19 Primitivní funkce

Definice 19.1 (primitivní funkce)**.** Buď I interval (omezený nebo neomezený) a f, F funkce definované na I. Jestliže $\forall x \in I$ je $F'(x) = f(x)$, pak F se nazývá *primitivní funkce k funkci f na intervalu I.*

Lemma 19.2. *Funkce f je na intervalu I konstantní $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ $\forall x \in I$, pak $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$.

„$\Leftarrow$“ Nechť $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$. Pak pro libovolná $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0$. Odtud $f(x_1) = f(x_2)$ a tedy f musí být konstantní, protože hodnoty x_1, x_2 byly libovolné. $\square$

Věta 19.3 (o množině všech primitivních funkcí)**.** *a) Je-li F primitivní k f na intervalu I, pak také $F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je primitivní k f na I.*

b) Jsou-li F a G primitivní k f na I, pak existuje konstanta c taková, že $F(x) = G(x) + c$.

c) Je-li F funkce primitivní k f na I, pak $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ je množina všech funkcí primitivních k funkci f na I.

Důkaz. ad a) $(F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = f(x)$ na I.

ad b) Z předpokladu plyne $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f - f = 0$ na I a tedy podle Lemmatu 19.2 $F(x) - G(x) = c$, neboli $F(x) = G(x) + c$.

Tvrzení c) je důsledkem prvních dvou. $\square$

Věta 19.4 (o existenci primitivní funkce)**.** *Ke každé funkci spojité na intervalu I existuje funkce primitivní.*

Důkaz tvrzení využívá poznatků z teorie určitého integrálu, věta tedy bude dokázána později.

Definice 19.5. Množina všech primitivních funkcí se nazývá *neurčitý integrál* a značí se $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Základní integrály

1. $\displaystyle\int 0 = c$ na $\mathbb{R}$.
2. Pro $\alpha \neq -1$ je $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ na $\mathbb{R}$, je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0$; na každém podintervalu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, je-li $-\alpha \in \mathbb{N}$; na $\mathbb{R}^+$, je-li $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$ na každém podintervalu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$ na $\mathbb{R}$.
5. Pro $a > 0$, $a \neq 1$ je $\displaystyle\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$ na $\mathbb{R}$.
6. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$ na $\mathbb{R}$.
7. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$ na $\mathbb{R}$.
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$ na každém $\big((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\big)$, $k \in \mathbb{Z}$.
9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$ na každém $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$ na $(-1, 1)$.
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \ln\Big|x + \sqrt{x^2-1}\Big| + c$ na každém podintervalu $\mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$ ($= \operatorname{argcosh} x + c$ na $(1, \infty)$).
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsinh} x + c$ na $\mathbb{R}$.
13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c_1 = -\operatorname{arccotg} x + c_2$ na $\mathbb{R}$.
14. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ($= \operatorname{argtgh} x + c_1$ na $(-1, 1)$, $= \operatorname{argcotgh} x + c_1$ na každém podintervalu $\mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$).
15. $\displaystyle\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c$ na $\mathbb{R}$.

16. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + c \quad$ na $\mathbb{R}$.

17. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + c \quad$ na každém podintervalu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + c \quad$ na $\mathbb{R}$.

19. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \quad$ na každém intervalu, kde je f'/f spojitá.

Všechny výše uvedené integrály by se ověřily zpětným derivováním primitivní funkce.

Věta 19.6 (základní vlastnosti)**.** *Existují-li na intervalu I neurčité integrály funkcí f, g, pak na I existují také neurčité integrály z funkce*

a) *kf, kde $k \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, a platí*

$$\int kf(x) \,\mathrm{d}x = k \int f(x) \,\mathrm{d}x,$$

b) *$f + g$ a platí*

$$\int [f(x) + g(x)] \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Plyne ihned z pravidel pro derivovaní a definice primitivní funkce. □

Poznámka. a) Z předchozí věty plyne, že integrace je lineární operací.

b) Pozor, $\int f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \neq \int f(x) \,\mathrm{d}x \cdot \int g(x) \,\mathrm{d}x$! Stejně tak, integrál podílu není podíl integrálů.

Věta 19.7. *Nechť na intervalu I platí $\int f(x) \,\mathrm{d}x = F(x) + c$. Pak*

$$\int f(ax + b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax + b) + c \quad \text{na} \quad J = \{x \in \mathbb{R} : ax + b \in I\}.$$

Důkaz. Platí $\left[\frac{1}{a} F(ax + b)\right]' = \frac{1}{a} F'(ax + b)(ax + b)' = F'(ax + b) = f(ax + b)$. □

Příklad 19.8. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + c.$$

Věta 19.9 (integrace po částech)**.** *Nechť u, v jsou funkce, které mají na intervalu I derivaci. Existuje-li primitivní funkce k jedné z funkcí $u'v$, uv', pak existuje také ke druhé z nich a platí*

$$\int u'(x)v(x) \,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Protože u, v mají derivaci na I, má zde také derivaci uv, přičemž platí $(uv)' = u'v + uv'$ (viz věta 14.3). Integrací tohoto vztahu dostaneme $\int (uv)' \mathrm{d}x = uv + c = \int (u'v + uv') \,\mathrm{d}x$ na I, tj. integrál $\int (u'v + uv') \,\mathrm{d}x$ na I existuje. Pokud existuje primitivní funkce k alespoň jedné z funkcí $u'v$, uv' – nechť je to např. k funkci uv' – pak podle věty 19.6 existuje integrál z rozdílu $\int [(u'v + uv') - uv'] \,\mathrm{d}x = \int u'v \,\mathrm{d}x$, což je druhý integrál. Platí tedy $uv + c = \int u'v \,\mathrm{d}x + \int uv' \mathrm{d}x$. Odtud již dostáváme vzorec věty. □

Příklad 19.10. Vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. Položíme-li $u'(x) = 1$ a $v(x) = \operatorname{arctg} x$, pak $u(x) = x$ a $v'(x) = 1/(1 + x^2)$. Podle věty 19.9 platí

$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c.$$

Věta 19.11 (integrace substituční metodou $t = \varphi(x)$)**.** *Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a nechť funkce φ má derivaci na intervalu J, přičemž platí $\varphi(J) \subseteq I$. Potom na J platí*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \underbrace{F(\varphi(x)) + c}_{\int f(t) \,\mathrm{d}t|_{t=\varphi(x)}}.$$

Důkaz. Protože F a φ splňují předpoklady věty o derivaci složené funkce (věta 14.4), platí $[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, tj. $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$. $\square$

Příklad 19.12. Vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^3+1=t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9}t^{3/2} + c = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + c.$$

Věta 19.13 (integrace substituční metodou $x = \varphi(t)$)**.** *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I, φ je funkce definovaná na intervalu J, která zde má nenulovou derivaci (tj. φ musí být spojitá a ryze monotónní na J) a $\varphi(J) = I$. Je-li F primitivní funkce k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na J, pak na I platí*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(\varphi^{-1}(x)) + c}_{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t|_{t=\varphi^{-1}(x)}}$$

Důkaz. Předpoklady věty vyhovují předpokladům vět o derivaci složené a inverzní funkce (věty 14.4 a 14.5). Máme tedy $[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\varphi^{-1}(x))[\varphi^{-1}(x)]' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)$. $\square$

Příklad 19.14. Vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= |x = \sin t| = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + c \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + c = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\cos(\arcsin x) + c = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} + c \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$