1. Definujte pojem derivace funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Formou náčrtku udejte příklad funkce f a bodu x_0 tak, že funkce f je v x_0 spojitá a současně v bodě x_0 neexistuje derivace funkce f.

3. Mějme tvrzení A a B . Rozhodněte, která z implikací $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ platí. U neplatné implikace uveďte protipříklad.
A : Funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ derivaci;
B : Funkce f je v bodě x_0 spojitá.

4. Zderivujte a výsledek neupravujte:

   α) a) $f(x) = 6x^5$, b) $y = \frac{3}{x^2}$, c) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$, d) $y = \pi$, e) $g(x) = \sin^2 x$, f) $h(x) = \sin x^2$.

   β) a) $y = \cos^3 x^3$, b) $y = \ln(x^2 + x - 1)$, c) $f(x) = \mathrm{arctg}(x^2 + 1)$, d) $k(x) = 5\left(\sin(2x+3)^2\right)^3$.

   γ) a) $y = \sin^3(\cos^2(\mathrm{tg}\, x))$.

   δ) a) $y = (x^2 + 3)\sin x$, b) $z(x) = \cos^3 x \ln^3 x^2$, c) $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - x^2}}$, d) $y = x \sin^2(x^3)\ln(x^2)$.

   ε) a) $t(x) = \frac{\mathrm{tg} x^2}{\mathrm{cotg} x^3}$, b) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$.

5. Určete příslušnou první derivaci podle příslušné proměnné:

   a) $s(t) = (t^2 + 3t + 6)\sin(5t)$, $\dot{s}(t) = ?$,

   b) $x(s) = \sin s \ln(\cos s^2)$, $\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = ?$,

   c) $k(w) = \mathrm{tg}(aw^2 + w^b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}k(w)}{\mathrm{d}w} = ?$,

   d) $y(\omega) = \sin(\omega t)\cos(\omega^2 t)$, kde $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}y(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = ?$.

6. Určete první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$, která je dána parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$

   a) $x = 4t + t^2$, $y = t^3 + t$. *[* $f'(x) = \frac{3t^2+1}{4+2t}$, $f''(x) = \frac{6t^2+24t-2}{(4+2t)^3}$ *]*

   b) $x = \ln t$, $y = \sin 2t$. *[* $f'(x) = 2t\cos 2t$, $f''(x) = 2t\cos 2t - 4t^2 \sin 2t$ *]*

7. Vypočtěte diferenciál funkce f v bodě x_0 při přírůstku h.

   a) $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 1$ při přírůstku $h = 0{,}1$. Znázorněte výsledek graficky.

   b) $f(x) = x\sin(2x)$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{3}$ při přírůstku $h = \mathrm{d}x$.

   c) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ v bodě x_0 a přírůstku $\mathrm{d}x$.

8. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu a výsledek znázorněte graficky

   a) $\sin 41°$,
   Poznámka: Je zřejmé, že za funkci f je vhodné si zvolit funkci $f(x) = \sin x$. Pro lepší pochopení myšlenky diferenciálu doporučujeme vyzkoušet si výpočet pro dvě různé volby bodu x_0:
   α)$x_0 = 45° = \frac{\pi}{4}$, *tedy přírůstek* $h = x - x_0 = 41° - 45° = -4°$
   β)$x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$, *tedy přírůstek* $h = x - x_0 = 41° - 30° = 11°$.

   b) $\sin 35°$,

   c) $\mathrm{arctg} 0{,}95$.

9. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_T, y_T]$, který je bodem dotyku.

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $T = [\frac{1}{2}, ?]$. *[* $t: 4x + y - 4 = 0$, $n: \ldots$ *]*

   b) $f(x) = 2\sqrt{2}\sin x$, $T = [\frac{\pi}{4}, ?]$. *[* $t: 2x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0$, $n: \ldots$ *]*

   c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos 2x$, $T = [0, ?]$. *[* $t: x + y - 1 = 0$, $n: \ldots$ *]*

10. Ve kterých bodech je tečna křivky $y = 2 + x - x^2$

    a) rovnoběžná s osou x; *[* $[\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}]$ *]*

    b) rovnoběžná s osou souměrnosti prvního kvadrantu? *[* $[0, 2]$ *]*

11. V jakém vztahu musí být koeficienty a, b a c, aby se parabola $y = ax^2 + bx + c$ dotýkala osy x?
    [$b^2 - 4ac = 0$ *]*

12. Určete, pod jakým úhlem protínají grafy funkcí $y = f(x)$ osu x a situaci načrtněte:

    a) $y = \ln x$. *[* $\frac{\pi}{4}$ *]*; b) $y = \mathrm{tg} x$. *[* $\frac{\pi}{4}$ *]*; c) $y = x^3$. *[* 0 *]*