7 Parciální a směrová derivace, gradient

Definice 7.1 (parciálních derivací funkce dvou proměnných)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce a $[x_0, y_0]$ je vnitřní bod $D(f)$. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce f podle proměnné x v bodě* $[x_0, y_0]$ (značíme $f'_x(x_0, y_0)$, nebo $f_x(x_0, y_0)$, nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. To znamená, že

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě* $[x_0, y_0]$ (značíme $f'_y(x_0, y_0)$, nebo $f_y(x_0, y_0)$, nebo $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$).

Má-li funkce f parciální derivace podle x ve všech bodech nějaké množiny $M \subseteq D(f)$, je tato parciální derivace sama funkcí (značíme f'_x, f_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$), analogicky pro f'_y.

Poznámka. a) Analogicky pro $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definujeme $f'_{x_i}(X_0) := \varphi'_i(x_i^0)$, kde

$$\varphi_i(x_i) := f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0).$$

b) Pravidlo pro výpočet je snadné, derivujeme jako funkci jedné proměnné, ostatní proměnné považujeme za parametry.

c) Lze tedy použít všechna pravidla pro derivování jako u funkce jedné proměnné.

d) Pozor, v případě funkce jedné proměnné platilo, že funkce mající derivaci v bodě musí být spojitá v tomto bodě. Toto pravidlo pro funkce dvou a více proměnných obecně neplatí, např.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } xy = 0 \\ 0 & \text{pro } xy \neq 0 \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ parciální derivace $f'_x(0, 0) = 0 = f'_y(0, 0)$, ale funkce v tomto bodě není spojitá.

Příklad 7.2. Určete parciální derivace funkce $f(x, y, z) = x^y \ln(x + z^2)$.

$$f'_x = yx^{y-1} \ln(x + z) + x^y \frac{1}{x + z^2}, \quad f'_y = x^y \ln x \ln(x + z^2), \quad f'_z = x^y \frac{2z}{x + z^2}.$$

Věta 7.3 (o střední hodnotě)**.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má obě parciální derivace ve všech bodech množiny $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \subseteq D(f)$. Pak existují čísla $\xi \in (a_1, b_1)$, $\eta \in (a_2, b_2)$ taková, že*

$$f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = f'_x(\xi, a_2)(b_1 - a_1) + f'_y(b_1, \eta)(b_2 - a_2).$$

Důkaz. S využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci jedné proměnné (viz věta 16.2 v SA1) dostaneme $f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2) - f(b_1, a_2) + f(b_1, a_2) - f(a_1, a_2) = f'_y(b_1, \eta)(b_2 - a_2) + f'_x(\xi, a_2)(b_1 - a_1)$. □

Definice 7.4 (druhých parciálních derivací)**.** Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má obě parciální derivace na otevřené množině $M \subseteq D(f)$ a $[x_0, y_0] \in M$. Existuje-li parciální derivace funkce f'_x podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazveme tuto derivaci *druhou parciální derivací (nebo parciální derivací 2. řádu) funkce f podle x v bodě* $[x_0, y_0]$ a značíme $f''_{xx}(x_0, y_0)$, nebo $f_{xx}(x_0, y_0)$, nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. Existuje-li parciální derivace funkce f'_x podle y v bodě $[x_0, y_0]$, nazveme tuto derivaci *druhou smíšenou parciální derivací funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značíme $f''_{xy}(x_0, y_0)$, nebo $f_{xy}(x_0, y_0)$, nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$. Analogicky pro derivace funkce f'_y.

Poznámka. a) Podobně bychom definovali druhé parciální derivace funkce tří a více proměnných, jejich počet je n^2, kde n je počet proměnných.

b) Parciální derivace m-tého řádu ($m \geq 3$) definujeme jako parciální derivace derivací $(m - 1)$-tého řádu. Jejich počet je n^m (variace s opakováním).

Příklad 7.5. Určete všechny druhé parciální derivace funkce $f(x, y) = \sin \frac{x}{y}$.

Řešení. $f'_x = \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}$, $f'_y = \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2}$, $f''_{xx} = -\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y^2}$, $f''_{xy} = -\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^3} + \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{-1}{y^2}$, $f''_{yx} = -\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^3} + \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{-1}{y^2}$, $f''_{yy} = -\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{x^2}{y^4} + \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{2x}{y^3}$. Vidíme, že smíšené derivace f''_{xx} a f''_{yy} se rovnají, to není náhoda, ale také to nenastane úplně vždy, viz následující věta.

Věta 7.6 (Schwarzova)**.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} na okolí bodu $[x_0, y_0]$, které jsou v bodě $[x_0, y_0]$ spojité. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Důkaz. Dle předpokladu existuje δ-okolí $O_\delta([x_0, y_0]) = (x_0-\delta, x_0+\delta)\times(y_0-\delta, y_0+\delta)$, v němž jsou parciální derivace f''_{xy} a f''_{xy} definovány (a tedy zde musí být definovány i f'_x, f'_y a sama funkce f). Pro $0 < h < \delta$ položme

$$F(h) = \frac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)}{h^2}$$

a označme $\varphi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$, $\psi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$. Pak funkci F můžeme psát

$$F(h) = \frac{1}{h^2}[\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0)] = \frac{1}{h^2}[\psi(x_0+h) - \psi(x_0)]. \qquad (*)$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\xi_1 \in (0, 1)$ takové, že

$$\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0) = h\varphi'(y_0+\xi_1 h) = h[f'_y(x_0+h, y_0+\xi_1 h) - f'_y(x_0, y_0+\xi_1 h)].$$

Označme ještě $g(x) = f'_y(x, y_0+\xi_1 h)$. Pak $g'(x) = f''_{yx}(x, y_0+\xi_1 h)$ a rozdíl v hranaté závorce je (opět podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě)

$$g(x_0+h) - g(x_0) = hg'(x_0+\xi_2 h) = hf''_{yx}(x_0+\xi_2 h, y_0+\xi_1 h), \quad \xi_2 \in (0, 1).$$

Dosadíme-li odtud do $(*)$, dostáváme $F(h) = f''_{yx}(x_0+\xi_2 h, y_0+\xi_1 h)$. Provedeme-li stejné úvahy pro funkci ψ, dostaneme rovnost

$$F(h) = f''_{xy}(x_0+\xi_3 h, y_0+\xi_4 h), \quad \xi_3, \xi_4 \in (0, 1).$$

Poslední vztahy a spojitost f''_{xy}, f''_{yx} v bodě $[x_0, y_0]$ implikují

$$\lim_{h\to 0} F(h) = f''_{xy}(x_0, y_0) \quad \text{a současně} \quad \lim_{h\to 0} F(h) = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

tj. $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. □

Poznámka. Bez předpokladu spojitosti rovnost smíšených derivací obecně neplatí, např. pro funkci f definovanou

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

dostaneme $f''_{xy}(0, 0) = 0$ a $f''_{yx}(0, 0) = 1$ (smíšené derivace na okolí bodu $[0, 0]$ existují, ale nejsou v bodě $[0, 0]$ spojité).

Důsledek 7.7. *Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojité parciální až do druhého řádu na otevřené množině $M \subseteq D(f)$, pak jsou zde smíšené derivace záměnné, tj. $f''_{xy} = f''_{yx}$ $\forall [x, y] \in M$.*

Poznámka. Tvrzení platí i pro smíšené derivace funkce tří a více proměnných a matematickou indukcí jej můžeme rozšířit i pro derivace vyšších řádů: Má-li funkce f spojité parciální derivace až do řádu m na otevřené množině $M \subseteq D(f)$, pak hodnota parciální derivace řádu m v libovolném bodě z množiny M závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle i-té proměnné ($i = 1, 2, \dots, n$), nikoliv na pořadí, v jakém se derivovalo. Považujeme-li smíšené derivace za totožné, pak se počet parciálních derivací redukuje na $\binom{n+m-1}{m}$ (kombinace s opakováním).

Definice 7.8 (směrové derivace)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce, $[x_0, y_0]$ je vnitřní bod množiny $D(f)$ a $\vec{s} = (s_1, s_2)$ je vektor v $\mathbb{R}^2$. Položme $\varphi(t) = f(x_0+ts_1, y_0+ts_2)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě 0, nazýváme ji *směrovou derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru vektoru $\vec{s}$* a označujeme $f'_{\vec{s}}(x_0, y_0)$ nebo $f_{\vec{s}}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0)$. To znamená, že

$$f'_{\vec{s}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+ts_1, y_0+ts_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Poznámka. a) Analogicky bychom zavedli směrovou derivaci pro funkci tří a více proměnných.

b) Někdy se v definici navíc požaduje, aby směrový vektor $\vec{s}$ byl jednotkový, tj. $|\vec{s}| = 1$. Směrovou derivaci pak lze interpretovat, viz obrázek na přednášce.

c) Jelikož je směrová derivace obyčejnou derivací funkce φ, platí pro počítání tato pravidla: Nechť existují $f'_{\vec{s}}$, $g'_{\vec{s}}$ v bodě $X \in \mathbb{R}^n$. Potom

(i) pro $\forall c \in \mathbb{R}$ existuje $f'_{c\vec{s}}(X)$ a platí $f'_{c\vec{s}}(X) = cf'_{\vec{s}}(X)$,
(ii) $(f \pm g)'_{\vec{s}}(X) = f'_{\vec{s}}(X) \pm g'_{\vec{s}}(X)$,
(iii) $(fg)'_{\vec{s}}(X) = f'_{\vec{s}}(X)g(X) + f(X)g'_{\vec{s}}(X)$,
(iv) je-li $g(X) \neq 0$, pak $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_{\vec{s}}(X) = \dfrac{f'_{\vec{s}}(X)g(X) - f(X)g'_{\vec{s}}(X)}{g^2(X)}$.

d) Naopak neplatí aditivita směrových derivací vzhledem ke směrům. Jestliže existují $f'_{\vec{r}}$, $f'_{\vec{s}}$, nemusí existovat $f'_{\vec{r}+\vec{s}}$ a pokud existuje $f'_{\vec{r}+\vec{s}}$, může být $f'_{\vec{r}+\vec{s}} \neq f'_{\vec{r}} + f'_{\vec{s}}$ (tato vlastnost platí v případě, kdy je alespoň jedna z $f'_{\vec{r}}$, $f'_{\vec{s}}$ spojitá na nějakém okolí bodu X).

e) Parciální derivace lze považovat za směrové derivace ve směrech vektorů standardní báze $\mathbb{R}^n$, tj. $f'_{x_i} = f'_{\vec{e}_i}$.

f) Z existence směrové derivace v bodě ve směru libovolného vektoru neplyne spojitost funkce v tomto bodě.

Příklad 7.9. Spočítejte směrovou derivaci $f(x, y, z) = x^2 + yz$ v bodě $[1, 2, -1]$ ve směru vektoru $\vec{s} = (-1, 1, 2)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(1-t, 2+t, -1+2t) = (1-t)^2 + (2+t)(-1+2t) = 1 - 2t + t^2 - 2 + 4t - t + 2t^2 \\ &= -1 + t + 3t^2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(t) = 1 + 6t \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(0) = 1.\end{aligned}$$

Definice 7.10 (gradientu funkce)**.** Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce a $X_0 \in D(f)$. Nechť pro $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ existuje $f'_{x_i}(X_0)$. Pak vektor $\operatorname{grad} f(X_0) = (f'_{x_1}(X_0), f'_{x_2}(X_0), \ldots, f'_{x_n}(X_0))$ se nazývá *gradient funkce f v bodě X_0*. Existují-li parciální derivace na množině $M \subseteq D(f)$, pak vektorovou funkci $\operatorname{grad} f = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n})$ nazveme *gradientem funkce f* (jedná se tedy o zobrazení M do $\mathbb{R}^n$).

Poznámka. a) Namísto $\operatorname{grad} f$ se používá též značení ∇f (operátor „nabla").

b) Později ukážeme, že jsou-li všechny parciální derivace funkce f spojité v bodě X_0, pak směrová derivace v tomto bodě existuje pro libovolný směrový vektor a platí $f'_{\vec{s}}(X_0) = \operatorname{grad} f(X_0) \cdot \vec{s}$ (standardní skalární součin). Platí $\operatorname{grad} f \cdot \vec{s} = |\operatorname{grad} f(X_0)| \cdot |\vec{s}| \cos\alpha$, kde α je úhel, který tyto dva vektory svírají. Odtud plyne, že hodnota směrové derivace bude největší, je-li $\cos\alpha = 1$, tj. $\alpha = 0$, tj. oba vektory mají stejný směr. Geometricky lze tedy gradient interpretovat jako směr, ve kterém je přírůstek funkční hodnoty funkce f největší.