8 Totální diferenciál

Definice 8.1 (totálního diferenciálu)**.** Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (ah + bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $ah + bk$ proměnných h, k se nazývá *totální (úplný) diferenciál funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d} f(x_0, y_0)$, případně $\mathrm{d} f(x_0, y_0; h, k)$, případně $\mathrm{d} f(x_0, y_0)(h, k)$.

Poznámka. a) Analogicky bychom definovali totální diferenciál pro funkci tří a více proměnných.

b) Podmínku z definice lze ekvivalentně formulovat: existují $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že platí

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \sqrt{h^2 + k^2}\, \tau(h, k), \quad \text{kde} \quad \lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h, k) = 0$$

(srovnejte s definicí diferenciálu funkce jedné proměnné).

c) Jmenovatel limity v definici je vzdálenost bodu $[h, k]$ od počátku v eukleidovské metrice ρ_2. Lze použít i ekvivalentní metriky ρ_1 nebo ρ_∞ (tj. výraz $\sqrt{h^2 + k^2}$ nahradit výrazem $|h| + |k|$ nebo $\max\{|h|, |k|\}$).

Věta 8.2. *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě X_0, pak je v tomto bodě spojitá.*

ZK *Důkaz.* Pro $n = 2$: Protože f je diferencovatelná, platí podle předchozí poznámky b)

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \big(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)\big) = \lim_{[h,k]\to[0,0]} \big(ah + bk + \sqrt{h^2 + k^2}\, \tau(h, k)\big) = 0$$

(protože $\lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h, k) = 0$), což znamená, že $\lim_{[h,k]\to[0,0]} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$, tj. f je spojitá v $[x_0, y_0]$. □

Poznámka. Obrácené tvrzení neplatí, např. funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá v bodě $[0, 0]$, ale není zde diferencovatelná.

Věta 8.3. *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace a platí $a = f'_x(x_0, y_0)$, $b = f'_y(x_0, y_0)$, tj.*

$$\mathrm{d} f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\, h + f'_y(x_0, y_0)\, k.$$

ZK *Důkaz.* Položme v definici totálního diferenciálu $k = 0$. Pak

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) - a \text{ pro } h > 0 \\ a - f'_x(x_0, y_0) \text{ pro } h < 0 \end{cases},$$

tj. $a = f'_x(x_0, y_0)$. Stejným obratem by se dokázala rovnost $b = f'_y(x_0, y_0)$. □

Věta 8.4. *Má-li funkce f na $O([x_0, y_0])$ parciální derivace f'_x, f'_y, které jsou spojité v $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.*

Důkaz. Protože parciální derivace derivace dle předpokladu existují v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$, s využitím věty o střední hodnotě na tomto okolí platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&= \lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f'_x(x_0 + \xi h, y_0)h + f'_y(x_0 + h, y_0 + \eta k)k - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&= \lim_{[h,k]\to[0,0]} \big(f'_x(x_0 + \xi h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\big) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \lim_{[h,k]\to[0,0]} \big(f'_y(x_0 + h, y_0 + \eta k) - f'_y(x_0, y_0)\big) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne ze spojitosti f'_x, f'_y v $[x_0, y_0]$, ohraničenosti $\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le 1$, $\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le 1$ a vlastností limity. □

Poznámka. a) Poslední dvě tvrzení platí analogicky i pro funkce tří a více proměnných.

b) Podobně jako u diferenciálu funkce jedné proměnné lze odůvodnit značení přírůstků h, k jako $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$, resp. přírůstků $h_1, h_2, \dots, h_n$ jako $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n$.

c) Rovina $z = ax+by+c$ v $\mathbb{R}^3$ se nazývá *tečnou rovinou ke grafu funkce* $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, jestliže

$$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c \qquad \text{a} \qquad \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x, y) - ax - by - c}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) - ax - by - c}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \end{aligned}$$

tj. $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0)$. Podle věty 8.3 platí $a = f'_x(x_0, y_0)$, $b = f'_y(x_0, y_0)$ a tedy $c = f(x_0, y_0) - x_0 f'_x(x_0, y_0) - y_0 f'_y(x_0, y_0)$. Celkově tedy

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad \text{tj.} \quad z = f(x_0, y_0) + \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$

tj. $z = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0)$. Odtud plyne geometrický význam totálního diferenciálu funkce dvou proměnných, je to přírůstek funkce měřený na tečné rovině.

Věta 8.5. *Nechť funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je diferencovatelná v bodě* $X_0 \in \mathbb{R}^n$ *a nechť* $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ *je libovolný. Pak existuje směrová derivace* $f'_{\vec{s}}(X_0)$ *a platí* $f'_{\vec{s}}(X_0) = \operatorname{grad} f(X_0) \cdot \vec{s}$.

ZK *Důkaz.* Pro $n = 2$: Nechť f je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Potom

$$\begin{aligned} f'_{\vec{s}}(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d}f(x_0, y_0; ts_1, ts_2) + \sqrt{t^2(s_1^2 + s_2^2)}\,\tau(ts_1, ts_2)}{t} \\ &= \mathrm{d}f(x_0, y_0; s_1, s_2) \pm \lim_{t\to 0} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}\,\tau(ts_1, ts_2) = \mathrm{d}f(x_0, y_0; s_1, s_2) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \vec{s}. \end{aligned}$$

□

Příklad 8.6. Spočítejte směrovou derivaci $f(x, y, z) = x^2 + yz$ v bodě $[1, 2, -1]$ ve směru vektoru $\vec{s} = (-1, 1, 2)$.

Řešení.

$$\operatorname{grad} f = (2x, z, y) \implies \operatorname{grad} f(1, 2, -1) = (2, -1, 2) \implies f'_{\vec{s}}(1, 2, -1) = (2, -1, 2) \cdot (-1, 1, 2) = 1.$$

Srovnejte s příkladem 7.9.

Definice 8.7 (totálního diferenciálu m-ho řádu)**.** Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na $O([x_0, y_0])$ parciální derivace až do řádu m včetně, které jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Pak *totálním diferenciálem m-tého řádu funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ rozumíme funkci

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0; h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0) h^j k^{m-j}.$$

Poznámka. a) Totální diferenciál m-tého řádu funkce f je přirozené definovat jako $\mathrm{d}^m f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{m-1} f)$, $m = 2, 3, \dots$, což vzhledem k větám 8.3 a 8.4 skutečně vede na vzorec v předchozí definici, např.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f'_x h + f'_y k) &= (f'_x h + f'_y k)'_x h + (f'_x h + f'_y k)'_y k \\ &= f''_{xx} h^2 + f''_{yx} hk + f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2 = f''_{xx} h^2 + 2 f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2. \end{aligned}$$

b) V případě funkce tří a více proměnných se vzorec modifikuje na

$$\mathrm{d}^m f(X_0; h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}(X_0) h_1^{m_1} h_2^{m_2} \dots h_n^{m_n}.$$

9 Derivace složené funkce, Taylorův polynom

Věta 9.1 (řetězové pravidlo)**.** *Nechť funkce* $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mají parciální derivace v bodě* $[x_0, y_0]$ *a funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *je diferencovatelná v bodě* $[u_0, v_0] = [u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$*. Potom funkce* $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ *má parciální derivace v bodě* $[x_0, y_0]$ *a platí*

$$F'_x(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)\, u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)\, v'_x(x_0, y_0),$$
$$F'_y(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)\, u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)\, v'_y(x_0, y_0),$$

stručně $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$ *a* $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y$*.*

Důkaz. Podle definice je

$$F'_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\big(u(x_0 + h, y_0), v(x_0 + h, y_0)\big) - f\big(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)\big)}{h}.$$

Protože f je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, existuje podle poznámky b) pod definicí 8.1 funkce τ taková, že

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h, k) = 0$$

a

$$f\big(u(x_0 + h, y_0), v(x_0 + h, y_0)\big) - f(u_0, v_0) = f'_u(u_0, v_0)\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0\big) + f'_v(u_0, v_0)\big(v(x_0 + h, y_0) - v_0\big)$$
$$+\sqrt{\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0\big)^2 + \big(v(x_0 + h, y_0) - v_0\big)^2}\, \tau\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0, v(x_0 + h, y_0) - v_0\big),$$

přičemž jsme využili větu 8.3. Označme

$$\omega(h) = \sqrt{\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0\big)^2 + \big(v(x_0 + h, y_0) - v_0\big)^2}\, \tau\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0, v(x_0 + h, y_0) - v_0\big).$$

Pak

$$\begin{aligned} F'_x(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big[f'_u(u_0, v_0)\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0\big) + f'_v(u_0, v_0)\big(v(x_0 + h, y_0) - v_0\big) + \omega(h)\big] \\ &= f'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0) + \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h}. \end{aligned}$$

Jako poslední krok je potřeba ukázat, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{\frac{\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0\big)^2 + \big(v(x_0 + h, y_0) - v_0\big)^2}{h^2}}\, \tau(h) = 0.$$

Skutečně, s využitím l'Hospitalova pravidla máme

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0\big)^2 + \big(v(x_0 + h, y_0) - v_0\big)^2}{h^2} \\ &\qquad = \lim_{h\to 0} \frac{2\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0\big)u'_x(x_0 + h, y_0) + 2\big(v(x_0 + h, y_0) - v_0\big)v'_x(x_0 + h, y_0)}{2h} \\ &\qquad\qquad = \big(u'_x(x_0, y_0)\big)^2 + \big(v'_y(x_0, y_0)\big)^2. \end{aligned}$$

Protože existuje konečná limita, funkce

$$\sqrt{\frac{\big(u(x_0 + h, y_0) - u_0\big)^2 + \big(v(x_0 + h, y_0) - v_0\big)^2}{h^2}}$$

musí být ohraničená (viz vlastnosti limity, bod druhý s přihlédnutím k bodu šestému). Vztah $\lim_{h\to 0} \omega(h)/h = 0$ pak plyne ihned z třetího bodu vlastností limity. □

Poznámka. a) Analogicky pro funkci tří a více proměnných $z = f(u_1, \ldots, u_n)$, kde $u_i = u_i(x_1, \ldots, x_n)$, bychom dostali

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

b) Pro derivace druhého řádu by se tvrzení modifikovalo: mají-li funkce u a v parciální derivace do druhého řádu v bodě $[x_0, y_0]$ a funkce f má parciální derivace druhého řádu na okolí bodu $[u_0, v_0] = [u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$, které jsou v tomto bodě spojité, pak funkce $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má druhé parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ a platí

$$
\begin{aligned}
z''_{xx} &= z''_{uu}(u'_x)^2 + 2z''_{uv}u'_x v'_x + z''_{vv}(v'_x)^2 + z'_u u''_{xx} + z'_v v'_{xx},\\
z''_{xy} &= z''_{uu}u'_x u'_y + 2z''_{uv}u'_x v'_y + z''_{vv}v'_x v'_y + z'_u u''_{xy} + z'_v v'_{xy},\\
z''_{yy} &= z''_{uu}(u'_y)^2 + 2z''_{uv}u'_y v'_y + z''_{vv}(v'_y)^2 + z'_u u''_{yy} + z'_v v'_{yy}.
\end{aligned}
$$

Skutečně, např. pro z''_{xx} máme

$$
\begin{aligned}
z''_{xx} &= (z'_u u'_x)'_x + (z'_v v'_x)'_x = (z'_u)'_x u'_x + z'_u u''_{xx} + (z'_v)'_x v'_x + z'_v v''_{xx}\\
&= (z'_{uu}u'_x + z''_{uv}v'_x)u'_x + z'_u u''_{xx} + (z''_{vu}u'_x + z''_{vv}v'_x)v'_x + z'_v v'_{xx}\\
&= z'_{uu}(u'_x)^2 + 2z''_{uv}u'_x v'_x + z''_{vv}(v'_x)^2 + z'_u u''_{xx} + z'_v v'_{xx},
\end{aligned}
$$

přičemž jsme využili linearitu operace derivování a rovnost $z''_{uv} = z''_{vu}$.

Věta 9.2 (Taylorova)**.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě X_0 a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m + 1$ včetně. Pak pro libovolné X z tohoto okolí platí*

$$f(X) = T_m(X) + R_m(X),$$

kde

$$T_m(X) = f(X_0) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}f(X_0; X - X_0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(X_0; X - X_0) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(X_0; X - X_0)$$

se nazývá Taylorův polynom (stupně m) *a*

$$R_m(X) = \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(X_0 + \vartheta(X - X_0); X - X_0), \quad \vartheta \in (0, 1)$$

se nazývá m-tý Taylorův zbytek v Lagrangeově tvaru.

Idea důkazu. Zavede se pomocná funkce $F(t) = f(X_0 + t(X - X_0))$, pro kterou platí $F(1) = f(X)$, a využije se Taylorova věta pro funkci jedné proměnné v bodě $t = 0$, tj.

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\vartheta).$$

Aplikujme-li pro výpočet derivací $F^{(k)}$ pravidlo pro parciální derivace složených funkcí, dostaneme vzorec věty. □

Poznámka. Nechť všechny parciální derivace řádu $m + 1$ funkce f jsou ohraničené stejnou stejnou konstantou c na úsečce $X_0 + tH$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ ($H = [h_1, h_2, \ldots, h_n] \in \mathbb{R}^n$), která leží v uvažovaném okolí. Pak pro odhad zbytku R_m platí:

$$|R_m(X_0 + H)| \le \frac{c}{(m+1)!}\big(|h_1| + |h_2| + \cdots + |h_m|\big)^{m+1}.$$

Příklad 9.3. Určete Taylorův polynom T_2 funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$ v bodě $[0, 0]$. Pomocí tohoto polynomu určete přibližně hodnotu $f(1/4, 1/8)$ a proveďte odhad chyby, které se aproximací dopustíme.

Řešení. Máme $f(0, 0) = 1$ a postupným napočítáním derivací až do druhého řádu snadno ověříme, že

$$\mathrm{d}f(0, 0) = 0, \quad \mathrm{d}^2 f(0, 0) = -h^2 - 4k^2.$$

Protože $h = x - 0 = x$, $k = y - 0 = y$, Taylorův polynom má tvar

$$T_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2$$

(tento polynom spolu s původní funkcí jsou znázorněny na obrázku 5). Aproximace dané funkční hodnoty potom je

$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{14}}{4} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0,9375.$$

Pro odhad zbytku potřebujeme navíc třetí derivace. Platí:

$$f'''_{xxx} = \frac{3x(4y^2 - 1)}{(1 - x^2 - 4y^2)^{5/2}}, \quad f'''_{xxy} = \frac{4y(4y^2 - 2x^2 - 1)}{(1 - x^2 - 4y^2)^{5/2}}, \quad f'''_{xyy} = \frac{4x(x^2 - 8y^2 - 1)}{(1 - x^2 - 4y^2)^{5/2}}, \quad f'''_{yyy} = \frac{48y(x^2 - 1)}{(1 - x^2 - 4y^2)^{5/2}}.$$

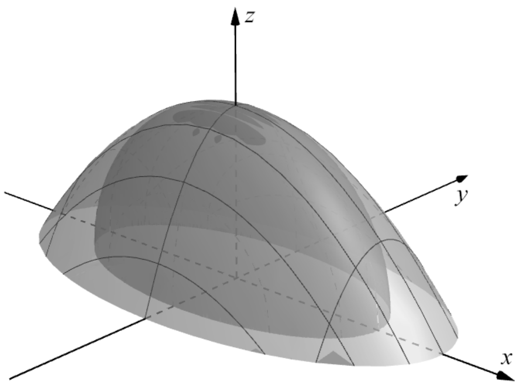
Protože nás zajímá ohraničenost derivací na úsečce $x = t/4$, $y = t/8$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, zaveďme funkce

$$\varphi_1(t) = f'''_{xxx}\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{8}\right) = \frac{3t^3 - 48t}{64(1 - t^2/8)^{5/2}}, \qquad \varphi_2(t) = f'''_{xxy}\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{8}\right) = -\frac{t^3 + 16t}{32(1 - t^2/8)^{5/2}}$$
$$\varphi_3(t) = f'''_{xyy}\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{8}\right) = -\frac{t^3 + 16t}{16(1 - t^2/8)^{5/2}}, \qquad \varphi_4(t) = f'''_{yyy}\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{8}\right) = \frac{t^3 - 96t}{16(1 - t^2/8)^{5/2}}.$$

Není těžké ověřit, že všechny čtyři funkce jsou v absolutní hodnotě na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ohraničené číslem 8. Podle výše uvedeného vzorce tedy máme

$$\left| R_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)\right| \le \frac{8}{3!}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)^3 = \frac{9}{128} = 0,0703125.$$

Výpočtem na kalkulačce nebo počítači se lze přesvědčit, že skutečná chyba je výrazně menší (cca 0,002), odhad zbytku pomocí uvedeného vzorce bývá obvykle dosti pesimistický.



Obrázek 5: Graf funkce f (horní polovina elipsoidu, tmavší šedá) a jejího Taylorova polynomu druhého stupně (eliptický paraboloid, světlejší šedá) z příkladu 9.3