· Náplní předmětu bude kalkulus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (případně $\to \mathbb{R}^m$).

· Proč se zabývat funkcemi více proměnných? V praxi je často třeba uvažovat veličiny, které závisejí na více než jedné proměnné, např. objem rotačního kužele závisí na poloměru podstavy r a výšce h, teplota v kovovém prutu může záviset na místě x a čase t, hustota tělesa se může měnit v závislosti na bodu X o souřadnicích $[x, y, z]$, vektor síly $\vec{f} = (f_1, f_2)$ v rovině může záviset na souřadnicích bodu v rovině (tj. máme $\vec{f} = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$), apod.

· Výše uvedené naznačuje, že nám půjde o geometricko–fyzikální popis situace.

· Připomeňme, že v SA1 jsme množinu $\mathbb{R}$ chápali nejenom jako množinu nějakých prvků (reálných čísel), ale byla zde jasně dána algebraická struktura (sčítání, násobení, $\mathbb{R}$ je vybavena relací uspořádání, klíčový byl také axiom o suprému). Podobně, $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{krát}}$ nebude chápána pouze jako množina uspořádaných n-tic, ale jako množina, na které je zavedena určitá struktura. Zejména, součet každých dvou prvků $X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, $Y = [y_1, \dots, y_2] \in \mathbb{R}^n$ je definován jako

$$X + Y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n] \in \mathbb{R}^n$$

a násobek libovolným skalárem $c \in \mathbb{R}$ je pro každé $X \in \mathbb{R}^n$ definován jako

$$cX = [cx_1, \dots, cx_n] \in \mathbb{R}^n.$$

Lze ukázat, že $\mathbb{R}^n$ s takto definovanými operacemi tvoří vektorový prostor dimenze n (viz lineární algebra). Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme nazývat buď body, nebo vektory (podle situace). Interpretujeme-li prvky X a Y jako body, pak rozdíl $Y - X$ bude chápán jako vektor (to je v souladu s tím, co známe z analytické geometrie). Další podstatnou vlastností je, že v $\mathbb{R}^n$ umíme měřit vzdálenosti bodů, viz úvodní kapitola.

1 Metrické prostory

Definice 1.1 (metriky a metrického prostoru)**.** Buď $M \neq \emptyset$ libovolná množina a $\rho : M \times M \to \langle 0, \infty)$ zobrazení, které pro všechna $x, y, z \in M$ splňuje

(m1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (axiom totožnosti),
(m2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axiom symetrie),
(m3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (trojúhelníková nerovnost)

Zobrazení ρ nazýváme *metrika na M*, prvky množiny M nazýváme *body metrického prostoru* (M, ρ), číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdálenost bodů x, y*.

Příklad 1.2.

1. Je-li M libovolná množina a $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y \\ 0 & \text{pro } x = y \end{cases}$, pak (M, ρ) je metrický prostor (nazývá se *diskrétní*).
2. Je-li $M = \mathbb{R}$, pak $\rho(x, y) = |x - y|$ je metrika.
3. Je-li $M = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, pak
   $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$,
   $\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$,
   $\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$
   jsou metriky. Metrika ρ_1 se nazývá *součtová (manhattanská, taxíkářská)*, metrika ρ_2 se nazývá *eukleidovská*[1], metrika ρ_∞ se nazývá *maximální (šachovnicová, Čebyševova*[2]). Axiomy (m1), (m2) zřejmě platí. Ověřme (m3).

$$\begin{aligned} \rho_1 : \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = \sum_{i=1}^n (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\ge \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| = \rho_1(x, y). \end{aligned}$$

ρ_2 : Vyjdeme z nerovnosti $\displaystyle\sum_{i=1}^n u_i v_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ (Cauchyova–Buňakovského[3]–Schwarzova[4]).

Položme $u_i = p_i + q_i$, $v_i = q_i$. Potom $\displaystyle\sum_{i=1}^n (p_i + q_i) q_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}$. Pokud naopak

[1] Eukleidés 3. stol. př.n.l., Řek žijící v Alexandrii v Egyptě
[2] Pafnutij Lvovič Čebyšev 1821–1894, Rus

$u_i = p_i, v_i = p_i + q_i$, potom máme $\sum_{i=1}^{n} p_i(p_i + q_i) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2}$. Sečtením pak $\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2} \cdot \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}\right)$, tj.

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$ (Minkowského nerovnost[5]).

Dosazením $p_i = x_i - z_i, q_i = z_i - y_i$ máme

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}$, tj. $\rho_2(x, y) \le \rho_2(x, z) + \rho_2(z, y)$.

ρ_∞ : Označme j, resp. k, resp. ℓ, ten index, pro který nastane maximum z hodnot $|x_i - z_i|$, resp. $|z_i - y_i|$, resp. $|x_i - y_i|$, tj. $\rho_\infty(x, z) = \max\{|x_i - z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} = |x_j - z_j|$,
$\rho_\infty(z, y) = \max\{|z_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} = |z_k - y_k|$,
$\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} = |x_\ell - z_\ell|$. Potom
$\rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y) = |x_j - z_j| + |z_k - y_k| \ge |x_\ell - z_\ell| + |z_\ell - y_\ell| \ge |x_\ell - z_\ell + z_\ell - y_\ell| =$
$|x_\ell - y_\ell| = \rho_\infty(x, y)$, tedy $\rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y) \ge \rho_\infty(x, y)$.

4. Je-li $M = C(\langle a, b\rangle)$ (množina všech funkcí spojitých na $\langle a, b\rangle$), pak
   $\rho_C(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in \langle a, b\rangle\}$ (metrika stejnoměrné konvergence),
   $\rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$ (integrální metrika)
   jsou metriky. Ověření axiomů (m1) a (m2) je opět triviální. Axiom (m3) lze v případě ρ_C lze ověřit podobně jako v případě ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$. V případě ρ_I máme

$$\begin{aligned}\rho_I(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_a^b \big(|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - h(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |h(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \rho_I(f, h) + \rho_I(h, f),\end{aligned}$$

   kde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost pro absolutní hodnotu, monotonii vzhledem k integrovaným funkcím (viz věta 22.8 v SA1) a aditivitu integrálu (integrál součtu je součet integrálů, viz věta 22.6 z SA1).
5. Je-li $M = \ell^\infty$ (množina všech ohraničených posloupností), pak

$$\rho_\infty(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

   je metrika. Splnění axiomů (m1), (m2) je opět zřejmé. Axiom (m3) by se dokázal analogicky jako u ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.3 (otevřené a uzavřené koule, okolí). Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $a \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$. Pak množina

$$B_r(a) := \{x \in M : \rho(a, x) < r\}$$

se nazývá *otevřená koule se středem a a poloměrem r* („ball") a množina

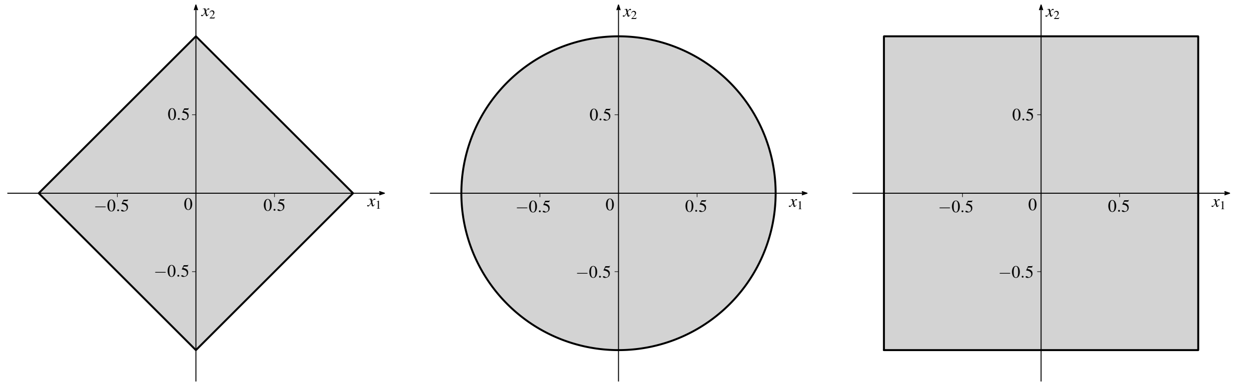
$$B_r[a] := \{x \in M : \rho(a, x) \le r\}$$

se nazývá *uzavřená koule se středem a a poloměrem r*. Speciálně: $O_\varepsilon(a) := B_\varepsilon(a)$ se nazývá *(epsilonové) okolí bodu a* a $O^*_\varepsilon(a) := O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ se nazývá *ryzí (epsilonové) okolí bodu a*.

Poznámka. Platí: $\varepsilon \le \delta \Longrightarrow O_\varepsilon \subseteq O_\delta$. Není-li podstatná velikost poloměru ε, budeme psát stručně $O(a)$.

Příklad 1.4. Načrtněte $O_\varepsilon(a)$ v $\mathbb{R}^2$ s metrikami ρ_1, ρ_2 a ρ_∞. Viz obrázek 1 (voleno $a = (0, 0)$ a $\varepsilon = 1$).

[1] Viktor Jakovlevič Buňakovskij 1804–1889, Rus
[2] Karl Hermann Amandus Schwarz 1843–1921, Němec
[3] Hermann Minkowski 1864–1909, německý Žid

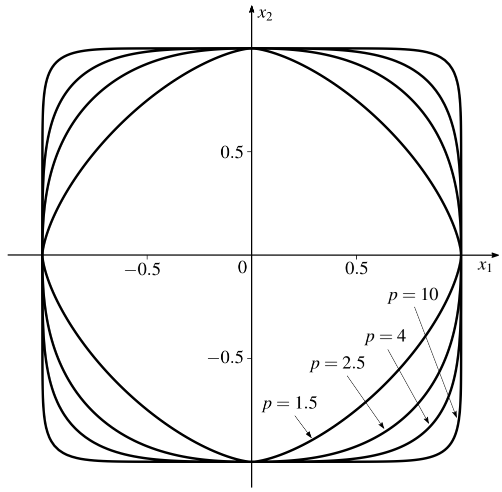


Obrázek 1: Jednotková koule (se středem v počátku) v $\mathbb{R}^2$ s metrikou ρ_1, resp. ρ_2, resp. ρ_∞

Poznámka. Metriku na $\mathbb{R}^n$ lze (obecněji) zavést pro libovolné $p \in \langle 1, \infty)$ vztahem

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Jednotková „kružnice" se středem v počátku pro případ $n = 2$ (tj. množina všech bodů mající jednotkovou vzdálenost od počátku v metrice ρ_p) je načrtnuta pro několik hodnot parametru p na obrázku 2. Z tohoto obrázku je pak zřejmé, proč se maximální metrika značí indexem ∞.



Obrázek 2: Jednotkové „kružnice" v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku pro $p = 1.5$, $p = 2.5$, $p = 4$ a $p = 10$

Pozor, pro $p < 1$ výše uvedená funkce ρ_p nepředstavuje metriku!

Definice 1.5 (vzdálenosti dvou množin a průměru množiny)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Pro neprázdné $A, B \subseteq M$ definujeme:

$\rho(A, B) := \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$ – *vzdálenost množin* A, B,

$d(A) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ – *průměr množiny* A.

Jestliže množina $\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ není shora ohraničená, klademe $d(A) = \infty$. Vzdálenost bodu x od množiny A definujeme jako $\rho(x, A) := \rho(\{x\}, A)$.

Poznámka. Je-li $A \cap B \neq \emptyset$, pak zřejmě $\rho(A, B) = 0$ (vzdálenost však může být nulová i pro A, B disjunktní). Je-li alespoň jedna z množin A, B prázdná, pak klademe jejich vzdálenost rovnu ∞. Naopak průměr prázdné množiny klademe nulový, tj. $d(\emptyset) = 0$.

Definice 1.6. Buď (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$. Řekneme, že A je *ohraničená*, jestliže $d(A) < \infty$.

Poznámka. Množina A je zřejmě ohraničená, jestliže existuje bod a a číslo $r > 0$ tak, že $A \subseteq B_r(a)$.

2 Podmnožiny metrického prostoru

Definice 2.1 (význačných bodů v metrickém prostoru)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Bod $a \in M$ se nazývá

vnitřní bod množiny A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $O_\varepsilon(a) \subseteq A$,
hraniční bod množiny A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $O_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ a zároveň $O_\varepsilon(a) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset$,
bod uzávěru množiny A, jestliže $\rho(a, A) = 0$,
hromadný bod množiny A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $O^*_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$,
izolovaný bod množiny A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $O_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$.

Definice 2.2 (vnitřku, hranice, uzávěru a derivace množiny)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$.

1. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek množiny A* a značí se A° (někdy $\mathrm{int}(A)$ – interior),
2. Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá *hranice množiny A* a značí se ∂A (někdy $\mathrm{fr}(A)$ – frontier),
3. Množina všech bodů uzávěru množiny A se nazývá *uzávěr množiny A* a značí se $\overline{A}$ (někdy $\mathrm{cl}(A)$),
4. Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace množiny A* a značí se A'.

Příklad 2.3. Uvažujte $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ a množiny a) $A = (0, 1)$, b) $A = \langle 0, 1) \cap \mathbb{Q}$, c) $A = \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}$. Napište A°, ∂A, $\overline{A}$ a A'.

Řešení. ad a) $A^\circ = A = (0, 1)$, $\partial A = \{0, 1\}$, $\overline{A} = \langle 0, 1\rangle$, $A' = \langle 0, 1\rangle$.
ad b) $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \langle 0, 1\rangle$, $\overline{A} = \langle 0, 1\rangle$, $A' = \langle 0, 1\rangle$.
ad c) $A^\circ = A = (0, 1)$, $\partial A = \{0, 1, 2\}$, $\overline{A} = \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}$, $A' = \langle 0, 1\rangle$.

Definice 2.4 (otevřené a uzavřené množiny v metrickém prostoru)**.** Buď (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$. Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže $A^\circ = A$, množina A se nazývá *uzavřená*, jestliže $\overline{A} = A$.

Věta 2.5. *Buď (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$. Množina A je otevřená $\Longleftrightarrow$ $M \setminus A$ je uzavřená. Množina A je uzavřená $\Longleftrightarrow$ $M \setminus A$ je otevřená.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že pro každou $A \subseteq M$ platí $A^\circ = M \setminus \overline{M \setminus A}$. Skutečně, $x \in M \setminus \overline{M \setminus A} \Longleftrightarrow x \notin \overline{M \setminus A} \Longleftrightarrow \varepsilon := \rho(x, M \setminus A) > 0 \Longleftrightarrow (y \in M \setminus A)(\rho(x, y) \geq \varepsilon) \Longleftrightarrow O_\varepsilon(x) \cap (M \setminus A) = \emptyset \Longleftrightarrow O_\varepsilon(x) \subseteq A \Longleftrightarrow x \in A^\circ$.

Nechť A je otevřená, tj. $A = A^\circ$. Podle výše dokázaného tedy platí $A = M \setminus \overline{M \setminus A}$. Odtud plyne, že $M \setminus A = M \setminus (M \setminus \overline{M \setminus A})$. Protože pro každou podmnožinu $B \subseteq M$ platí $M \setminus (M \setminus B) = B$, platí z předchozí rovnosti, že $M \setminus A = \overline{M \setminus A}$, tj. $M \setminus A$ je uzavřená.

Nechť naopak $M \setminus A$ je uzavřená, tj. $M \setminus A = \overline{M} \setminus A$. Pak podle první části máme $A^\circ = M \setminus \overline{M \setminus A} = M \setminus (M \setminus A) = A$.

Platnost druhého tvrzení by se ukázala analogicky. □

Poznámka. a) Lze ukázat, že v každém metrickém prostoru (M, ρ) pro libovolnou $A \subseteq M$ platí $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, a tedy A° je vždy otevřená a $\overline{A}$ je vždy uzavřená.

b) Obecně $\overline{B_r(a)} \neq B_r[a]$, např. je-li (M, ρ) diskrétní, $a \in M$, $r = 1$, potom $B_1(a) = \{a\}$ a tedy $\overline{B_1(a)} = \{a\}$, avšak $B_1[a] = M$.

c) Platí $\emptyset^\circ = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ a tedy $\emptyset$ je v jakémkoliv metrickém prostoru otevřená i uzavřená zároveň. Podle předchozí věty je pak celá M také otevřená i uzavřená zároveň.

3 Konvergence v metrickém prostoru

Definice 3.1 (konvergentní posloupnosti v metrickém prostoru)**.** Buď (M, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost bodů z M (tj. zobrazení $\mathbb{N} \to M$). Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje k bodu $x \in M$* (*je konvergentní v M*), jestliže $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ (zapisujeme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, stručně $\lim x_n = x$ nebo $x_n \to x$).

Příklad 3.2.

1. (M, ρ) diskrétní (viz příklad 1.2.1): $x_n \to x \Longleftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Longrightarrow x_n = x)$.
2. $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ (viz příklad 1.2.3): $(x_n, y_n) \to (x, y) \Longleftrightarrow x_n \to x$, $y_n \to y$ v $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$.

   Důkaz. $0 = \lim(|x_n - x| + |y_n - y|) = \lim |x_n - x| + \lim |y_n - y|$. Protože, ale $\lim |x_n - x| \geq 0$, $\lim |y_n - y| \geq 0$, musí být $\lim |x_n - x| = 0$, $\lim |y_n - y| = 0$. □

   Analogické tvrzení platí pro všechny metrické prostory z příkladu 1.2.3.
3. $(C(\langle a, b\rangle), \rho_C)$ (viz příklad 1.2.4):

$$f_n \to f \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in \langle a, b\rangle) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Má-li posloupnost funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$ vlastnost uvedenou na pravé straně ekvivalence, řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje stejnoměrně* na $\langle a, b\rangle$ k funkci f.

Důkaz. Konvergence $f_n \to f$ v $(C(\langle a, b\rangle), \rho_C)$ znamená:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \rho_C(f_n, f) < \varepsilon \Longleftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \langle a, b\rangle\} < \varepsilon \Longleftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in \langle a, b\rangle) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. □

Definice 3.3 (ohraničenosti posloupnosti)**.** Buď (M, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z M. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená*, jestliže množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ohraničená ve smyslu definice 1.6.

Věta 3.4. *Buď (M, ρ) metrický prostor. Pak platí*

1. *Každá posloupnost $\{x_n\} \subseteq M$ má nejvýše jednu limitu v M.*
2. *Posloupnost konvergentní v (M, ρ) je ohraničená v (M, ρ).*
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M \iff$ *pro každou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybranou z $\{x_n\}$ platí* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Důkaz. Plyne z příslušných tvrzení v kapitole o posloupnostech, viz SA1. □

Definice 3.5 (cauchyovské posloupnosti)**.** Buď (M, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z M. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Věta 3.6. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z M. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v (M, ρ), pak je cauchyovská.*

ZK *Důkaz.* Nechť $x_n \to x$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro libovolné $m \geq n_0$ a libovolné $n \geq n_0$ tedy s využitím trojúhelníkové nerovnosti platí $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Poznámka. Obrácené tvrzení obecně neplatí. Např. pro $M = (0, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, ale není konvergentní (protože $0 \notin M$).

Věta 3.7. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Množina A je uzavřená v (M, ρ) $\iff$ pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$ takovou, že $x_n \to x$, platí $x \in A$.*

Důkaz. „$\Longrightarrow$“ Nechť A je uzavřená, tj. $A = \overline{A}$ a nechť $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost konvergující k $x \in M$. Kdyby $x \notin A$, pak by $\varepsilon := \rho(x, A) > 0$ a tedy pro každé x_n by platilo $\rho(x_n, x) \geq \varepsilon$, což by bylo ve sporu s $x_n \to x$.

„$\Longleftarrow$“ Nechť pro každou posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$, pro kterou $x_n \to x$, platí $x \in A$. Buď $y \in \overline{A}$ libovolný bod, tj. platí $\rho(y, A) = 0$. Ke každému $\frac{1}{n} > 0$ existuje $x_n \in A$ takové, že $\rho(x_n, y) < \frac{1}{n}$. To znamená, že pro takto vytvořenou posloupnost $\{x_n\}$ platí $\lim \rho(x_n, y) = 0$, tj. $x_n \to y$. Z podmínky plyne, že $y \in A$. Tedy $\overline{A} \subseteq A$. Protože však také $A \subseteq \overline{A}$, máme $A = \overline{A}$, tj. A je uzavřená. □

Definice 3.8 (ekvivalentních metrik)**.** Nechť M je množina a ρ, σ metriky na M. Řekneme, že ρ a σ jsou *ekvivalentní metriky na M*, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ platí: $x_n \to x$ v $(M, \rho) \iff x_n \to x$ v (M, σ).

Příklad 3.9. a) Metriky ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní, protože pro každou z těchto metrik platí, že $x_k \to x \iff x_i^k \to x_i$ v $(\mathbb{R}, |x - y|)$. To znamená, že $x_k \to x$ v $(\mathbb{R}^n, \rho_j)$, kde $j \in \{1, 2, \infty\} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) : |x_i^k - x_i| < \varepsilon$.

b) Metriky ρ_I a ρ_C na $C(\langle a, b\rangle)$ nejsou ekvivalentní.

Poznámka. Jsou-li ρ, σ ekvivalentní metriky na M, pak množina $A \subseteq M$ je uzavřená v $(M, \rho) \iff$ je uzavřená v (M, σ) a je otevřená v $(M, \rho) \iff$ je otevřená v (M, σ).

Věta 3.10. *Buďte ρ, σ metriky na M. Jestliže existují kladné konstanty a, b takové, že pro všechny dvojice bodů $(x, y) \in M^2$ je $a\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq b\sigma(x, y)$, pak jsou metriky ekvivalentní.*

ZK *Důkaz.* Nechť je splněna podmínka věty, $x \in M$, a nechť $\{x_n\} \subseteq M$ je taková posloupnost, že $\lim \sigma(x_n, x) = 0$. Pak $a\sigma(x_n, x) \leq \rho(x_n, x) \leq b\sigma(x_n, x)$ a z věty o 3 posloupnostech (viz věta 7.10 v SA1) plyne $\lim \rho(x_n, x) = 0$. Pokud bychom vyšli z posloupnosti, pro kterou $\lim \rho(x_n, x) = 0$, pak se důkaz provede stejně s využitím nerovnosti $\frac{1}{b}\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \frac{1}{a}\rho(x, y)$, která je ekvivalentní s nerovností v podmínce věty. □

Definice 3.11 (indukované metriky a metrického podprostoru)**.** Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Metriku ρ_A, definovanou jako $\rho_A(x, y) = \rho(x, y)$ pro $\forall x, y \in A$, nazýváme *metrikou indukovanou na množině A metrikou ρ*. Metrický prostor (A, ρ_A) nazýváme *podprostorem metrického prostoru* (M, ρ). Píšeme $(A, \rho_A) \subseteq (M, \rho)$.

Příklad 3.12. Uvažujeme-li $\mathbb{R}$ jako podmnožinu $\mathbb{R}^2$ (tj. reálná čísla ztotožníme s dvojicemi $(a, 0)$), pak každá z metrik ρ_i $(i = 1, 2, \infty)$ na $\mathbb{R}^2$ indukuje metriku $\rho(x, y) = |x - y|$ na $\mathbb{R}$.