1. Nakreslete definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   a) $f(x, y) = \dfrac{x-2}{\sqrt{y - \frac{x}{3}}}$,
   b) $f(x, y) = \ln(y^2 - 9x + 1)$,
   c) $f(x, y) = \arccos \dfrac{x-1}{y}$.

2. Nakreslete definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;
   b) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;
   c) $f(x, y) = \frac{5x-7}{2x^2+3y^2-12}$;
   d) $f(x, y) = \frac{x^2-2y}{y^2-2x}$;
   e) $f(x, y) = \frac{2}{x^2-y^2-1}$;
   f) $f(x, y) = \operatorname{cotg}(x + y)$;
   g) $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$;
   h) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-x}}$;
   i) $f(x, y) = \ln(x + y)$;
   j) $f(x, y) = \arcsin(x - y)$;
   k) $f(x, y) = \arccos(1 - x^2 - y^2)$;
   l) $f(x, y) = \frac{10x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$;
   m) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$;
   n) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$;
   o) $f(x, y) = \sqrt{\sin(y - x)}$;
   p) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 9}$;
   q) $f(x, y) = \ln(x \ln(y - x))$;
   r) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$;
   s) $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$;
   t) $f(x, y) = \ln(xy)$;
   u) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;
   v) $f(x, y) = \arcsin \frac{y-1}{x}$;
   w) $f(x, y) = \ln x - \ln \sin y$.

   Řešení příkladu 2 je formou náčrtků na 3 nascanovaných listech papíru, viz odkazy „scan a)-h)“, „scan i)-p)“, „scan q)-w)“.

3. Metodou řezů určete graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$,
   b) $f(x, y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$,
   c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 3$.

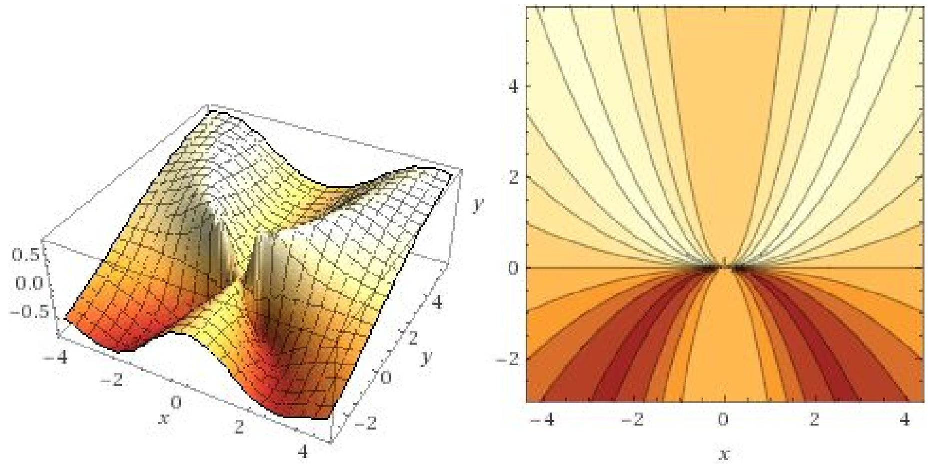
4. Metodou řezů, nebo pomocí sofwaru Maple, nebo softwaru WolframAlpha určete graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   a) $f(x, y) = x$;
   b) $f(x, y) = |x|$;
   c) $f(x, y) = 1 - x - y$;
   d) $f(x, y) = x - y$;
   e) $f(x, y) = x + y$;
   f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
   g) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;
   h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$;
   i) $f(x, y) = x^2 + y^2$;
   j) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

5. Načtněte jednotlivá tělesa zadaná nerovnostmi, slovy popište těleso T, které vznikne jako průnik všech nerovností.
   a) $T: \quad x^2 + y^2 \le 4,\ z \ge 7 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z \le 10,\ y \ge \frac{\sqrt{3}}{3}x$,
   b) $T: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ y \ge |x|$,
   c) $T: \quad z \ge \sqrt{x^2 + y^2} - 4,\ z \le 6 - x^2 - y^2,\ y \le \sqrt{3}x$.

6. Definujte pojem limita $a \in \mathbb{R}^*$ funkce f v bodě $X_0 = [x_0, y_0]$, kde X_0 je hromadným bodem $D(f)$.

7. Co můžete říct o existenci limity $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{4x^2y}{x^4+6y^2}$ na základě výpočtu:
   a) metodou svazku přímek,
   b) metodou svazku parabol,
   c) transformací do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

   Řešení příkladu 7:
   a) Pomocí svazku přímek $y = kx$ vychází 0, tedy o existenci limity nelze rozhodnout.
   b) Pomocí svazku parabol $y = ky^2$ vychází $\frac{4k}{1+6k^2}$, tedy výsledek závisí na parametru k, a proto zadaná limita neexistuje. To, že výsledek závisí na parametru k paraboly je dobře vidět i na obrázku „vrstevnic“ zadané plochy $f(x, y) = \frac{4x^2y}{x^4+6y^2}$, které vidíme na obrázku 1 vpravo. Z obrázku je možné usoudit, že blížíme-li se k bodu $[0, 0]$ po konkrétní parabole, tak se pohybujeme ve stále stejné vzdálenosti od roviny xy, a tedy hodnota vypočtená limitou odpovídá pro konkrétní parabolu konkrétní hodnotě. Tedy pro různé paraboly vychází různá hodnota a limita tudíž neexistuje.

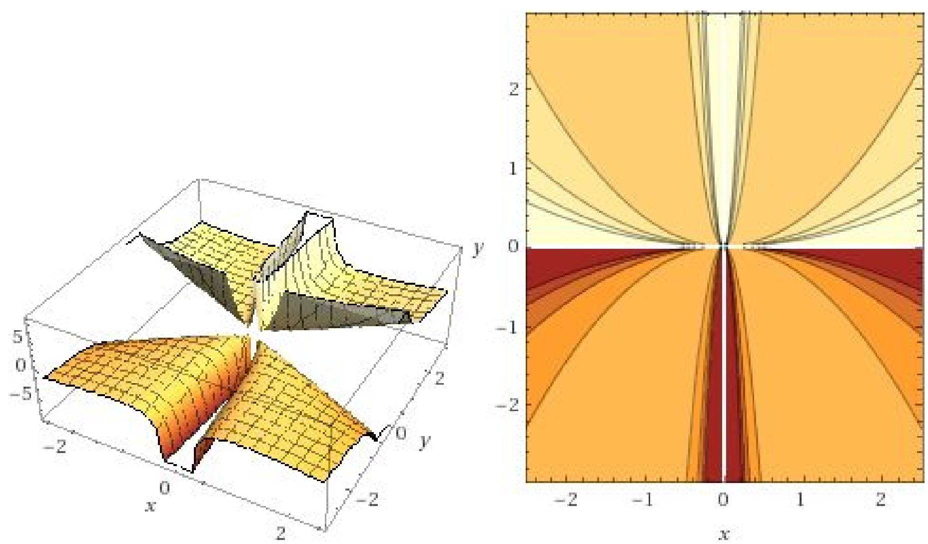


Obrázek 1: Vlevo je graf plochy $f(x,y)=\frac{4x^2y}{x^4+6y^2}$ z příkladu 7, vpravo je zobrazení vrstevnic

c) Pro $r\to 0^+$ vychází 0, tedy o existenci limity nelze rozhodnout. I kdybychom předpokládali, že limitou je číslo 0, tak se nám nepodaří zadanou funkci rozdělit na součin $g(r)\cdot h(\varphi)$, tudíž k rozhodnutí není možné použít ani větu 6.7 (viz text přednášky z SA2).

8. Co můžete říct o existenci limity $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{5x^4+y^2}{7x^2y}$ na základě výpočtu:

a) metodou svazku přímek,
b) metodou svazku parabol.



Obrázek 2: Vlevo je graf plochy $f(x,y)=\frac{5x^4+y^2}{7x^2y}$ z příkladu 8, vpravo je zobrazení vrstevnic

Řešení příkladu 8:

a) Pomocí svazku přímek $y=kx$ vychází $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]}\frac{5x^4+y^2}{7x^2y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^4+(kx)^2}{7x^2\cdot k\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2+k^2}{7kx}=\left[\frac{0+k^2}{0^+\text{ nebo }0^-}\right].$
Tedy pro $x\to 0^+$ vychází $+\infty$ a pro $x\to 0^-$ vychází $-\infty$ a limita tudíž neexistuje.

b) Pomocí svazku parabol $y=ky^2$ vychází $\frac{5+k^2}{7k}$, tedy výsledek závisí na parametru k, a proto zadaná limita neexistuje. To, že výsledek závisí na parametru k paraboly je dobře vidět i na obrázku „vrstevnic“ zadané plochy $f(x,y)=\frac{5x^4+y^2}{7x^2y}$, které vidíme na obrázku 2 vpravo. Z obrázku je možné usoudit, že blížíme-li se k bodu $[0,0]$ po konkrétní parabole, tak se pohybujeme ve stále stejné vzdálenosti od roviny xy, a tedy hodnota vypočtená limitou odpovídá pro konkrétní parabolu konkrétní hodnotě. Tedy pro různé paraboly vychází různá hodnota a limita tudíž neexistuje.

9. Vypočtěte $\lim\limits_{[x,y]\to[2,0]} f(x,y)$, kde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \in \mathbb{R} \setminus \{[0,0],[2,0]\}, \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [2,0]. \end{cases}$

   Výsledkem příkladu 9 je číslo $\frac{1}{2}$.

10. Co můžete říct o existenci limity $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}$ na základě výpočtu:

    a) metodou svazku přímek,
    b) transformací do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

    Řešení příkladu 10:
    a) Pomocí svazku přímek $y = kx$ vychází 0, tedy o existenci limity nelze rozhodnout.
    b) Vychází $\cos\varphi\sin\varphi$, tedy výsledek závisí na parametru φ, a proto limita neexistuje.

11. Dokažte, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0$.

    Řešení příkladu 11:
    Pomocí transformace do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ se podaří zadanou funkci zapsat jako součin $g(r) \cdot h(\varphi)$, kde $g(r) \to 0$ a $h(\varphi)$ je ohraničená.

12. Dokažte, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,1]} \frac{x^2+(y-1)^2y}{x^2+(y-1)^2} = 1$.

    Řešení příkladu 12: Pomocí transformace do posunutých polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = 1 + r\sin\varphi$ se podaří zadanou funkci zapsat jako součet $1 + g(r) \cdot h(\varphi)$, kde $g(r) \to 0$ a $h(\varphi)$ je ohraničená.

13. Dokažte, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} = 1$.

    Řešení příkladu 13: Platí $f^g = \mathrm{e}^{g\cdot\ln f}$, dále použijeme transformaci do polárních souřadnic.

14. Vypočtěte limitu. Pokud limita neexistuje, tak to dokažte.

    a) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,0]} \frac{x+y+1}{x+y+3}$,

    b) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,

    c) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x-2y}{3x+y}$,

    d) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$,

    e) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$,

    f) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

    Řešení příkladu 14:
    a) Přímo dosadíme a vyjde $\frac{1}{2}$.
    b) Rozšíříme zlomek, vykrátíme a vyjde 2.
    c) Limita neexistuje, rozhodnou např. postupné limity.
    d) Limita neexistuje, rozhodne např. svazek přímek.
    e) Jde o součin výrazu $x + y$, který jde k nule a ohraničených funkcí, tedy vyjde 0.
    f) Limita neexistuje, rozhodne např. svazek přímek, nebo polární souřadnice.

15. Spočtete následující limity.

    a) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,0]} \dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

    b) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy+3x-3y}$,

c) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$,

d) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$,

e) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$,

f) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$,

g) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin(6x^2+6y^2)}{2(x^2+y^2)}$,

h) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} (1+xy)^{\frac{1}{xy}}$,

i) $\lim\limits_{[x,y]\to[3,-2]} (1+2x+3y)^{\frac{1}{2x+3y}}$.

Řešení příkladu 15:
a) Přímo dosadíme a vyjde $\ln 2$.
b) Ve jmenovateli vytkneme $x-y$, vykrátíme s čitatelem a vyjde $\frac{4}{5}$.
c) Zlomek vhodně rozšíříme, vykrátíme a vyjde 12.
d) 1. způsob řešení:
Využijeme odhad výrazu $(x^2+y^2)^2$. Platí $(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4 \leq x^4+y^4 \leq 2(x^4+y^4)$, tedy $\dfrac{1}{2(x^4+y^4)} \leq \dfrac{1}{x^4+y^4}$, odkud $\dfrac{1}{(x^4+y^4)} \leq \dfrac{2}{x^4+y^4}$. Potom platí $0 \leq \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \leq \dfrac{1}{x^2+y^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.
Zavedeme substituci $x^2+y^2=t$ a vypočteme limitu funkce na pravé straně nerovnosti. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^2+y^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{2}{t}\mathrm{e}^{\frac{-1}{t^2}}$. Zavedeme substituci $\frac{1}{t^2}=v$, potom $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{2}{t}\mathrm{e}^{\frac{-1}{t^2}} = \lim\limits_{v\to\infty} 2v\mathrm{e}^{-v} = 2\lim\limits_{v\to\infty} \frac{v}{\mathrm{e}^v} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 2\lim\limits_{v\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^v} = 2\cdot 0 = 0$. Tedy podle věty o třech limitách platí $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0$.
2. způsob řešení:
Využijeme odhad $\mathrm{e}^t > \frac{t^3}{6}$, který platí pro $\forall t>0$, protože podle Taylorovy věty platí $\mathrm{e}^t = \underbrace{1+t+\dfrac{t^2}{2}}_{>0} + \dfrac{t^3}{3} + \underbrace{\dfrac{\mathrm{e}^{\vartheta}t}{4}t^4}_{>0 \text{ pro } t>0}$, kde $\vartheta \in (0,1)$. Odtud $6\mathrm{e}^t > t^3$, tedy $\frac{1}{\mathrm{e}^t} < \frac{6}{t^3}$. Platí tedy $0 \leq \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \leq \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \dfrac{6}{\frac{1}{(x^2+y^2)^3}} = 6\dfrac{(x^2+y^2)^3}{x^4+y^4} = 6\dfrac{x^{+}3x^4y^2+3x^2y^4+y^6}{x^4+y^4} = 6\left(x^2\dfrac{x^4}{x^4+y^4} + 3y^2\dfrac{x^4}{x^4+y^4} + 3x^2\dfrac{y^4}{x^4+y^4} + y^2\dfrac{y^4}{x^4+y^4}\right)$.
$\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} 6\left(x^2\frac{x^4}{x^4+y^4} + 3y^2\frac{x^4}{x^4+y^4} + 3x^2\frac{y^4}{x^4+y^4} + y^2\frac{y^4}{x^4+y^4}\right) = |\text{ohr.}\cdot 0| = 0$. Podle věty o třech limitách pak platí $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0$.
e) 0.
f) Při výpočtu budeme potřebovat odhad $|\sin t| \leq |t|$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$ a větu o třech limitách. Protože $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \leq \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|$ pro $\forall [x,y] \neq [0,0]$, zaměříme se nejprve na odhad $\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|$ a určení limity tohoto výrazu. Zřejmě platí $0 \leq \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|$ a také díky úvodnímu odhadu i $\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|$. Pomocí převodu do polárních souřadnic určíme, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$, tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$ a podle věty o třech limitách platí, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| = 0$ a tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$.
g) 3.
h) e.
i) e.

16. Spočtěte následující limity.
    a) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,5]} \dfrac{\sin x \cdot y}{x}$,
    b) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$,
    c) $\lim\limits_{[x,y]\to[\infty,\infty]} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$,
    d) $\lim\limits_{[x,y]\to[\infty,\infty]} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

    Řešení příkladu 16:
    a) Platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$, dosadíme a vyjde 5.
    b) Vyjde 1. Využijeme $f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$ a řešení je možné převodem do polárních souřadnic.
    c) Vyjde 0. Myšlenka řešení je vidět, pokud (jen kvůli další úvaze) dosadíme $y = x$, pak zřejmě $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{2})^{x^2} = 0$, protože $|\frac{1}{2}| < 1$. Je tedy potřeba dokázat, že $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| < 1$. To, že je zadaná limita rovna jedné se dá také dokázat po transformaci $x = 1/u$ a $y = 1/v$ převodem do polárních souřadnic a výpočtem pro $r \to 0^+$.
    d) 0.

17. Rozhodněte o spojitosti funkce v bodě $[0,0]$.

    a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

    b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ \frac{1}{2} & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

    c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

    d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

    Řešení příkladu 17:
    a) Fce f je nespojitá, protože limita v bodě $[0,0]$ neexistuje, o čemž rozhodne např. svazek parabol.
    b) Fce f je spojitá. Limita se vypočte přímo po rozšíření výrazem $\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}$ a vyjde $\frac{1}{2}$.
    c) Fce f je spojitá. Limitu vypočteme převedením do polárních souřadnic.
    d) Fce f je nespojitá, protože limita neexistuje, o čemž rozhodne například svazek přímek.

Zdroje:
DĚMIDOVIČ, Boris Pavlovič. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Přeložil Miroslav ROZLOŽNÍK, přeložil Miroslav TŮMA. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.
KADEŘÁBEK, Zdeněk. Limity funkcí více proměnných. Brno, 2007. Bakalářská práce. PřF MU Brno. Vedoucí práce doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.,
dostupné na http://www.karlin.mff.cuni.cz/ kuncova/kalkulus1/Limity_funkci_vice_promennych.pdf.
TOMICA, Rudolf. Cvičení z matematiky: určeno pro posl. fak. strojní, stavební a elektrotechn. Praha: SNTL, 1968. Učební texty vysokých škol.