20 Speciální substituce (integrační metody)

Integrace racionálních lomených funkcí

V rozkladu racionální lomené funkce vystupují parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}, \quad \frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^\ell}.$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-k}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}+c, & k\neq 1,\\ \ln|x-\alpha|+c, & k=1. \end{cases}$$

$$\frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^\ell} = \frac{B}{2}\frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^\ell} + \frac{aB+C}{[(x-a)^2+b^2]^\ell},$$

$$\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^\ell}\,\mathrm{d}x = \left|(x-a)^2+b^2=t\right| = \int \frac{1}{t^\ell}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\ell}\frac{1}{t^{\ell-1}}+c = \frac{1}{1-\ell}\frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{\ell-1}}+c,\\ \ln|t|+c = \ln[(x-a)^2+b^2]+c. \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^\ell}\,\mathrm{d}x = |x-a=bt| = \int \frac{b}{(b^2t^2+b^2)^\ell}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b^{2\ell-1}}\int\frac{1}{(t^2+1)^\ell}\,\mathrm{d}t.$$

Označme $K_\ell = \int \frac{1}{(t^2+1)^\ell}\,\mathrm{d}t$. Pak $K_1 = \operatorname{arctg} t + c$,

$$K_\ell = \begin{vmatrix} u=\frac{1}{(t^2+1)^\ell} & v'=1 \\ u'=\frac{-2\ell t}{(t^2+1)^{\ell+1}} & v=t \end{vmatrix} = \frac{t}{(t^2+1)^\ell} + 2\ell\int\frac{t^2}{(t^2+1)^{\ell+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+1)^\ell}$$
$$+2\ell\left(\int\frac{1}{(t^2+1)^\ell}\,\mathrm{d}t - \int\frac{1}{(t^2+1)^{\ell+1}}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{t}{(t^2+1)^\ell} + 2\ell(K_\ell - K_{\ell+1}),$$

tedy $K_\ell = \frac{t}{(t^2+1)^\ell} + 2\ell K_\ell - 2\ell K_{\ell+1}$. Odtud $K_{\ell+1} = \frac{t}{2\ell(t^2+1)^\ell} + \frac{2\ell-1}{2\ell}K_\ell$. Pokud přeznačíme (píšeme ℓ namísto $\ell+1$), dostáváme

$$K_\ell = \frac{t}{2(\ell-1)(t^2+1)^{\ell-1}} + \frac{2\ell-3}{2\ell-2}K_{\ell-1}.$$

Poznámka. $\int R(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x$ – substituce $t=f(x)$ převede na $\int R(t)\,\mathrm{d}t$, $\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x$ – substituce $t=\mathrm{e}^{ax}$ převede na $\int R(t)\,\mathrm{d}t$.

Definice 20.1 (polynomu dvou proměnných)**.** *Polynom ve dvou proměnných* je zobrazení $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tvaru

$$P(x,y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 + \dots + a_{0,n}y^n + \dots$$
$$+ a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}.$$

Racionální funkce ve dvou proměnných je funkce $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tvaru

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

kde P,Q jsou polynomy ve dvou proměnných.

Integrály, které lze transformovat na integrály z racionální funkce

1. $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ – substituce $\displaystyle\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.
2. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$, $a\neq 0$ – Eulerovy substituce

$$\begin{aligned} &a>0: && \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x+t,\\ &c>0: && \sqrt{ax^2+bx+c} = xt\pm\sqrt{c},\\ &ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),\ \alpha_1\neq\alpha_2: && \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha_1) \end{aligned}$$

3. Binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, kde $m,n,p\in\mathbb{Q}$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
&p\in Z: && x=t^N,\ \text{kde } N \text{ je společný jmenovatel čísel } m,n,\\
&\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}: && a+bx^n=t^N,\ \text{kde } N \text{ je jmenovatel zlomku } p,\\
&\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}: && \frac{a}{x^n}+b=t^N,\ \text{kde } N \text{ je jmenovatel zlomku } p.
\end{aligned}$$

4. $\int R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$ – substituce $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, v některých případech lze volit jednodušší substituci:

$$\begin{aligned}
R(\sin x,-\cos x)&=-R(\sin x,\cos x): &&\sin x=t,\\
R(-\sin x,\cos x)&=-R(\sin x,\cos x): &&\cos x=t,\\
R(-\sin x,-\cos x)&=R(\sin x,\cos x): &&\operatorname{tg} x=t.
\end{aligned}$$

Příklad 20.2. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}&=\left|\begin{array}{c} x^2-x+1=(t-x)^2\\ x=\frac{t^2-1}{2t-1},\ \mathrm{d}x=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{2(t^2-t+1)}{t(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t\\
&=2\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t+3\int\frac{1}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t-3\int\frac{1}{2t-1}\,\mathrm{d}t=2\ln|t|-\frac{3}{2(2t-1)}-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+c\\
&=\frac{3}{2}\left(\ln\frac{(x+\sqrt{x^2-x+1})^{4/3}}{|2(x+\sqrt{x^2-x+1})-1|}-\frac{1}{2(x+\sqrt{x^2-x+1})-1}\right)+c.
\end{aligned}$$

Poznámka. Primitivní funkce k funkci elementární nemusí být elementární, může to být vyšší transcendentní funkce. Vyššími funkcemi jsou zejména

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{Si}(x)=\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x & \text{„sinusintegrál“}, & \mathrm{Ci}(x)=\displaystyle\int\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x & \text{„kosinusintegrál“},\\
\mathrm{Li}(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x & \text{„logaritmusintegrál“}, & \displaystyle\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x & \text{integrál z Gaussovy funkce},\\
\displaystyle\int\sin x^2\,\mathrm{d}x,\ \int\cos x^2\,\mathrm{d}x & \text{Fresnelovy integrály}, & &
\end{array}$$

binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, kdy žádné žádné z čísel p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ není celé. Není známo obecné pravidlo, které by umožnilo rozhodnout, zda primitivní funkci neumíme vyjádřit jako elementární v důsledku nevhodných integračních metod, nebo zda skutečně vyjadřuje vyšší transcendentní funkci.

21 Určitý Riemannův integrál

(Bernhard Riemann 1826–1866, Němec) Nebude-li řečeno jinak, tak v celé kapitole bude funkce f ohraničená a definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$.

Definice 21.1 (pojmů potřebných při konstrukci Riemannova integrálu)**.** *Dělením uzavřeného intervalu* $\langle a,b\rangle$ rozumíme množinu $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ takovou, že $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. Číslo $\nu(D)=\max\{x_i-x_{i-1}: i=1,2,\dots,n\}$ nazýváme *normou dělení D*. Symbolem $\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ označíme množinu všech dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Jsou-li $D_1\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$, $D_2\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ taková, že $D_1\subset D_2$ (tj. každý dělící bod D_1 je současně dělícím bodem D_2), řekneme, že dělení D_2 je *zjemněním dělení* D_1.

Definice 21.2 (dolního a horního součtu)**.** Buďte $D\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$, $m_i=\inf\{f(x): x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $M_i=\sup\{f(x): x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$. Číslo

$$s(D,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

nazveme *dolním součtem* a číslo

$$S(D,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

nazveme *horním součtem* příslušným k funkci f a dělení D.

Poznámka. Existence čísel m_i a M_i je zaručena ohraničeností f.

Lemma 21.3. (i) *Pro libovolné $D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ platí $s(D,f) \le S(D,f)$.*

(ii) *Je-li $D_2 \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ zjemněním $D_1 \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$, pak $s(D_1,f) \le s(D_2,f)$ a $S(D_1,f) \ge S(D_2,f)$ (tj. při zjemnění dělení se dolní součet nezmenší a horní součet nezvetší).*

(iii) *Nechť $m = \inf\{f(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$. Pak pro každé $D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ platí $m(b-a) \le s(D,f) \le S(D,f) \le M(b-a)$.*

Důkaz. ad (i) Plyne ihned z toho, že $m_i \le M_i$ a $x_i - x_{i-1} > 0$ pro každé $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

ad (ii) Nechť D_2 má o jeden dělící bod více, než D_1, tj.

$$D_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n\}, \quad D_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_k, \ldots, x_n\}.$$

Označme $m_i = \inf\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $m_k^* = \inf\{f(x) : x \in \langle x_{k-1}, z\rangle\}$, $m_k^{**} = \inf\{f(x) : x \in \langle z, x_{k-1}\rangle\}$. Pak zřejmě $m_k \le m_k^*$, $m_k \le m_k^{**}$ a tedy

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - z) + m_k(z - x_{k-1}) \le m_k^{**}(x_k - z) + m_k^*(z - x_{k-1}).$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} s(D_1,f) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k^{**}(x_k - z) + m_k^*(z - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = s(D_2,f). \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že $S(D_1,f) \ge S(D_2,f)$. Pokud D_2 má o p dělících bodů více než D_1, ukážeme platnost tvrzení p-násobným opakováním téže úvahy.

ad (iii) Plyne z (i) a (ii), neboť $\{a,b\} \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ a každé jiné dělení je zjemněním $\{a,b\}$. □

Definice 21.4 (dolního a horního integrálu)**.** Číslo

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(D,f) : D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)\}$$

nazýváme *dolní integrál funkce* f na intervalu $\langle a,b\rangle$ a číslo

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(D,f) : D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)\}$$

nazýváme *dolní integrál funkce* f na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Poznámka. Uvedená definice je korektní, protože množiny $\{s(D,f) : D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)\}$ a $\{S(D,f) : D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)\}$ jsou podle bodu (iii) z předchozího lemmatu ohraničené a neprázdné a tedy sup i inf existují. Tato definice spolu s vlastností (iii) z předchozího lemmatu ihned dávají:

Věta 21.5. *Nechť $m = \inf\{f(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in \langle a,b\rangle\}$. Pak platí*

$$m(b-a) \le \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

Definice 21.6 (integrovatelnosti a Riemannova integrálu)**.** Řekneme, že f *je na* $\langle a,b\rangle$ *integrovatelná (integrabilní, integrace schopna) v Riemannově smyslu*, jestliže

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V tomto případě definujeme její *Riemannův integrál*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

řekneme, že f *není na* $\langle a,b\rangle$ *integrovatelná v Riemannově smyslu.*

Příklad 21.7. Rozhodněte o Riemannovské integrovatelnosti funkcí a) $f(x) = c$ na $\langle a,b\rangle$, b) $f(x) = \chi(x)$ na $\langle a,b\rangle$.

Řešení. ad a) Je-li $f(x) = c$, pak $m = M = c$ a podle věty 21.5

$$c(b-a) \leq \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq c(b-a),$$

z čehož plyne

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a).$$

ad b) Pro libovolné $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ je $m_i = 0$, $M_i = 1$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, a tedy

$$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0 = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tedy χ není integrovatelná.

Definice 21.8 (integrálního součtu)**.** Nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$, $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$). Množina $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ se nazývá *výběr reprezentantů dělících intervalů dělení D*. Číslo

$$\sigma(D,f,\Xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se nazývá *integrální součet příslušný k funkci f, dělení D a výběru reprezentantů Ξ*.

Poznámka. Poněvadž $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, platí $s(D,f) \leq \sigma(D,f,\Xi) \leq S(D,f)$.

Posloupností v širším smyslu rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do libovolné množiny. Lze tedy mluvit o posloupnosti dělení daného intervalu $\mathbb{N} \to \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$. Řekneme, že posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ je *nulová*, jestliže $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Ke každému $\delta > 0$ existuje $D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ takové, že $\nu(D) < \delta$ (stačí položit $n = \lfloor \frac{b-a}{\delta} \rfloor + 1$ a interval rozdělit na n stejně dlouhých dělících intervalů).

Věta 21.9. *Buď $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad a \quad \lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li navíc f integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a Ξ_n je libovolný výběr reprezentantů dělících intervalů dělení D_n, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n,f,\Xi_n) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz. Dokažme nejdříve pomocné tvrzení:

Lemma. *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$, $\nu(D) < \delta$ platí*

$$S(D,f) < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Důkaz lemmatu. Poněvadž f je ohraničená, existuje $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ takové, že $|f(x)| \leq h$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$. Z definice horního integrálu ihned máme $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(D,f)$ pro libovolné $D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$. Dále existuje dělení $D_1 = \{y_0, y_1, \ldots, y_p\} \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ takové, že $S(D_1,f) < \int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$ (kdyby takové dělení neexistovalo, nemohl by horní integrál být infimem horních součtů $S(D,f)$ přes všechna dělení, viz analogickou argumentaci v příkladu 6.4). Celkově tedy máme

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(D_1,f) < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{4hp}$. Pak $\delta > 0$. Buď $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$ libovolné takové, že $\nu(D) < \delta$. Dále položme $D_2 = D \cup D_1 = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$. Podle lemmatu 21.3(ii) je $S(D_2, f) \leq S(D, f)$. Dělící intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ rozdělíme na dva druhy: intervaly 1. druhu, jestliže uvnitř intervalu neleží žádný dělící bod y_j, intervaly 2. druhu v opačném případě. Každý dělící interval 1. druhu je rovněž dělícím intervalem dělení D_2. Tento interval přispívá k $S(D, f)$ i k $S(D_2, f)$ týmž sčítancem $M_i(x_i - x_{i-1})$, tedy v rozdílu $S(D, f) - S(D_2, f)$ se neprojeví. Uvnitř každého intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ 2. druhu leží alespoň jedno z čísel $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$, což znamená, že intervalů 2. druhu je nejvýše $p-1$. Interval druhého druhu přispívá k $S(D, f)$ sčítancem $M_i(x_i - x_{i-1})$, který je v absolutní hodnotě menší nebo roven jak číslo $h\nu(D)$ (protože $M_i \leq h$ a $\nu(D) = \max_i(x_i - x_{i-1})$), a protože $\nu(D) < \delta$, máme $h\nu(D) < h\delta$. Absolutní hodnota příspěvku všech intervalů 2. druhu k $S(D, f)$ je tedy menší než $h\delta p$. V D_2 je každý interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ 2. druhu rozdělen dělícími body $x_{i-1} = z_r < z_{r+1} < \dots < z_s = x_i$. Označme $M_k^* = \sup\{f(x) : x \in \langle z_{k-1}, z_k\rangle\}$. Opět $|M_k^*| \leq h$ a tedy absolutní hodnota příspěvku intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ do součtu $S(D_2, f)$ je

$$\left|\sum_{k=r+1}^{s} M_k^*(z_k - z_{k-1})\right| \leq \sum_{k=r+1}^{s} h(z_k - z_{k-1}) = h(z_s - z_r) = h(x_i - x_{i-1}) < h\nu(D) < h\delta.$$

Absolutní hodnota příspěvků všech intervalů 2. druhu k $S(D_2, f)$ je tedy menší než $h\delta p$. Odtud plyne, že $S(D, f) - S(D_2, f) < 2h\delta p = \frac{\varepsilon}{2}$, neboli $S(D, f) < S(D_2, f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Podle lemmatu 21.3(ii) je $S(D_2, f) \leq S(D_1, f)$, a tedy

$$S(D, f) < S(D_2, f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq S(D_1, f) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

což je tvrzení lemmatu. □

Buď nyní $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle výše uvedeného lemmatu existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$, $\nu(D) < \delta$ platí

$$S(D, f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Poněvadž

$$S(D, f) \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

platí

$$\left|S(D, f) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Dále, protože posloupnost $\{D_n\}$ je nulová, k $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. To znamená, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\left|S(D_n, f) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \text{neboli} \quad \lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analogicky bychom dokázali $\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Je-li f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, je $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, takže

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poslední tvrzení věty plyne z nerovnosti $s(D, f) \leq \sigma(D, f, \Xi) \leq S(D, f)$ a z věty o 3 posloupnostech. □

Poznámka. Určitý integrál definovaný skrz definice 21.1–21.6 je ve skutečnosti Darbouxův integrál (Jean-Gaston Darboux 1842–1917, Francouz), i když jsme jej nazvali Riemannův (někdy se také hovoří o Darbouxově definici Riemannova integrálu). Původní Riemannova definice pracuje právě s integrálními součty $\sigma(D, f, \Xi)$ z definice 21.8. Lze dokázat, že Darbouxův a Riemannův integrál jsou ekvivalentní (tj. když existuje jeden, existuje i druhý a dávají stejnou hodnotu). Důkaz implikace „Darboux ⇒ Riemann“ využívá předchozí větu. Darbouxova definice se považuje za lepší z didaktického hlediska.

Věta 21.10 (Nutná a postačující podmínka integrovatelnosti)**.** *Funkce f je na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná $\Leftrightarrow$ ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$ takové, že*

$$|S(D, f) - s(D, f)| < \varepsilon.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť f je integrovatelná a nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$ je libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Podle věty 21.9 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left|s(D_{n_0}, f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|S(D_{n_0}, f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy pro D_{n_0} platí

$$\begin{aligned} S(D_{n_0}, f) - s(D_{n_0}, f) &= |S(D_{n_0}, f) - s(D_{n_0}, f)| \\ &\le \left|S(D_{n_0}, f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - s(D_{n_0}, f)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“ Nechť je podmínka splněna, tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$ takové dělení, že $S(d, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Z této nerovnosti a z nerovností

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \le S(D, f), \qquad \int_{\underline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge s(D, f), \qquad s(D, f) \le S(D, f)$$

plyne, že

$$0 \le \int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\underline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Protože ale $\varepsilon > 0$ je libovolné, musí nutně být $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\underline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, neboli $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\underline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x$, tj. f je integrovatelná. □

Věta 21.11 (1. postačující podmínka pro riemannovskou integrovatelnost)**.** *Je-li funkce f monotónní na $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.*

Důkaz. Nechť je f pro určitost na $\langle a, b\rangle$ např. neklesající. Je-li $f(a) = f(b)$, pak je f na $\langle a, b\rangle$ konstantní a podle příkladu 21.7 je integrovatelná. Nechť tedy $f(a) < f(b)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$ takové, že $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Protože f je neklesající, platí

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\} = f(x_{i-1}), \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\} = f(x_i).$$

Odtud

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^n f(x_i)\nu(D) = \nu(D)[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})] \\ &= \nu(D)[f(x_n) - f(x_0)] = \nu(D)[f(b) - f(a)] < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle věty 21.10 je tedy f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$. □

Věta 21.12 (2. postačující podmínka pro riemannovskou integrovatelnost)**.** *Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak je zde integrovatelná.*

Důkaz. Buď f spojitá a $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle Heineho–Cantorovy (věta 13.14) je f na $\langle a, b\rangle$ spojitá stejnoměrně, a tedy k $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x, y \in \langle a, b\rangle$ taková, že $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Buď $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$, $\nu(D) < \delta$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$. Podle 2. Weierstrassovy věty existují $y_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $z_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takové, že $f(y_i) = m_i$, $f(z_i) = M_i$. Protože dělení D splňuje $\nu(D) < \delta$, platí také $|y_i - z_i| < \delta$, a tedy $f(z_i) - f(y_i) = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Odtud

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(d, f) &= \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(y_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n [f(z_i) - f(y_i)](x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle věty 21.10 je tedy f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$. □

Definice 21.13 (nulové množiny)**.** Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *nulová*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet otevřených intervalů (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\dots$, (a_n, b_n) takových, že $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \varepsilon$ a $M \subseteq (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n)$.

Platí:
- (i) Každá konečná množina je nulová.
- (ii) Sjednocení konečně mnoha nulových množin je nulová množina.
- (iii) Množina členů konvergentní posloupnosti je nulová.
- (iv) Množina členů posloupnosti, která má konečný počet hromadných bodu, je nulová.

Věta 21.14 (3. postačující podmínka pro riemannovskou integrovatelnost)**.** *Je-li množina bodů nespojitosti funkce f na $\langle a, b\rangle$ nulová, pak je f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Bude dokázano později. □

Příklad 21.15. Zjistěte, zda je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ integrovatelná funkce

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{pro } x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. Množina bodů nespojitosti $M = \{1/2^n\}$ tvoří konvergentní posloupnost, je to tedy nulová množina a podle předchozí věty je f integrovatelná (lze ukázat, že $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$).