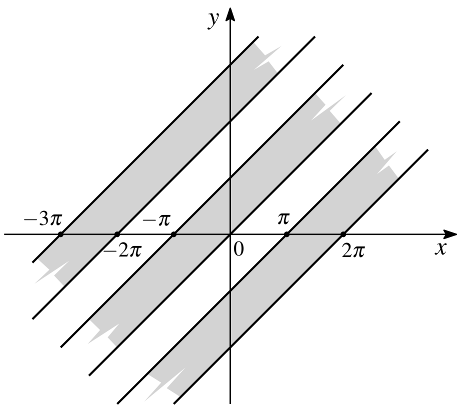
6 Funkce více proměnných, spojitost a limita

Definice 6.1 (funkce n proměnných)**.** Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme *(reálnou) funkcí n (reálných) proměnných*. Množina $D(f) := \{[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}$ tak, že $[x_1, x_2, \dots, x_n, y] \in f\}$ se nazývá *definiční obor* funkce f, množina $H(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ tak, že $[x_1, x_2, \dots, x_n, y] \in f\}$ se nazývá *obor hodnot*. Zapisujeme: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, stručně $y = f(X)$. Pro $n = 2$: $z = f(x, y)$, pro $n = 3$: $u = f(x, y, z)$, atp. *Grafem funkce n proměnných* nazveme množinu $G(f) := \{[X, f(X)] \in \mathbb{R}^{n+1} : X \in D(f)\}$.

Poznámka. Není-li definiční obor zadán, považujeme za něj množinu všech $X \in \mathbb{R}^n$, pro která má daný předpis smysl.

Příklad 6.2. Načrtněte $D(f)$ funkce $f(x, y) = \sqrt{\sin(y - x)}$.

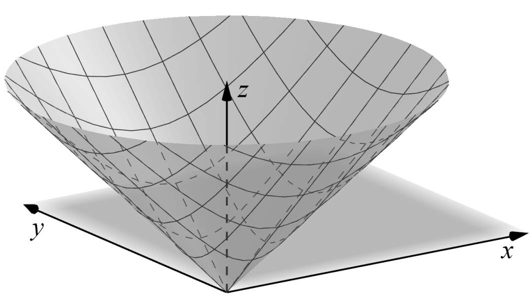
Řešení. Jedinou podmínkou je nezápornost výrazu pod odmocninou, tj. definiční obor obdržíme z podmínky $\sin(y-x) \geq 0$. Ta je ekvivalentní podmínce $2k\pi \leq y - x \leq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Máme tedy $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi \leq y - x \leq (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, viz obrázek 3.



Obrázek 3: Naznačení definičního oboru funkce $f(x, y) = \sqrt{\sin(y - x)}$ („pruhy“ se periodicky opakují)

Příklad 6.3. Načrtněte graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení. Řezy plochy s rovinami rovnoběžnými se souřadnými rovinami xz a yz jsou hyperboly ležící (ve zmíněných souřadných rovinách pak přejdou v asymptoty těchto hyperbol). Řezy plochy s rovinami rovnoběžnými se souřadnou rovinou xy jsou pak kružnice se středem v počátku. Grafem je tedy polovina rotační kuželové plochy (hodnota $z = f(x, y)$ je podle zadání nezáporná) s osou rotace v ose z, viz obrázek 4.



Obrázek 4: Kuželová plocha (graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$)

Uvažujeme-li na množině $\mathbb{R}^n$ některou z ekvivalentních metrik ρ_1, ρ_2, ρ_∞ a na množině $D(f)$ potom příslušnou indukovanou metriku, pak funkci n proměnných lze považovat za zobrazení metrického prostoru $(D(f), \rho_i)$ na metrický prostor $(H(f), |x - y|)$. O funkci f řekneme, že je spojitá (resp. stejnoměrně spojitá, resp. lipschitzovská), je-li toto zobrazení spojité (resp. stejnoměrně spojité, resp. lipschitzovské). Lze použít všechna tvrzení z předchozí kapitoly. Nebude-li řečeno jinak, budeme používat maximální metriku ρ_∞. V tomto případě

$$O(X) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times \dots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$$

a $O^*(X) = O(X) \setminus \{X\}$.

Limitu funkce n proměnných bychom zavedli jako v definici 5.11. Pokud chceme pojem rozšířit i na „nevlastní případ“, je potřeba uvažovat také okolí nevlastních bodů (nevlastním bodem rozumíme bod $X = [x_1, \dots, x_n]$, kde alespoň jedna složka $x_i = \pm\infty$). Je-li $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in (\mathbb{R}^*)^n$ nevlastní bod, pak klademe

$$O^*(X) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

kde

$$a_i = \begin{cases} x_i - \varepsilon & \text{pro } x_i \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{pro } x_i = -\infty \\ c \in \mathbb{R} & \text{pro } x_i = \infty \end{cases}, \quad b_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon & \text{pro } x_i \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{pro } x_i = \infty, \\ c \in \mathbb{R} & \text{pro } x_i = -\infty \end{cases}.$$

Okolí nevlastního bodů je vždy ryzí. Pokud X je nevlastní bod a pro každé okolí $O(X)$ platí $O(X) \cap D(f) \neq \emptyset$, pak X lze považovat za hromadný bod $D(f)$.

Definice 6.4 (limity funkce n proměnných)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce a X_0 je hromadný bod $D(f)$. Řekneme, že f má v bodě X_0 limitu $a \in \mathbb{R}^*$ (píšeme $\lim_{X\to X_0} f(X) = a$), jestliže ke každému okolí $O(a)$ existuje okolí $O^*(X_0)$ takové, že pro každé $X \in O^*(X_0) \cap D(f)$ platí $f(X) \in O(a)$.

Vlastnosti. *1. Funkce f má v X_0 nejvýše jednu limitu.*

2. *Má-li f v bodě X_0 limitu $a \in \mathbb{R}$, pak existuje $O^*(X_0)$ takové, že f je na $O^*(X_0) \cap D(f)$ ohraničená (funkci nazveme ohraničenou na množině $A \subseteq D(f)$, je-li ohraničená množina $f(A)$ coby podmnožina $\mathbb{R}$).*
3. *Nechť $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = 0$ a existuje $O^*(X_0)$ takové, že funkce g je na $O^*(X_0) \cap D(f)$ ohraničená. Pak*
$$\lim_{X\to X_0} f(X)g(X) = 0.$$
4. *Nechť $\lim\limits_{X\to X_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{X\to X_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Pak platí: $\lim\limits_{X\to X_0} |f(X)| = |a|$, $\lim\limits_{X\to X_0} (f(X) \pm g(X)) = a \pm b$,*
$$\lim_{X\to X_0} f(X)g(X) = ab, \quad \text{je-li navíc } b \neq 0, \text{ pak } \lim_{X\to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{a}{b}, \quad a \leq b, \text{ je-li } f(X) \leq g(X)$$
na nějakém $O^*(X_0) \cap D(f)$.
5. *Nechť existuje okolí $O^*(X_0)$ takové, že pro každé $X \in O^*(X_0) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ platí $f(X) \leq g(X) \leq h(X)$. Jestliže $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = \lim\limits_{X\to X_0} h(X) = a \in \mathbb{R}$, pak $\lim\limits_{X\to X_0} g(X) = a$.*
6. *Nechť existuje složená funkce $f \circ \varphi$ na $O^*(X_0)$, $\lim\limits_{X\to X_0} \varphi(X) = a \in \mathbb{R}$ a f je spojitá v bodě a. Potom*
$$\lim_{X\to X_0} f(\varphi(X)) = f\big(\lim_{X\to X_0} \varphi(X)\big) = f(a).$$
7. *Heineho podmínka: $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = a \iff \forall \{X_n\} \subseteq D(f)$, $X_n \to X_0$, $X_n \neq X_0$ platí $f(X_n) \to a$.*

Výpočet limity funkce dvou a více proměnných obvykle není jednoduchý, zejména nemáme analogii l'Hospitalova pravidla!

Příklad 6.5. Vypočítejte a) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,3]} \dfrac{x+7}{x-y+2}$, b) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$, c) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Řešení. ad a) Přímím dosazením (jedná se o podíl dvou polynomů prvního stupně) máme

$$\lim_{[x,y]\to[2,3]} \frac{x+7}{x-y+2} = 9.$$

ad b) Úpravou výrazu:

$$\lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{2}{3}.$$

ad c) V tomto případě lze danou limitu převést na limitu funkce jedné proměnné:

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{c} x^2+y^2 = t \\ t \to 0+ \end{array} \right| = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Příklad 6.6. Dokažte, že limity a) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, b) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ neexistují.

Řešení. ad) Uvažujeme-li funkci pouze nad svazkem přímek $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$, pak limity funkce nad jednotlivými přímkami vedou na

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Nad každou přímkou by tedy hodnota limity byla jiná, což je spor s jednoznačností limity. Limita tedy neexistuje.

ad b) Vyzkoušíme-li podobně jako v příkladu a) svazek přímek $y = kx$, zjistíme, že všechny limity funkce nad těmito přímkami jsou nulové. To nám existenci limity nevyvrátí, ale ani nepotvrdí. Podobně, svazek parabol $y = kx^2$ také vede na nulové limity. Až svazek kubických parabol $y = kx^3$, $k \in \mathbb{R}$ vede na

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^6}{x^6 + k^2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

což existenci limity vyloučí.

Příklad 6.7. Vyšetřte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3x^2}{y^2 - 5x + 3y}$.

Řešení. Metodou svazku přímek $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{k^2x^2 - 5x + 3kx} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{k^2x - 5 + 3k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq 5/3, \\ 27/25 & \text{pro } k = 5/3. \end{cases}$$

Protože pro jednu přímku vychází hodnota limity jinak než pro ostatní, limita zadané funkce neexistuje.

Příklad 6.8. Vyšetřete limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

Řešení. Platí

$$0 \leq (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)} = x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-y} + y^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-y} \leq x^2\,\mathrm{e}^{-x} + y^2\,\mathrm{e}^{-y} \quad \forall x \geq 0,\ \forall y \geq 0.$$

Protože

$$\lim_{t\to\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^t} = 0 \quad \text{(použili jsme 2x l'Hospitalovo pravidlo)},$$

funkce $x^2\,\mathrm{e}^{-x} + y^2\,\mathrm{e}^{-y}$ na pravé straně druhé nerovnosti konverguje k nule pro $[x, y] \to [\infty, \infty]$. Podle věty o třech limitách je tedy limita zadané funkce také nula.

Věta 6.9. *Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $r^* > 0$ a funkce $g : (0,\infty) \to \langle 0,\infty)$ taková, že $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$ a $|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - a| \leq g(r)$ pro každé $r \in (0, r^*)$ a každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.*

ZK *Důkaz.* Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall r \in (0, \delta)$ platí $0 \leq g(r) < \varepsilon$. Uvažujeme-li na $\mathbb{R}^2$ metriku ρ_2, pak také $\forall [x, y] \in O^*_\delta([x_0, y_0])$ platí $|f(x, y) - a| < \varepsilon$, tj.

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = a.$$

□

Příklad 6.10. Vyšetřete $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,1]} \frac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2}$.

Řešení. Máme

$$\left.\frac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2}\right|_{x=r\cos\varphi,\ y=1+r\sin\varphi} = \frac{r^2 + r^3\sin^3\varphi}{r^2} = 1 + r\sin^3\varphi.$$

Odtud,

$$\Big|\underbrace{1 + r\sin^3\varphi}_{f(r\cos\varphi, 1+r\sin\varphi)} - \underbrace{1}_{a}\Big| \leq \underbrace{r}_{g(r)} \to 0 \quad \text{pro} \quad r \to 0.$$

Hledanou limitou je tedy číslo 1.

Poznámka. Vztah spojitosti a limity v bodě je nyní následující. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je v bodě $X_0 \in D(f)$ spojitá, jestliže $\lim_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$. Jsou-li všechny body $D(f)$ hromadné, tak platí i opačné tvrzení.