4 Úplné a kompaktní metrické prostory

Definice 4.1 (úplného metrického prostoru)**.** Metrický prostor (M, ρ) se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu.

Příklad 4.2. 1. Prostor $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ je úplný.

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z Cauchyova–Bolzanova kritéria konvergence, viz věta 7.27 v SA1. $\square$

2. Prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ jsou úplné.

Důkaz. V případě $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ cauchyovskost znamená, že pro $k, m \geq k_0$ je $\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^m| < \varepsilon$, z čehož plyne, že $|x_i^k - x_i^m| < \varepsilon \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a tedy každá $\{x_i^k\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, je cauchyovská v $(\mathbb{R}, \rho_1)$. Podle Cauchyho–Bolzanova kritéria konvergence je však každá $\{x_i^k\}$ také konvergentní, tj. $\lim x_i^k = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Odtud plyne, že $\lim_{k\to\infty} x_k = x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Protože metriky ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ jsou ekvivalentní, jsou úplné také prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$. $\square$

3. $\mathbb{Q}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ není úplný. Např. $\left\{(1 + \frac{1}{n})\right\}$ je cauchyovská, ale konverguje k e $\notin \mathbb{Q}$.
4. Lze ukázat, že $\big(C(\langle a, b\rangle), \rho_C\big)$ je úplný (důkaz není zcela triviální), ale $\big(C(\langle a, b\rangle), \rho_I\big)$ úplný není. Stačí vzít např. posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in \langle -1, -1/n), \\ nx & \text{pro } x \in \langle -1/n, 1/n\rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in (1/n, 1\rangle. \end{cases}$$

Posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská v $\big(C(\langle -1, 1\rangle), \rho_I\big)$, ale limita není spojitá funkce a tedy nepatří do $C(\langle -1, 1\rangle)$.

Věta 4.3. *Je-li metrický prostor (M, ρ) úplný a množina $A \subseteq M$ je uzavřená, pak metrický prostor (A, ρ_A) (ρ_A je metrika indukovaná metrikou ρ) je úplný.*

Důkaz. Buď $\{x_n\} \subseteq A$ libovolná cauchyovská posloupnost. Poněvadž (M, ρ) je úplný, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in M$. Podle věty 3.7 je však $x \in A$. $\square$

Definice 4.4 (kompaktního metrického prostoru a kompaktní množiny v metrickém prostoru)**.** Řekneme, že metrický prostor (M, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat posloupnost konvergentní. Řekneme, že množina $A \subseteq M$ je *kompaktní*, jestliže podprostor (A, ρ_A) je kompaktní.

Věta 4.5. *Je-li A kompaktní množina v metrickém prostoru (M, ρ), pak je A uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. Uzavřenost sporem: Připusťme, že A není uzavřená, tj. $A \neq \overline{A}$, tedy že existuje $x \in \overline{A} \setminus A$. Protože $\rho(x, A) = 0$, existuje posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$ tak, že $\rho(x_n, x) \to 0$, neboli $x_n \to x$. Pro každou vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ je podle věty 3.4.3 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \notin A$, což je spor s kompaktností A.

Ohraničenost sporem: Připusťme, že A není ohraničená, tj. $d(A) = \infty$. Sestrojme posloupnost $\{x_n\}$ takto. Bod $x_1 \in A$ vybereme libovolně a nechť $x_2 \in A$ je takové, že $\rho(x_1, x_2) \geq 1$ (takové x_2 jistě existuje, protože A je neohraničená). Bod $x_3 \in A$ vybereme tak, aby jeho vzdálenost od obou x_1 a x_2 byla větší nebo rovna 1 (tento bod opět existuje z důvodu neohraničenosti). Pokračujeme tak, aby bod x_n měl vzdálenost větší nebo rovnu jedna o všech předchozích bodů. Posloupnost $\{x_n\}$ i každá posloupnost z ní vybraná není cauchuovská, neboť $\rho(x_n, x_m) > 1$ pro $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, a tedy podle věty 3.6 nemůže být konvergentní. To je ale spor s kompaktností A. $\square$

Věta 4.6. *V prostorech $(\mathbb{R}^n, \rho_i)$, kde $i = 1, 2, \infty$, platí i opačné tvrzení. Máme tedy: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\Longleftrightarrow$ je v tomto prostoru uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. Nutnost podmínky plyne z věty 4.5. Dokažme její dostatečnost. Uvažujme nejprve metriku ρ_1. Buď $\{x_k\}_{k=1}^\infty = \{(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)\}_{k=1}^\infty$ libovolná posloupnost bodů z A. Poněvadž A je ohraničená, je každá z číselných posloupností $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$ také ohraničená, a tedy lze z každé z nich vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_i^{k_{\ell_i}}\}_{\ell_i=1}^\infty$ konvergující k $x_i^0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (viz věta 7.22 v SA1). To znamená, že každá posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq A$ má podvýběr konvergující k bodu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}$. Protože však A je uzavřená, musí podle věty 3.7 být $x^0 \in A$. Jinak řečeno, každá posloupnost z A obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou v A, což je požadavek v definici kompaktnosti. Z ekvivalence metrik ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ plyne tvrzení i pro prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$. $\square$

Věta 4.7. *Je-li metrický prostor (M, ρ) kompaktní, pak je úplný.*

Důkaz. Buď $\{x_n\}$ libovolná cauchyovská posloupnost v (M,ρ). Poněvadž (M,ρ) je kompaktní, existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z $\{x_n\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in M$. Ukažme, že $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Posloupnost $\{x_{n_k}\}$ konverguje k x, což znamená, že k $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq k_0$ je $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože $\{x_n\}$ je cauchyovská, k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n, m \geq n_1$ platí $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ a nechť $n \geq n_0$ a $k \geq k_0$ jsou libovolná čísla. Pak také $n_k \geq n_0$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

5 Zobrazení metrických prostorů

Definice 5.1 (izometrického zobrazení)**.** Nechť (M,ρ) a (N,σ) jsou metrické prostory a $F : M \to N$ je zobrazení (s $D(F) = M$, tj. zobrazení množiny M do N). Zobrazení F se nazývá *izometrické*, jestliže $\forall x, y \in M$ platí

$$\sigma(F(x), F(y)) = \rho(x, y).$$

Poznámka. Izometrické zobrazení je vždy prosté (kdyby existovaly v M body $x \neq y$ takové, že $F(x) = F(y)$, pak by podle (m1) a definice izometrie platilo $0 = \sigma(F(x), F(y)) = \rho(x, y) \neq 0$, což je spor). Je-li zobrazení také surjekce, pak existuje inverzní zobrazení $F^{-1} : N \to M$ (s $D(F^{-1}) = N$), které je opět izometrické (v takovém případě řekneme, že (M,ρ) a (N,σ) jsou *izometrické prostory*). Např. všechna shodná zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (posunutí, osová či středová souměrnost, otočení) jsou izometrická zobrazení.

Definice 5.2 (spojitého zobrazení mezi metrickými prostory)**.** Buďte (M,ρ), (N,σ) metrické prostory a $F : M \to N$ zobrazení. Řekneme, že F je *spojité v bodě* $x_0 \in M$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in O_\delta(x_0)$ v (M,ρ) platí $F(x) \in O_\varepsilon(F(x_0))$ v (N,σ). Řekneme, že zobrazení F *je spojité na* M, jestliže je spojité v každém bodě $x \in M$.

Věta 5.3 (Heineho podmínka)**.** *Nechť (M,ρ), (N,σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $F : M \to N$ je spojité v bodě $x_0 \in M \iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z M takovou, že $x_n \to x_0$ v (M,ρ) platí $F(x_n) \to F(x_0)$ v (N,σ).*

Důkaz. „$\Longrightarrow$" Nechť F je spojité v bodě x_0 a $\{x_n\} \subset M$ je libovolná posloupnost konvergující k x_0. Potřebujeme dokázat, že $\sigma(F(x_n), F(x_0)) \to 0$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Podle definice spojitosti zobrazení F v bodě x_0 k ε-ovému okolí bodu $F(x_0)$ existuje δ-okolí bodu x_0 takové, že pro každé x z tohoto okolí platí $\sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$. Protože $\rho(x_n, x_0) \to 0$, k číslu δ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x_0) < \delta$, a tedy $\sigma(F(x_n), F(x_0)) < \varepsilon$. To znamená, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ jsme našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\sigma(F(x_n), F(x_0)) < \varepsilon$, tedy $F(x_n) \to F(x_0)$.

„$\Longleftarrow$" Nechť x_0 je libovolný bod a pro libovolnou posloupnost $x_n \to x_0$ platí $F(x_n) \to F(x_0)$. Sporem: předpokládejme, že zobrazení f není spojité v bodě x_0, tj. že existuje okolí $O_\varepsilon(F(x_0))$ takové, že v každém okolí $O_\delta(x_0)$ existuje x splňující $F(x) \notin O_\varepsilon(f(x_0))$. Klademe-li postupně $\delta = \frac{1}{n}$, pak v okolí O_δ existuje bod x_n takový, že $f(x_n) \notin O_\varepsilon(F(x_0))$. Tímto způsobem jsme sestrojili posloupnost $\{x_n\}$ konvergující k x_0, pro niž $F(x_n)$ nekonverguje k $F(x_0)$ (neboť $F(x_n) \notin O_\varepsilon(F(x_0))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$), což je spor. Zobrazení f tedy musí být spojité v bodě x_0. □

Věta 5.4. *Nechť (M,ρ), (N,σ) jsou metrické prostory, $A \subseteq M$ a $F : M \to N$ spojité zobrazení na M. Je-li množina A kompaktní, pak je i množina $F(A)$ kompaktní.*

Důkaz. Nechť A je kompaktní a buď $\{y_n\}$ libovolná posloupnost bodů z $F(A)$. Ke každému $y_n \in F(A)$ existuje $x_n \in A$ takové, že $F(x_n) = y_n$. Poněvadž A je kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$, tj. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in A$ v (M,ρ). Označme $y_0 = F(x_0)$. Pak $y_0 \in F(A)$ a podle Heineho podmínky $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = F(x_0) = y_0$ v (N,σ). Našli jsme tedy posloupnost $\{y_{n_k}\}$ vybranou z $\{y_n\}$ konvergující k $y_0 \in F(A)$. To znamená, že $F(A)$ je kompaktní množina. □

Důsledek 5.5 (I. a II. Weierstrassova věta)**.** *Reálná funkce f spojitá na uzavřeném intervalu je zde ohraničená a nabývá svého maxima a minima.*

Důkaz. Uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ je podle věty 4.6 kompaktní v $(\mathbb{R}, |x - y|)$ a podle věty 5.4 je kompaktní také obraz $f(\langle a, b\rangle)$. I. Weierstrassova věta nyní plyne z faktu, že kompaktní množina v každém metrickém prostoru je ohraničená (viz věta 4.5). II. Weierstrassova věta (tj. skutečnost, že f za daných předpokladů nabývá svého maxima a minima) plyne z následující úvahy. Protože $f(\langle a, b\rangle)$ je ohraničená, existuje supremum množiny $f(\langle a, b\rangle)$. Z vlastnosti suprema plyne, že k $1/n$ existuje $y_n \in f(\langle a, b\rangle)$ takové, že $\sup f(\langle a, b\rangle) - 1/n < y_n$, a tedy $\lim_{n\to\infty} y_n = \sup f(\langle a, b\rangle)$. Protože množina $f(\langle a, b\rangle)$ je (opět podle věty 4.5) uzavřená, platí podle věty 3.7, že $\sup f(\langle a, b\rangle) \in f(\langle a, b\rangle)$, tj. $\sup f(\langle a, b\rangle) = \max f(\langle a, b\rangle)$. Analogicky by se ukázalo, že f nabývá na $\langle a, b\rangle$ i své nejmenší hodnoty. □

Definice 5.6 (stejnoměrně spojitého zobrazení)**.** Nechť (M, ρ), (N, ρ) jsou metrické prostory a $F : M \to N$ zobrazení. Řekneme, že F je *stejnoměrně spojité na M*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x, y \in M$ splňující $\rho(x, y) < \delta$ platí $\sigma(F(x), F(y)) < \varepsilon$.

Poznámka. Stejnoměrně spojité zobrazení je spojité.

Věta 5.7 (Heineova–Cantorova)**.** *Buď (M, ρ) kompaktní metrický prostor, (N, σ) metrický prostor a $F : M \to N$ spojité zobrazení. Pak F je stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Nechť (M, ρ) je kompaktní a $F : M \to N$ spojité. Sporem: připusťme, že F není stejnoměrně spojité. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existují $x, y \in M$ taková, že $\rho(x, y) < \delta$ a $\sigma(F(x), F(y)) \geq \varepsilon_0$. Položíme-li $\delta = \frac{1}{n}$, pak to znamenená, že existují x_n, y_n taková, že $\rho(x_n, y_n) < \delta$ a $\sigma(F(x_n), F(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Protože N je kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in M$. Dále platí $\rho(x_0, y_{n_k}) \leq \rho(x_0, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$ pro $k \to \infty$ a tedy také $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$. Podle Heineho podmínky platí $\sigma(F(x_{n_k}), F(y_{n_k})) \leq \sigma(F(x_{n_k}), F(x_0)) + \sigma(F(x_0), F(y_{n_k})) \to 0$ pro $k \to \infty$, což je spor s $\sigma(F(x), F(y)) \geq \varepsilon_0$. □

Definice 5.8 (lipschitzovského zobrazení a kontrakce)**.** Buďte (M, ρ), (N, σ) metrické prostory a $F : M \to N$ zobrazení. Řekneme, že F je *lipschitzovské*, jestliže existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro $\forall x, y \in M$ je $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y)$. Konstanta L se nazývá *Lipschitzova konstanta* (Rudolf Lipschitz 1832–1903, Němec). Řekneme, že zobrazení F je *kontrakce*, je-li lipschitzovské s konstantou $L < 1$.

Věta 5.9. *Nechť (M, ρ), (N, σ) jsou metrické prostory a $F : M \to N$ zobrazení. Je-li F lipschitzovské, pak je stejnoměrně spojité (a tedy také spojité).*

ZK *Důkaz.* Nechť F je lipschitzovské s konstantou L. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\delta = \varepsilon/L$. Jsou-li $x, y \in M$ libovolné body takové, že $\rho(x, y) < \delta$, pak $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y) < L\delta = L\varepsilon/L = \varepsilon$. □

Příklad 5.10. Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, která má derivaci na (a, b). Pak f je lipschitzovská na $\langle a, b\rangle \iff f'$ je na (a, b) ohraničená.

Důkaz. „$\Longleftarrow$“: Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz věta 16.2 v SA1) ke každým $x, y \in \langle a, b\rangle$ existuje $\xi \in (x, y)$ takové, že $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Odtud $|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq L|y - x|$.
„$\Longrightarrow$“: Protože f je lipschitzovská na $\langle a, b\rangle$, platí $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ pro $x, y \in \langle a, b\rangle$. Buď $x \in (a, b)$ libovolné a y pišme ve tvaru $y = x + h$, kde $h \in (a - x, b - x)$. Potom lze podmínku přepsat jako $|f(x+h) - f(x)| \leq L|x + h - x| = L|h|$, což je v případě $h \neq 0$ ekvivalentní podmínce

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq L.$$

Odtud

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = |f'(x)| \leq \lim_{h\to 0} L = L,$$

tj. f' je na (a, b) ohraničená. □

Definice 5.11 (limity zobrazení mezi metrickými prostory)**.** Buďte (M, ρ), (N, σ) metrické prostory, $F : M \to N$ zobrazení a $x_0 \in M$ hromadný bod množiny M. Řekneme, že zobrazení F má v bodě $x_0 \in M$ *limitu* $y_0 \in N$ a píšeme $\lim_{x\to x_0} F(x) = y_0$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in O^*_\delta(x_0)$ v (M, ρ) platí $F(x) \in O_\varepsilon(x_0)$ v (N, σ).

Poznámka. a) Pozor, limitu lze (narozdíl od spojitosti) uvažovat pouze v hromadných bodech množiny M!
b) Jestliže má zobrazení F v bodě $x_0 \in M$ limitu $F(x_0)$, pak je v tomto bodě spojité.

Definice 5.12 (pevného bodu zobrazení)**.** Nechť M je množina a $F : M \to M$. Bod $x \in M$ se nazývá *pevný bod zobrazení* F, jestliže $F(x) = x$.

Věta 5.13 (Banachova věta o pevném bodu, Stefan Banach 1892–1945, Polák)**.** *Nechť (M, ρ) je úplný metrický prostor a $F : M \to M$ kontrakce. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení F. Navíc, tento pevný bod je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_1 \in M$ je libovolný bod a $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.*

ZK *Důkaz.* a) Nejdříve ukažme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(F(x_{n-1}), F(x_n)) \leq L\rho(x_{n-1}, x_n) \\ &= L\rho(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})) \leq L^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) = \cdots \leq L^{n-1}\rho(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Odtud a z (m3) plyne, že pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m})$$

$$
\begin{aligned}
&\leq L^{n-1}\rho(x_1,x_2) + L^n\rho(x_1,x_2) + L^{n+1}\rho(x_1,x_2) + \cdots + L^{n+m-2}\rho(x_1,x_2)\\
&= (L^{n-1} + L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{n+m-2})\rho(x_1,x_2)\\
&= (1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-1})L^{n-1}\rho(x_1,x_2) = \frac{1-L^m}{1-L}L^{n-1}\rho(x_1,x_2) \leq L^{n-1}\frac{\rho(x_1,x_2)}{1-L} \to 0
\end{aligned}
$$

pro $n \to \infty$, neboť $L^{n-1} \to 0$ pro $n \to \infty$, tj. $\{x_n\}$ je cauchyovská.

b) Protože (M,ρ) je úplný, existuje $\lim_{n\to\infty} x_n = x_* \in M$.

c) Ukažme, že x_* je pevný bod F. Platí

$$
\rho(x_*, F(x_*)) \leq \rho(x_*, x_n) + \rho(x_n, F(x_*)) = \rho(x_*, x_n) + \rho(F(x_{n-1}), F(x_*)) \leq \rho(x_*, x_n) + L\rho(x_{n-1}, x_*) \to 0
$$

pro $n \to \infty$, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_*, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{n-1}, x_*) = 0$ pro $n \to \infty$. Tedy $\rho(x_*, F(x_*)) = 0$ a podle (m1) je $F(x_*) = x_*$.

d) Jako poslední krok ukažme jednoznačnost pevného bodu. Předpokládejme, že existuje pevný bod $x_{**} \neq x_*$ zobrazení F. Pak $\rho(x_{**}, x_*) = \rho(F(x_{**}), F(x_*)) \leq L\rho(x_{**}, x_*)$. Odtud plyne, že $(1-L)\rho(x_{**}, x_*) \leq 0$ a poněvadž $0 < L < 1$, musí být $\rho(x_{**}, x_*) = 0$, tj. $x_{**} = x_*$. □