Věta 18.6 (1. věta o postačujících podmínkách pro lokální extrém)**.** *Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a existují $O^{*-}(x_0)$ a $O^{*+}(x_0)$ taková, že f má na těchto okolích vlastní nebo nevlastní derivaci f', přičemž $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) $\forall x \in O^{*-}(x_0)$ a $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$) $\forall x \in O^{*+}(x_0)$. Pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum (resp. minimum).*

Věta 18.7 (2. věta o postačujících podmínkách pro lokální extrém)**.** *Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní nebo nevlastní druhou derivaci, přičemž platí $f'(x_0) = 0$. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Důkaz. Nechť
$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0.$$
To znamená, že existuje ryzí okolí $O^*(x_0)$, na kterém je
$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$
Tato nerovnost dává $f'(x) < 0$ pro $x \in O^{*-}(x_0)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in O^{*+}(x_0)$. Funkce tedy má podle věty 18.6 v bodě x_0 ostré lokální minimum. □

Příklad 18.8. Ze čtvercového plechu o straně délky $2a$ $(a > 0)$ máme zhotovit krabici bez víka tak, že v rozích vyřízneme stejně velké čtverce. Jak velké musí být strany těchto odříznutých čtverců, aby krabice měla maximální objem?

Řešení. $V = 4(a - x)^2 x$, kde $x \in (0, a)$. $V' = -8(a - x)x + 4(a - x)^2 = 4(a - x)(-2x + a - x) = 4(a - x)(a - 3x)$. Z rovnice $V'(x) = 0$ dostaneme dva stacionární body $x_1 = a$ a $x_2 = a/3$. Kořen x_1 nevyhovuje, protože krabice by měla podstavu $2a - 2a = 0$. Stačí proto vyšetřit případ $x_2 = a/3$. Protože $V''(x) = -4(a - 3x) - 12(a - x) = 24x - 16a$, $V''(x_2) = 8a - 16a = -8a < 0$, jde o lokální (a zároveň globální) maximum. Je tedy $V_{\max} = 4(2a/3)^2 a/3 = 16a^3/27$.

Věta 18.9 (3. věta o postačujících podmínkách pro lokální extrém)**.** *Nechť funkce f má na $O(x_0)$ spojitou n-tou derivaci $(n \geq 3)$ a*
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$
Pak, je-li n liché, nenastane v x_0 extrém (x_0 je inflexní bod, viz definice níže). Je-li však n sudé, nastane v x_0 ostré lokální maximum při $f^{(n)}(x_0) < 0$ a ostré lokální minimum při $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Důkaz. Podle Taylorovy věty na uvažovaném okolí $O(x_0)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n.$$

Protože funkce $f^{(n)}$ je spojitá na $O(x_0)$, existuje určité okolí $\widetilde{O}(x_0)$, na kterém je $\operatorname{sgn} f^{(n)}(x) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$ (sgn značí znaménko výrazu). Zvolíme-li $x \in \widetilde{O}(x_0)$, pak také $x_0 + \vartheta(x - x_0) \in \widetilde{O}(x_0)$, a tedy $\operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) = \operatorname{sgn} f(x_0)$. Odtud $\operatorname{sgn}\bigl(f(x) - f(x_0)\bigr) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$.

Je-li n liché, pak hodnota $(x - x_0)^n$ mění znaménko (je záporná pro $x < x_0$ a kladná pro $x > x_0$). Důsledkem toho také změní znaménko výraz $f(x) - f(x_0)$ (tj. $f(x) > f(x_0)$ pro x nalevo od x_0 a $f(x_0) > f(x)$ pro x napravo od x_0, nebo naopak), a tudíž v bodě x_0 nenastává extrém.

Je-li n sudé, pak hodnota $(x - x_0)^n$ nemění znaménko, přesněji, je kladná pro všechna $x \in \widetilde{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. To znamená, že pro $f^{(n)}(x_0) < 0$ je $f(x) - f(x_0) < 0$ pro všechna $x \in \widetilde{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$, tj. $f(x) < f(x_0)$, takže v bodě x_0 je ostré lokální maximum. Pro $f^{(n)}(x_0) < 0$ naopak dostaneme $f(x) > f(x_0)$ pro $x \in \widetilde{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$, tj. v bodě x_0 je ostré lokální minimum. □

Věta 18.10. *Nechť funkce f má na intervalu $I \subseteq D(f)$ derivaci f'. Pak funkce f je konvexní (resp. konkávní, resp. ryze konvexní, resp. ryze konkávní) na intervalu $I \Leftrightarrow f'$ je na I neklesající (resp. nerostoucí, resp. rostoucí, resp. klesající).*

Důkaz. Ukažme nejprve, že když f je na intervalu I konvexní a má zde derivaci, pak platí $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$, kde x_0 a x jsou libovolné dva různé body v intervalu I. Tato podmínka říká, že funkční hodnota $f(x)$ je vždy nad tečnou v libovolném bodě (nebo na ní). Konvexnost na I znamená, že pro libovolná dvě $x_1, x_3 \in I$ a libovolné $\xi \in \langle 0, 1\rangle$ platí $f(x_1(1 - \xi) + x_3\xi) \leq (1 - \xi)f(x_1) + \xi f(x_3)$, viz definice 8.14. Je-li $x_1 < x_3$ a x_2 je libovolný bod mezi x_1 a x_3 (tj. $x_2 = (1 - \xi)x_1 + \xi x_3$ pro nějaké $\xi \in (0, 1)$), pak lze nerovnost napsat ve tvaru

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$$

(tento tvar dostaneme ihned, pokud si vyjádříme hodnotu parametru ξ ze vztahu $x_2 = (1 - \xi)x_1 + \xi x_3$ a dosadíme do první nerovnosti). Odečtením $f(x_1)$ od obou stran nerovnosti a vydělením členem $x_2 - x_1$ dostaneme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \qquad x_1 < x_2 < x_3.$$

Nechť nyní x_0 a x jsou libovolné různé body intervalu I a nechť nejprve $x_0 < x$. Pak pro libovolné $t \in (x_0, x)$ poslední nerovnost dává

$$\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Limitním přechodem $t \to x_0+$ dostaneme $f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (limita existuje díky předpokladu existence derivace f' na I – ta se v každém bodě rovná jednostranným derivacím), tj. $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$. Je-li naopak $x < x_0$ a $t \in (x, x_0)$, pak máme

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(t)}{x_0 - t}$$

a limitním přechodem $t \to x_0-$ dostaneme $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Dále ukažme, že když f je navíc ryze konvexní na I, pak pro libovolné dva různé vnitřní body x_0 a x intervalu platí $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < f(x)$. Protože ryze konvexní funkce je zároveň konvexní, podle již dokázaného je $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$. Připusťme, že rovnost nastane, tj. existují body $x_1, x_3 \in I$, $x_1 < x_3$ takové, že $f(x_3) = f(x_1) + f'(x_1)(x_3 - x_1)$. Ryzí konvexnost na I je (analogicky nerovnosti výše) ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \qquad x_1 < x_2 < x_3,$$

přičemž dosazením $f(x_3) = f(x_1) + f'(x_1)(x_3 - x_1)$ dostaneme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_1) + f'(x_1)(x_3 - x_1) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_1).$$

Odtud $f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$, což je spor s již dokázaným (při přeznačení $x = x_2$, $x_0 = x_1$).

Pro konkávnost (resp. ryzí konkávnost) funkce bychom analogicky ukázali nerovnost $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) > f(x)$).

Nyní již můžeme dokázat uvedenou ekvivalenci ve větě.

„$\Rightarrow$“ Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ jsou libovolné body a f je konvexní na I. Pak podle prvního odstavce je $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ a zároveň $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$. Odtud

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

tj. f' je neklesající.

„$\Leftarrow$“ Sporem. Nechť f' je neklesající na I a připusťme, že f není konvexní. Tedy existují $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ taková, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz věta 16.2) existují $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ a $\xi_2 \in (x_2, x_2)$ taková, že $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1)$ a $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = f'(\xi_2)$. Máme tedy $f(\xi_1) > f(\xi_2)$ při $\xi_1 < \xi_2$. To je spor s tím, že f je na I neklesající, a tedy f musí být na I konvexní.

Analogicky bychom ukázali případ konkávnosti funkce a s využitím druhého odstavce důkazu také případ ryzí konvexnosti a ryzí konkávnosti. □

Důsledek 18.11. *Nechť funkce f má na intervalu I spojitou první derivaci a vlastní nebo nevlastní druhou derivaci. Pak f je ryze konvexní (resp. konkávní) na $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) na I, přičemž rovnost $f''(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Definice 18.12 (inflexního bodu)**.** Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x_0)$. Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem funkce f*, jestliže existují $O^{*-}(x_0)$ a $O^{*+}(x_0)$ taková, že f je ryze konvexní na $O^{*-}(x_0)$ a ryze konkávní na $O^{*+}(x_0)$, nebo naopak f je ryze konvexní na $O^{*+}(x_0)$ a ryze konkávní na $O^{*-}(x_0)$.

Poznámka. a) Je-li x_0 inflexní bod funkce f a f' je spojitá v bodě x_0, pak f' má v bodě x_0 ostrý lokální extrém.

b) Je-li x_0 inflexní bod funkce f a existuje vlastní nebo nevlastní druhá derivace $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$ Opačné tvrzení neplatí. Z $f''(x_0) = 0$ neplyne, že by x_0 byl inflexní bod f. Např. $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, ale v bodě $x_0 = 0$ není inflexní bod.

Definice 18.13 (asymptot)**.** 1. Řekneme, že přímka $p : x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice funkce f*, jestliže f má v x_0 alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu.

2. Řekneme, že přímka $p : y = kx + q$ je *asymptotou se směrnicí funkce f*, jestliže f je definována v okolí ∞ (resp. $-\infty$) a platí $\lim_{x\to\infty}(kx + q - f(x)) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty}(kx + q - f(x)) = 0$).

Libovolná funkce může mít nejvýše dvě asymptoty se směrnicí, muže však mít libovolný počet asymptot bez směrnice.

Věta 18.14. *Přímka $y = kx + q$ je asymptotou se směrnicí funkce $f \Leftrightarrow$*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Pokud $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(kx + q - f(x)) = 0$ pak také

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{kx + q - f(x)}{x} = 0, \quad \text{tedy} \quad 0 = k - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Dále z $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(kx + q - f(x)) = 0$ plyne $0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(kx - f(x)) + q$ a tedy $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = q$.

„$\Leftarrow$“ Jestliže $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = q$, pak $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(kx + q - f(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(kx - f(x)) + q = -q + q = 0.$ □

Postup při vyšetřování průběhu funkce

1. Určíme $D(f)$, nulové body (intervaly kladnosti a zápornosti f), případně sudost a lichost, periodičnost, spojitost a poruchy spojitosti.

2. Vypočítáme f', určíme nulové body f' (stacionární body) a intervaly kladnosti a zápornosti f', body, v nichž f' neexistuje (lokální extrémy).

3. Vypočítáme f'', určíme nulové body f'' (inflexní body) a intervaly kladnosti a zápornosti f'' (konvexnost a konkávnost).

4. Vypočítáme příslušné jednostranné limity v „hraničních bodech“ $D(f)$ (tj. najdeme všechny asymptoty bez směrnice). Najdeme obě asymptoty se směrnicí (pokud existují).

5. Vypočítáme funkční hodnoty ve význačných bodech (stacionárních, inflexních), případně v několika dalších bodech. V inflexních bodech muže být užitečné vypočítat hodnotu derivace.

6. Na základě informací 1.–5. načrtneme graf.

Příklad 18.15. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Řešení. Funkce je lichá, má nulový bod $x_0 = 0$ (na $\mathbb{R}^+$ je kladná, na $\mathbb{R}^-$ záporná). Platí

$$f'(x) = -2\frac{x^2-1}{x^2+1)^2}.$$

Z rovnice $f'(x) = 0$ pak dostáváme stacionární body $s_{1,2} = \pm 1$, přičemž není těžké ověřit, že v bodě $s_1 = 1$ je ostré lokální maximum a v bodě $s_2 = -1$ je ostré lokální minimum (viz věta 18.6). Druhá derivace pak je

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3},$$

přičemž z rovnice $f''(x) = 0$ (s přihlédnutím ke znaménku f'' na příslušných intervalech) dostaneme 3 inflexní body $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. Protože

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0,$$

přímka $y = 0$ (osa x) je jedinou asymptotou se směrnicí (asymptoty bez směrnice funkce nemá).