

1. Vypočítejte následující limity:

- | | | | |
|---|---------------------------------|--|---------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$ | Výsledek: 2. | p) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right);$ | Výsledek: 0. |
| b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctg x) \ln x;$ | Výsledek: 0. | q) $\lim_{x \rightarrow 0+} (\arcsin x)^{\lg x};$ | Výsledek: 1. |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cotg x - \frac{1}{x});$ | Výsledek: 0. | r) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x};$ | Výsledek: $\frac{\sqrt{3}}{3}.$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x};$ | Výsledek: 1. | s) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2a}} \frac{1 - \sin ax}{(2ax - \pi)^2};$ | Výsledek: $\frac{1}{8}.$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\lg x - 1}{\sin 4x};$ | Výsledek: $-\frac{1}{2}.$ | t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3};$ | Výsledek: $\frac{1}{3}.$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x};$ | Výsledek: 0. | u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{\sin^3 x};$ | Výsledek: 0. |
| g) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \lg \frac{\pi x}{2};$ | Výsledek: $\frac{2}{\pi}.$ | v) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x};$ | Výsledek: 1. |
| h) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\ln \sin x};$ | Výsledek: 1. | w) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x);$ | Výsledek: $\infty.$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3};$ | Výsledek: $\frac{1}{2}.$ | x) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x};$ | Výsledek: 1. |
| j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$ | Výsledek: 1. | y) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right);$ | Výsledek: $-\frac{1}{2}.$ |
| k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\sin 3x};$ | Výsledek: $\frac{2}{3}.$ | z) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cotg x} - \frac{\pi}{2 \cos x}\right);$ | Výsledek: -1. |
| l) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}};$ | Výsledek: $\frac{1}{\sqrt{e}}.$ | zz) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}};$ | Výsledek: $e^{-6}.$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}};$ | Výsledek: 1. | yy) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{\frac{1}{x^2}};$ | Výsledek: 1. |
| n) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{3}{4 + \ln x}};$ | Výsledek: $e^3.$ | xx) $\lim_{x \rightarrow 0+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}};$ | Výsledek: $e^{-1}.$ |
| o) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right);$ | Výsledek: $-\frac{1}{2}.$ | | |

2. Vypočítejte následující limity:

- | | |
|--|-----------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x},$ | $[\frac{1}{3}]$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x,$ | $[\frac{1}{e}]$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x},$ | $[2]$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}.$ | $[1]$ |

3. Napište obecný tvar Taylorova polynomu funkce f řádu n v bodě x_0 .4. Napište obecný tvar Maclaurinova polynomu funkce f řádu n .5. Napište Taylorův polynom řádu 4 funkce $f(x) = \ln x$ v bodě $x_0 = 4$.

$$[T_4(x) = \ln 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}(x-4)^2 + \frac{1}{192}(x-4)^3 - \frac{1}{1024}(x-4)^4]$$

6. Napište Maclaurinův polynom řádu 4 funkce $f(x) = xe^{-x}$.

$$[M_4(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4]$$

7. Napište Maclaurinův polynom řádu n funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

$$[\frac{1}{1-x} = \dots]$$

Poznámka: Zamyslete se nad výsledným polynomem především z hlediska určení součtu členů.

8. Aproximujte následující funkce v okolí bodu $x_0 = 0$ polynomem nejvýše pátého stupně:

- | | |
|----------------------|---|
| a) e^x | $[e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}]$ |
| b) $\sin x$ | $[\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}]$ |
| c) $\cos x$ | $[\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}]$ |
| d) $\frac{1}{1+x^2}$ | $[\frac{1}{1+x^2} \approx 1 - x^2 + x^4]$ |

9. Odhadněte absolutní chybu v následujících přibližných vztazích:

- | | |
|--|--------------------------------------|
| a) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ pro $0 \leq x \leq 1$. | $[Je\ menší\ než\ \frac{3}{(n+1)!}]$ |
| b) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ pro $ x \leq \frac{1}{2}$. | $[Je\ menší\ než\ \frac{1}{3840}]$ |

10. Na základě znalosti rozvoje funkce e^x napište rozvoj funkce xe^{-x^2} .