22 Výpočet a vlastnosti Riemannova integrálu

Z praktického hlediska je pro výpočet Riemannova integrálu stěžejní následující tvrzení.

Věta 22.1 (Newtonova–Leibnizova formule, Isaac Newton 1643–1727, Angličan, Gottfried Wilhelm Leibniz 1646–1716, Němec)**.** *Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a nechť F je spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$ a primitivní k f na (a,b). Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Buď $D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$. Protože funkce F je primitivní k f na (a,b), má zde derivaci. Je navíc spojitá na $\langle a,b\rangle$, tudíž splňuje oba předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě (věta 16.2). Existuje tedy $\xi_i \in (x_{i-1},x_i)$ takové, že $F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$. Označme $\Xi = \{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$. Pak

$$\sigma(D,f,\Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})] = F(b)-F(a).$$

To znamená, že pro libovolné D existuje výběr reprezentantů Ξ takový, že $\sigma(D,f,\Xi) = F(b)-F(a)$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nyní libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Ke každému D_n existuje výběr reprezentantů Ξ_n takový, že $\sigma(D_n,f,\Xi_n) = F(b)-F(a)$. Podle věty 21.9

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sigma(D_n,f,\Xi_n) = \lim_{n\to\infty}[F(b)-F(a)] = F(b)-F(a).$$

□

Poznámka. V dalším budeme používat označení $[F(x)]_a^b := F(b)-F(a)$. Jsou-li F,G primitivní funkce k f, pak podle věty 19.3 je $G(x) = F(x)+c$ a tedy $[G(x)]_a^b = [F(x)+c]_a^b = (F(b)+c)-(F(a)+c) = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$. To znamená, že formule z věty 22.1 nezávisí na výběru primitivní funkce.

Příklad 22.2. Určete hodnotu integrálu $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Podle příkladu 19.14 je $F(x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)$ a tedy

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4}+0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)-0 = \frac{\pi}{2}.$$

Poznámka.

1. (Integrace per-partes pro určitý integrál) Mají-li funkce u,v v intervalu $\langle a,b\rangle$ spojité derivace u',v' pak platí

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. (Substituční metody pro určité integrály)
   (i) Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ a nechť funkce φ má spojitou derivaci na $\langle a,b\rangle$, přičemž zobrazuje tento interval na interval $\langle\alpha,\beta\rangle$ tak, že $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$. Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (ii) Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť funkce φ má spojitou derivaci na $\langle\alpha,\beta\rangle$, je zde rostoucí a zobrazuje $\langle\alpha,\beta\rangle$ na $\langle a,b\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 22.3. Určete hodnotu integrálu $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x=\sin t,\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t \\ -1\to-\pi/2,\ 1\to\pi/2 \end{array}\right| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Vlastnosti Riemannova integrálu

Věta 22.4. *Nechť f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$, $c,d\in\mathbb{R}$, $c\le f(x)\le d$ $\forall x\in\langle a,b\rangle$. Pak*

$$c(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le d(b-a).$$

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z věty 21.5, protože $c\le\inf\{f(x):x\in\langle a,b\rangle\}$, $d\ge\sup\{f(x):x\in\langle a,b\rangle\}$. □

Důsledek 22.5. a) *Je-li f integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí $f(x)\ge 0$ pro $\forall x\in\langle a,b\rangle$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge 0.$$

b) *Je-li f integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí $|f(x)|\le c$ $\forall x\in\langle a,b\rangle$, pak*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le c(b-a).$$

Věta 22.6 (aditivita vzhledem k integrovaným funkcím)**.** *Jsou-li f a g integrovatelné na $\langle a,b\rangle$, pak je i $f+g$ integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť $D=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_\}\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ libovolné a označme $m_i=\inf\{f(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $n_i=\inf\{g(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $p_i=\inf\{f(x)+g(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$. Na intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ platí $m_i+n_i\le f(x)+g(x)$ a tedy $m_i+n_i\le pi$, což znamená, že $m_i(x_i-x_{i-1})+n_i(x_i-x_{i-1})\le p_i(x_i-x_{i-1})$. Sečtením těchto nerovností pro i od 1 do n dostaneme $s(D,f)+s(D,g)\le s(D,f+g)$. Buď nyní $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak platí $s(D_n,f)+s(D_n,g)\le s(D_n,f+g)$ a limitním přechodem $n\to\infty$ dostaneme podle věty 21.9, poznámky a) pod větou 7.6 a věty 7.8(ii)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\le\int_{\overline{a}}^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Analogicky odvodíme

$$\int_a^{\underline{b}}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

tedy musí být $\int_{\overline{a}}^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^{\underline{b}}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

Věta 22.7 (homogenita vzhledem k integrovaným funkcím)**.** *Je-li f integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a $c\in\mathbb{R}$, pak cf je integrovatelná $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť $D=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ libovolné a označme $m_i=\inf\{f(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $M_i=\sup\{f(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $n_i=\inf\{cf(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $N_i=\sup\{cf(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$. Pro $c=0$ je tvrzení zřejmé.

Nechť $c>0$. Pak je $n_i=cm_i$, $N_i=cM_i$, a tedy $s(D,cf)=cs(D,f)$, $S(D,cf)=cS(D,f)$. Pro libovolnou nulovou $\{D_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ platí:

$$\int_{\overline{a}}^b cf(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}s(D_n,cf)=c\lim_{n\to\infty}s(D_n,f)=c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^{\underline{b}} cf(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}S(D_n,cf)=c\lim_{n\to\infty}S(D_n,f)=c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

z čehož plyne tvrzení.

Nechť $c<0$. Pak $n_i=cM_i$, $N_i=cm_i$ a tedy $s(D,cf)=cS(D,f)$, $S(D,cf)=cs(D,f)$ a důkaz dokončíme s využitím nulové posloupnosti $\{D_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$. □

Poznámka. Riemannův integrál je tedy lineární transformací (funkcionálem) na lineárním prostoru všech riemannovsky integrovatelných funkcí do vektorového prostoru $\mathbb{R}$.

Věta 22.8 (monotonie vzhledem k integrovaným funkcím). *Nechť f a g jsou integrovatelné na $\langle a,b\rangle$. Jestliže pro každé $x\in\langle a,b\rangle$ platí $f(x)\le g(x)$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. $\forall x\in\langle a,b\rangle$ je $g(x)-f(x)\ge 0$ a podle důsledku 22.5 je $0\le\int_a^b g(x)-f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Věta 22.9. (i) *Nechť f a g jsou integrovatelné na $\langle a,b\rangle$. Pak je také fg integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$.*
(ii) *Je-li navíc $|g(x)|\ge c>0$ $\forall x\in\langle a,b\rangle$, pak je také integrovatelná f/g na $\langle a,b\rangle$.*

Důkaz. ad (i) Nechť nejprve $f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$ pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$. Poněvadž funkce f a g jsou integrovatelné, jsou ohraničené, a tedy existuje $k>0$ takové, že $f(x)\le k$, $g(x)\le k$ pro $x\in\langle a,b\rangle$. Buď $\varepsilon>0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2k}>0$ existují podle věty 21.10 dělení D_1, D_2 intervalu $\langle a,b\rangle$ taková, že $S(D_1,f)-s(D_1,f)<\frac{\varepsilon}{2k}$, $S(D_2,g)-s(D_2,g)<\frac{\varepsilon}{2k}$. Položme $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}=D_1\cup D_2$. Podle lemmatu 21.3(ii) platí $s(D_1,f)\le s(D,f)$, $S(D_1,f)\ge S(D,f)$ a tedy $S(D,f)-s(D,f)\le S(D_1,f)-s(D_1,f)<\frac{\varepsilon}{2k}$. Podobně: $S(D,g)-s(D,g)<\frac{\varepsilon}{2k}$. Označme

$$\begin{aligned}
m_i&=\inf\{f(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}, & M_i&=\sup\{f(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\},\\
n_i&=\inf\{g(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}, & N_i&=\sup\{g(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\},\\
p_i&=\inf\{f(x)g(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}, & P_i&=\sup\{f(x)g(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}.
\end{aligned}$$

Na intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ platí $0\le m_i\le f(x)\le M_i$, $0\le n_i\le g(x)\le N_i$ a tedy $m_in_i\le f(x)g(x)\le M_iN_i$. Odtud dále plyne $m_in_i\le p_i\le P_i\le M_iN_i$, neboli $P_i-p_i\le M_iN_i-m_in_i=N_i(M_i-m_i)+m_i(N_i-n_i)$. Poněvadž $N_i\le k$, $m_i\le k$, platí $P_i-p_i\le k((M_i-m_i)+(N_i-n_i))$. Poslední nerovnost vynásobíme členem (x_i-x_{i-1}) a takto vzniklé nerovnosti sečteme pro $i=1,2,\dots,n$. Tím dostaneme: $S(D,fg)-s(D,fg)\le k[S(D,f)-s(D,f)+S(D,g)-s(D,g)]\le k\left(\frac{\varepsilon}{2k}+\frac{\varepsilon}{2k}\right)=\varepsilon$, a tedy podle věty 21.10 je fg integrovatelná.

Nechť nyní jsou f,g libovolné. Opět existuje $k\in\mathbb{R}$ takové, že $f(x)\le k$, $g(x)\le k$ pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$. Podle vět 22.6 a 22.7 jsou funkce $k-f(x)\ge 0$, $k-g(x)\ge 0$ integrovatelné a podle první části důkazu je integrovatelná i funkce $h(x)=(k-f(x))(k-g(x))$. Ponevadž $f(x)g(x)=h(x)+kf(x)+kg(x)-k^2$, je funkce fg podle vět 22.6 a 22.7 integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.

ad (ii) Nechť $g(x)\ge c>0$ pro každé $x\in\langle a,b\rangle$. Buď $\varepsilon>0$ libovolné. K číslu $c^2\varepsilon>0$ existuje podle věty 21.10 $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ takové, že $S(D,g)-s(D,g)<c^2\varepsilon$. Označme $m_i=\inf\{g(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $M_i=\sup\{g(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $ni=\inf\{\frac{1}{g(x)}:x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $N_i=\sup\{\frac{1}{g(x)}:x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$. Platí $n_i=\frac{1}{M_i}$, $N_i=\frac{1}{m_i}$, $m_i\ge c$, $M_i\ge c$. Odtud dostaneme $N_i-n_i=\frac{1}{m_i}-\frac{1}{M_i}=M_i-m_i=\frac{M_i-m_i}{m_iM_i}\le\frac{1}{c^2}(M_i-m_i)$. Tyto nerovnice vynásobíme členem (x_i-x_{i-1}) a sečteme pro $i=1,2,\dots,n$. Dostaneme

$$S\Big(D,\frac{1}{g}\Big)-s\Big(D,\frac{1}{g}\Big)\le\frac{1}{c^2}(S(D,g)-s(D,g))<\varepsilon.$$

Podle věty 21.10 je funkce $\frac{1}{g}$ integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.

Je-li $g(x)\le -c<0$ pro každé $x\in\langle a,b\rangle$, je podle první části důkazu funkce $-\frac{1}{g}$ integrovatelná na $\langle a,b\rangle$, a tedy podle věty 22.7 je také $\frac{1}{g}$ integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Tvrzení věty je nyní důsledkem části (i) tvrzení, neboť $\frac{f}{g}=f\frac{1}{g}$. □

Věta 22.10. *Je-li f integrovatelná funkce na $\langle a,b\rangle$, pak také $|f|$ je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Bud $\varepsilon>0$ libovolné. Protože, f je integrovatelná, existuje dělení $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ takové, že $S(D,f)-s(D,f)<\varepsilon$. Označme $m_i=\inf\{f(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $M_i=\sup\{f(x):x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $n_i=\inf\{|f(x)|:x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$, $N_i=\sup\{|f(x)|:x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}$. Nechť $x,y\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$. Pak $|f(x)|-|f(y)|\le|f(x)-f(y)|\le M_i-m_i$. Odtud plyne, že pro pevně zvolené y je $|f(x)|\le|f(y)|+M_i-m_i$. Z vlastností suprema plyne $N_i\le|f(y)|+M_i-m_i$, neboli $|f(y)|\ge N_i-(M_i-m_i)$. Z vlastností infima nyní plyne $n_i\ge N_i-(M_i-m_i)$, neboli $N_i-n_i\le M_i-m_i$. Poslední nerovnost vynásobíme členem (x_i-x_{i-1}) a sečteme přes $i=1,2,\dots,n$. Dostaneme $S(D,|f|)-s(D,|f|)\le S(D,f)-s(D,f)<\varepsilon$, a tedy podle věty 21.10 je funkce $|f|$ integrovatelná.

Dále pro $x\in\langle a,b\rangle$ platí $f(x)\le|f(x)|$, $-f(x)\le|f(x)|$ a tedy podle věty 22.8 platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x,\qquad -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

což znamená, že
$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$
a to je nerovnost v tvrzení věty. $\square$

Věta 22.11 (1. věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť f a g jsou integrovatelné funkce na $\langle a,b\rangle$, $g(x)\ge 0$ $\forall x\in\langle a,b\rangle$, $m=\inf\{f(x): x\in\langle a,b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x): x\in\langle a,b\rangle\}$. Pak existuje $\mu\in\langle m,M\rangle$ takové, že*
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Poněvadž $m\le f(x)\le M$ a $g(x)\ge 0$, platí $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ a tedy podle vět 22.8 a 22.7 je
$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
Je-li $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak podle vět 22.8 a 22.7 je
$$0 = m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x) = 0$$
a tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Rovnost v tvrzení věty je splněna pro libovolné $\mu\in\mathbb{R}$.

Je-li $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$, položíme
$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$
Pak
$$m = \frac{m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le \frac{M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = M.$$
$\square$

Důsledek 22.12. 1. *Nechť funkce f je navíc spojitá. Pak existuje $c\in\langle a,b\rangle$ takové, že*
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *Mají-li m a M stejný význam jako v předchozí větě, pak existuje $\mu\in\langle m,M\rangle$ takové, že*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

Důkaz. ad 1. Tvrzení plyne ihned z druhé Bolzanovy věty.

ad 2. Tvrzení plyne ihned volbou $g(x)=1$ ve větě 22.11. $\square$

Věta 22.13 (aditivita vzhledem k integračnímu oboru)**.** *Nechť $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a<c<b$ a f je funkce ohraničená a definovaná na $\langle a,b\rangle$. Pak platí*
$$\int_{\overline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{c}}^b f(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\underline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Je-li navíc f integrovatelná na $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$, pak je integrovatelná i na $\langle a,b\rangle$ a platí
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť $\{D_n^*\}_{n=1}^\infty$ je nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,c\rangle$ a $\{D_n^{**}\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $\langle b,c\rangle$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ položme $D_n = D_n^*\cup D_n^{**}$. Pak je $D_n\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$, $\nu(D_n)=\max\{\nu(D_n^*),\nu(D_n^{**})\}$. To znamená, že $\lim_{n\to\infty}\nu(D_n)=0$, neboli $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Dále $s(D_n,f) = s(D_n^*,f)+s(D_n^{**},f)$, $S(D_n,f)=S(D_n^*,f)+S(D_n^{**},f)$, z čehož limitním přechodem pro $n\to\infty$ s využitím věty 21.9 dostaneme první tvrzení.

Je-li funkce f integrovatelná na intervalech $\langle a,c\rangle$, $\langle c,b\rangle$, pak podle první části platí
$$\int_{\overline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
a to je druhé tvrzení. $\square$

Poznámka. Větu lze indukcí zobecnit na libovolný konečný počet intervalů.

Věta 22.14 (monotonie vzhledem k integračnímu oboru)**.** *Nechť f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a nechť $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$. Pak je f integrovatelná i na $\langle c,d\rangle$.*

Důkaz. Nechť $\{D_n^*\}$, resp. $\{D_n^{**}\}$, resp. $\{D_n^{***}\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,c\rangle$, resp. $\langle c,d\rangle$, resp. $\langle d,b\rangle$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ položme $D_n = D_n^* \cup D_n^{**} \cup D_n^{***}$. Pak je $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí $s(D_n,f) = s(D_n^*,f)+s(D_n^{**},f)+s(D_n^{***},f)$, $S(D_n,f) = s(D_n^*,f)+S(D_n^{**},f)+S(D_n^{***},f)$. Odtud dostaneme limitním přechodem pro $n\to\infty$ s využitím věty 21.9

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{c}}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{d}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\underline{d}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme

$$0 = \left(\int_{\overline{a}}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{\overline{c}}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{c}^{\underline{d}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{\overline{d}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{d}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Protože všechny sčítance jsou nezáporné, musí být nulové, tj. máme $\int_{\overline{c}}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c}^{\underline{d}} f(x)\,\mathrm{d}x$. ◻

Důkaz věty 21.14 (3. postačující podmínka pro riemannovskou integrovatelnost). Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž funkce f je na intervalu $\langle a,b\rangle$ ohraničená, existuje $k>0$ takové, že $-k \le f(x) \le k$ pro každé $x\in\langle a,b\rangle$. Buď M množina bodů nespojitosti funkce f. Protože je tato množina nulová, existují čísla $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n\in\mathbb{R}$, $a_1<b_1<a_2<b_2<\dots<a_n<b_n$ taková, že $M\subseteq (a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)\cup\dots\cup(a_n,b_n)$ a $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$.

Předpokládejme nejprve, že $a<a_1$, $b_n<b$ (v takovém případě nespojitost nemůže nastat v krajních bodech intervalu $\langle a,b\rangle$). Na každém z intervalů $\langle a,a_1\rangle, \langle b_1,a_2\rangle, \dots, \langle b_{n-1},a_n\rangle, \langle b_n,b\rangle$ je funkce f spojitá a tedy podle věty 21.12 je integrovatelná. Na každém intervalu $\langle a_i,b_i\rangle$, $i=1,2,\dots,n$ platí podle věty 21.5

$$-k(b_i-a_i) \le \int_{\overline{a_i}}^{b_i} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{a_i}^{\underline{b_i}} f(x)\,\mathrm{d}x \le k(b_i-a_i).$$

Podle věty 22.6 (tvrzení můžeme indukcí zobecnit na libovolný konečný počet intervalů) je

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{a_i}}^{b_i} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\ge \int_{a}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - k\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) \\
&> \int_{a}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - k\frac{\varepsilon}{2k} \\
&= \int_{a}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_{a}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud

$$0 \le \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Protože ale ε bylo libovolné, musí být $\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pokud $a=a_1$ (resp. $b_n=b$), pak ve vyjádření $\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ vypadnou členy $\int_{a}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x$ (resp. $\int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$), jinak je důkaz veden stejně.

Dále, je-li $a_1<a<b_1$ a $a_n<b<b_n$ (jedná se o případ, kdy krajní body intervalu $\langle a,b\rangle$ jsou body nespojitosti funkce f), pak platí na $\langle a,b_1\rangle$ platí

$$-k(b_1-a_1) < -k(b_1-a) \le \int_{\overline{a}}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{a}^{\underline{b_1}} f(x)\,\mathrm{d}x \le k(b-a_1) < k(b_1-a_1)$$

a na $\langle a_n, b\rangle$ platí

$$-k(b_1 - a_1) < -k(b_1 - a) \leq \int_{\overline{a_n}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{a_n}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq k(b - a_n) < k(b_n - a_n),$$

přičemž podobně jako výše je

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=2}^{n-1} \int_{\overline{a_i}}^{b_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{a}}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{a_n}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&> \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}, \\
\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x &< \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Odtud opět dostaneme, že musí být $\int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Konečně, pokud jeden z krajních bodů intervalu $\langle a, b\rangle$ je bodem nespojitosti a druhý není, jednalo by se o kombinaci výše uvedených případů. □

Věta 22.15. *Nechť f, g jsou ohraničené na $\langle a, b\rangle$ a množina $M = \{x \in \langle a, b\rangle : f(x) \neq g(x)\}$ je nulová. Je-li jedna z funkcí f, g integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, je integrovatelná i druhá z nich a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť funkce f je integrovatelná a nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Buď $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $-k \leq g(x) \leq k$ pro $x \in \langle a, b\rangle$ (takové k jistě existuje, neboť f je podle předpokladu ohraničená). Poněvadž M je nulová, existují reálná čísla $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$ taková, že $M \subset (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \cdots \cup (a_n, b_n)$, $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$.

Předpokládejme, že $a < a_1$, $b > b_n$ (v ostatních případech by se důkaz mírně modifikoval jako v předchozí větě). Podle věty 22.13 je funkce f na každém z intervalu $\langle a, a_1\rangle$, $\langle b_1, a_2\rangle$, $\langle b_2, a_3\rangle, \ldots, \langle b_n, b\rangle$ integrovatelná. Na každém z těchto intervalů jsou funkce f, g shodné, tedy i g je na nich integrovatelná a platí

$$\int_a^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_1} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{b_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{b_1}^{a_2} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \ldots, \quad \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{b_n}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analogicky jako v důkazu věty 22.14 ukážeme, že

$$\begin{aligned}
\int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x &> \int_a^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}, \\
\int_{a}^{\underline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x &> \int_a^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

z čehož plyne $\int_a^{\underline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Poznámka. Díky této větě není při úvahách o Riemannově integrálu nutné předpokládat, že ohraničená funkce je definovaná na celém intervalu $\langle a, b\rangle$. Stačí, je-li definovaná na $\langle a, b\rangle$ s výjimkou nulové množiny. Zejména lze tedy hovořit o funkci integrovatelné na otevřeném intervalu (a, b).

23 Integrál jako funkce horní meze

Integrovatelností funkce budeme v této kapitole stále myslet integrovatelnost v Riemannově smyslu.

Úmluva.

a) Nechť funkce f je definována v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak klademe $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$.

b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ a nechť f je integrovatelná na intervalu $\langle b, a\rangle$. Pak klademe $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Při takto rozšířené definici všechny vlastnosti Riemannova integrálu zůstávají v platnosti.

Definice 23.1 (integrálu jako funkce horní meze)**.** Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a $x \in \langle a, b\rangle$. Funkci $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ nazýváme *integrál jako funkce horní meze.*

Poznámka. Definice je korektní, protože je-li f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, pak je podle věty 22.14 je funkce integrovatelná také na $\langle a, x\rangle$, tj. hodnota $F(x)$ existuje.

Věta 23.2. *Nechť f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$. Pak $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Buď $x_0 \in \langle a, b\rangle$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože f je integrovatelná, je ohraničená, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq c$. Položme $\delta = \varepsilon/c$ a vezměme $x \in O_\delta(x_0) \cap \langle a, b\rangle$ libovolné. Pak

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq c|x - x_0| < c\delta = \varepsilon.$$

(První nerovnost plyne z důsledku 22.5.) □

Věta 23.3. *Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a spojitá v $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Pak $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ má derivaci v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$ (je-li $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$, jedná se o příslušnou jednostrannou derivaci).*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože f je spojitá v x_0, k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in O_\delta(x_0) \cap \langle a, b\rangle$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Tedy pro $x \in \langle a, b\rangle \cap O_\delta^*(x_0)$ platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \frac{f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \frac{f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{|x - x_0|}|x - x_0|\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

To znamená, že $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. □

Poznámka. Předchozí dvě tvrzení zůstanou v platnosti, i když zaměníme dolní mez integrace a za libovolné $c \in \langle a, b\rangle$, tj. $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a je-li f spojitá v $x_0 \in \langle a, b\rangle$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledek 23.4. *Je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ má na $\langle a, b\rangle$ derivaci a platí zde $F' = f$.*

Důkaz věty 19.4. Je-li interval I uzavřený, plyne tvrzení ihned z předchozího důsledku. Nechť tedy nyní I není uzavřený. Zvolme pevně $c \in I$ a položme $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Funkce F je definována na celém I, protože pro $x \in I$ je f spojitá na uzavřeném intervalu s krajními body c a x a tedy podle věty 21.12 integrovatelná. Bud nyní $x_0 \in I$ libovolné. Zvolme $a, b \in I$ tak, že $a \leq \min\{c, x_0\}$, $b \geq \max\{c, x_0\}$. Pak $c \in \langle a, b\rangle$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$ a f je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Podle předchozí poznámky tedy platí $F'(x_0) = f(x_0)$. Poněvadž $x_0 \in I$ byl libovolný, platí $F'(x_0) = f(x_0)$ pro každé $x \in I$. □

Poznámka. Je-li f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, lze analogicky uvažovat integrál jako funkci dolní meze $G(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, nebo obecněji $G(x) = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $c \in \langle a, b\rangle$. Je-li f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, $c \in \langle a, b\rangle$, pak je $G(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Je-li f spojitá v bodě $x_0 \in \langle a, b\rangle$, pak G v tomto bodě derivaci a platí $G'(x_0) = -f(x_0)$.

24 Nevlastní integrály

Doposud jsme v případě Riemannova integrálu předpokládali:
(i) $a, b \in \mathbb{R}$, tj. interval $\langle a, b\rangle$ má konečnou délku,
(ii) f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$.
Půjde o rozšíření na případ, kdy některý z těchto předpokladů není splněn.

Nevlastní integrál I. druhu (vlivem meze)

Definice 24.1 (nevlastního integrálu I. druhu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je definovaná na $\langle a, \infty)$, přičemž je integrovatelná na každém intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $b > a$. Položme $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. *Nevlastním integrálem prvního druhu* rozumíme limitu $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to\infty} F(t)$. Existuje-li vlastní limita $\lim_{t\to\infty} F(t)$, řekneme, že integrál *konverguje.* Pokud neexistuje vlastní limita $\lim_{t\to\infty} F(t)$, řekneme, že integrál *diverguje.*

Poznámka. Analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci zadanou na $(-\infty, a\rangle$ a integrovatelnou na každém $\langle b, a\rangle$, $b < a$. Je-li f integrovatelná na každém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak definujeme $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, pokud oba integrály konvergují pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 24.2. a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, $p \in \mathbb{R}$, b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. ad a)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \lim_{x\to\infty} \big[\ln t\big]_1^x = \lim_{x\to\infty} (\ln x - \ln 1) = \infty & \text{pro} \quad p = 1, \\ \lim_{x\to\infty} \big[\frac{t^{1-p}}{1-p}\big]_1^x = \lim_{x\to\infty} \big(\frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\big) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{pro} \quad p > 1, \\ \infty & \text{pro} \quad p < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Integrál tedy konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \le 1$.

ad b) Pišme daný integrál jako $I_1 + I_2$, kde $I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ a $I_2 = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Potom

$$I_1 = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} [\operatorname{arctg} t]_x^0 = -\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = 0 - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Protože integrand je sudou funkcí, musí být také $I_2 = \frac{\pi}{2}$. Celkově tedy $I_1 + I_2 = \pi$.

ad c)

$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} [\sin t]_0^x = \lim_{x\to\infty} \sin x = \nexists,$$

a tedy integrál diverguje.

Věta 24.3 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť platí* $0 \le f(x) \le g(x)$ *pro každé* $x \in \langle a, \infty)$.
a) *Konverguje-li* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, *pak konverguje i* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.
b) *Diverguje-li* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, *pak diverguje i* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Položíme-li $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, pak pro každé $x \in \langle a, \infty)$ platí $0 \le F(x) \le G(x)$, to plyne ihned z důsledku 22.5 a věty 22.8. Funkce F a G jsou navíc na $\langle a, \infty)$ neklesající. Skutečně, je-li $x_1, x_2 \in \langle a, \infty)$, $x_1 < x_2$, pak

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \ge \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_1)$$

(využili jsme zde vlastnosti z věty 22.13 a nezápornosti integrálu $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$). Analogicky pro funkci G. Díky monotonii funkcí F, G existují limity $\lim_{x\to\infty} F(x)$ a $\lim_{x\to\infty} G(x)$ (vlastní nebo nevlastní). Jedná se o analogickou vlastnost, kterou známe z posloupností, kdy monotónní ohraničená posloupnost má vlastní limitu a monotónní neohraničená posloupnost má nevlastní limitu. Přejdeme-li tedy k limitě v nerovnosti $0 \le F(x) \le G(x)$, dostáváme ihned tvrzení věty. □

Věta 24.4 (nutná podmínka konvergence)**.** *Nechť* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje a nechť existuje* $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$. *Pak* $c = 0$.

Důkaz. Sporem. Připusťme $c > 0$. Protože $\lim_{x\to\infty} f(x) = c > 0$, existují x_0 a $k > 0$ takové, že pro $\forall x \ge x_0$ je $f(x) \ge k$. Platí $\int_{x_0}^\infty k\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} k(x - x_0) = \infty$. Podle věty 24.3 $\int_{x_0}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje a tedy i $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, což je spor s předpokladem.

Poznámka. V příkladu 24.2a) pro $p \le 0$ nutná podmínka konvergence splněna není.

□

Nevlastní integrál II. druhu (vlivem funkce)

Definice 24.5 (singulárního bodu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť funkce f je definována na $\langle a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod funkce* f, jestliže f není ohraničená na $\langle a, b)$ a pro každé $t \in (a, b)$ je integrovatelná na $\langle a, t\rangle$.

Definice 24.6 (nevlastního integrálu II. druhu)**.** Nechť funkce f je definována na $\langle a, b)$, integrovatelná na každém $\langle a, t\rangle$, kde $t \in (a, b)$ a nechť b je jejím singulárním bodem. Položme $F(t) = \int_a^t f(t)\,\mathrm{d}t$. Pak *nevlastním integrálem II. druhu* rozumíme limitu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to b-} F(t)$. Je-li $\lim_{t\to b-} F(t)$ vlastní, řekneme, že integrál *konverguje*, je-li nevlastní nebo neexistuje, řekneme, že integrál *diverguje*.

Poznámka. a) Analogicky definujeme singulární bod a pro funkci definovanou na intervalu $(a, b\rangle$ a konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Srovnávací kritérium lze analogicky formulovat i pro nevlastní integrály II. druhu.

Příklad 24.7. Rozhodněte o konvergenci integrálu $\int_0^1 \frac{1}{x^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $p = 1$ máme

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0+} [\ln t]_x^1 = \ln 1 - \lim_{x\to 0+} \ln x = 0 - (-\infty) = \infty.$$

Pro $p \neq 1$ pak je

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-p} \lim_{x\to 0+} [x^{1-p}]_x^1 = \frac{1}{1-p}\left(1 - \lim_{x\to 0+} x^{1-p}\right) = \begin{cases} \infty & \text{pro } p > 1, \\ \frac{1}{1-p} & \text{pro } p < 1. \end{cases}$$

Vidíme tedy, že integrál konverguje pro $p < 1$ a diverguje pro $p \geq 1$.

25 Aplikace určitého integrálu

Pruměrná hodnota (integrální průměr) veličiny na intervalu

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obsah rovinného obrazce

1. Křivočarý lichoběžník určený nerovnostmi $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq g(x)$:

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

2. Křivočarý lichoběžník, kde určený nerovnostmi $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq \psi(t)$, kde $x = \varphi(t)$ je ryze monotónní na $\langle \alpha, \beta\rangle$, má zde spojitou derivaci, a zobrazuje tento interval na $\langle a, b\rangle$:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

3. Rovinný sektor v polárních souřadnicích vymezený $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ s hraniční křivkou $\rho = \rho(\varphi)$ (ρ spojitá):

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Délka rovinné křivky

1. Křivka je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ (přičemž f zde má spojitou derivaci):

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Křivka je dána parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ (φ', ψ' spojité, přičemž nejsou zároveň rovny nule v žádném bodě intervalu):

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Křivka je dána v polárních souřadnicích rovnicí $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (ρ' spojitá):

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} \, \mathrm{d}t.$$

Předpoklady na derivace příslušných funkcí budou dále analogické.

Objem tělesa vzniklého rotací křivky

1. Těleso vzniklé rotací křivky $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ kolem osy x:

$$V = \pi \int_{a}^{b} f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

2. Těleso vzniklé rotací křivky o parametrických rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ kolem osy x:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Plocha pláště rotačního tělesa

1. Těleso vzniklé rotací křivky $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ kolem osy x:

$$P = 2\pi \int_{a}^{b} |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x.$$

2. Těleso vzniklé rotací křivky o parametrických rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ kolem osy x:

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \, \mathrm{d}x.$$