11 Implicitní funkce

Definice 11.1 (implicitní funkce)**.** Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce a $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je takový bod, že $F(x_0, y_0) = 0$. Řekneme, že *funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové že, pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $F(x, f(x)) = 0$ a graf funkce f prochází bodem $[x_0, y_0]$ (tj. $y_0 = f(x_0)$).

Příklad 11.2. a) Rovnice $3x - y + 2 = 0$ představuje implicitní vyjádření jediné funkce $y = 3x + 2$; b) rovnice $x^2 + y^2 = 1$ představuje dvojici funkcí $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; c) rovnice $xy - |xy| = 0$ určuje nekonečně mnoho funkcí $y = f(x)$ s grafem ležícím v prvním nebo třetím kvadrantu.

Věta 11.3 (o existenci implicitní funkce)**.** *Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na otevřeném čtverci*

$$R = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - a, y_0 + a)$$

pro nějaké $a > 0$ (tj. na okolí $O_a([x_0, y_0])$ v metrice ρ_∞) a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Dále předpokládejme, že F má na tomto čtverci parciální derivaci F'_y, která je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ a platí $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna spojitá funkce $y = f(x)$ procházející bodem $[x_0, y_0]$.

Důkaz. Na $\mathbb{R}^2$ uvažujme metriku ρ_∞ a položme $d = F'_y(x_0, y_0)$. Podle předpokladu je $d \neq 0$. Protože F'_y je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ a existuje na R, k $|d|/2$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro $[x, y] \in O_\varepsilon(x_0, y_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ je $|F'_y(x, y) - d| < |d|/2$, tj. $|1 - d^{-1} F'_y(x_0, y_0)| < 1/2$. Označme

$$Q = \{g \in C(\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle) : g(x_0) = y_0,\ |g(x) - y_0| < \varepsilon \quad \forall x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle\}.$$

Pro $g \in Q$ tedy platí $g(x_0) = y_0$, $F(x_0, g(x_0)) = F(x_0, y_0) = 0$. Protože g i F jsou spojité, k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in \langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1\rangle$ platí

$$\left| g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d} - y_0 \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ a $P = Q \cap C(\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle)$. Množina P tedy obsahuje funkce z Q, jejichž definiční obor je zúžen na $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Definujme zobrazení $T : P \to C(\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle)$ předpisem

$$T(g)(x) = g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d}. \tag{$*$}$$

Je-li funkce f pevným bodem zobrazení T, pak $f(x) = f(x) - d^{-1} F(x, f(x))$ pro $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, tj. $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, tj. f je spojitá funkce, která je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ implicitně zadána rovnicí $F(x, y) = 0$. Existenci jediné funkce f této vlastnosti dokážeme pomocí Banachovy věty o pevném bodu. Na P uvažujme metriku stejnoměrné konvergence ρ_C. Pak $T(g)(x_0) = g(x_0) - d^{-1} F(x_0, g(x_0)) = y_0$ pro $g \in P$ a díky ($*$) také $|T(g)(x) - y_0| < \varepsilon$ pro $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, tj. $T(g) \in P$. S využitím věty o střední hodnotě dostaneme

$$\begin{aligned}
\rho_C(T(g), T(h)) &= \max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |T(g)(x) - T(h)(x)| = \max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} \left| g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d} - h(x) + \frac{F(x, h(x))}{d} \right| \\
&= \max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} \left| g(x) - h(x) - \frac{F'_y(x, \xi)(g(x) - h(x))}{d} \right| \\
&= \max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |g(x) - h(x)| \left| 1 - \frac{F'_y(x, \xi)}{d} \right|,
\end{aligned}$$

kde bod ξ leží mezi hodnotami $g(x)$ a $h(x)$, $g, h \in P$, tedy $\xi \in O_\varepsilon(x_0, y_0)$. Podle ($*$) tedy je

$$\rho_C(T(g), T(h)) \leq \frac{1}{2} \max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |g(x) - h(x)| = \frac{1}{2} \rho_C(g, h),$$

což znamená, že T je kontrakce na P. □

Poznámka. a) Vedle spojité funkce může existovat i další nespojitá funkce, např. rovnice $y(y - 1) = 0$ určuje na okolí bodu $[0, 0]$ spojitou funkci $y(x) = 0$, ale kromě ní také např. nespojitou funkci

$$y_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases} \qquad \text{nebo funkci} \quad y_2(x) = \chi(x).$$

b) Podmínka $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ je postačující pro existenci implicitní funkce, nikoliv nutnou, např. rovnice $x - y^3 = 0$ určuje v okolí bodu $[0, 0]$ funkci $y = \sqrt[3]{x}$, ale přitom $F'_y(0, 0) = 0$.

Věta 11.4 (o derivaci implicitní funkce)**.** *Nechť jsou splněny předpoklady věty 11.3 a F má na čtverci R spojité parciální derivace. Pak má funkce f, která je implicitně určena v okolí bodu $[x_0, y_0]$ rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci v bodě x_0 a platí*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Důkaz. Podle věty 11.3 existuje číslo $\delta > 0$ takové, že na $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ existuje jediná spojitá funkce f daná implicitně rovnici $F(x, y) = 0$ a splňující $y_0 = f(x_0)$. Z důkazu věty 11.3 také plyne, že $F'_y(x, f(x)) \neq 0$ pro každé $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Vezměme libovolné dva různé body $x, x_1 \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Pak platí $F(x, f(x)) = 0$ a $F(x_1, f(x_1) = 0$. Označme $y_1 = f(x_1)$. Protože F je diferencovatelná v bodě $[x_1, y_1]$ (existuje okolí bodu $[x_1, y_1]$, na kterém jsou dle předpokladu spojité obě parciální derivace), platí

$$\underbrace{F(x, f(x))}_{=0} - \underbrace{F(x_1, y_1)}_{=0} = \mathrm{d}F(x_1, y_1; x - x_1, f(x) - y_1) + \sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1),$$

kde $\tau(h, k) \to 0$ pro $[h, k] \to [0, 0]$. Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}F(x_1, y_1; x - x_1, f(x) - y_1) + \sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y1)^2}\, \tau(x - x_1, f(x) - f(x_1)) \\
&= \mathrm{d}F(x_1, y_1; x - x_1, f(x) - y_1) + \sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1) \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}} \\
&= \mathrm{d}F(x_1, y_1; x - x_1, f(x) - y_1) + \frac{(x - x_1)^2}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1) \\
&\qquad + \frac{(f(x) - y_1)^2}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - f(x_1))^2}}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1).
\end{aligned}$$

Uvážíme-li, že $\mathrm{d}F(x_1, y_1; x - x_1, f(x) - y_1) = F'_x(x_1, y_1)(x - x_1) + F'_y(x_1, y_1)(f(x) - y_1)$, pak po vydělení rozdílem $x - x_1$ dostaneme

$$\begin{aligned}
0 &= F'_x(x_1, y_1) + F'_y(x_1, y_1) \frac{f(x) - y_1}{x - x_1} + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1) \\
&\qquad + \frac{f(x) - y_1}{x - x_1} \cdot \frac{f(x) - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1) \\
&= F'_x(x_1, y_1) + F'_y(x_1, y_1) \frac{f(x) - y_1}{x - x_1} \left(1 + \frac{f(x) - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1)\right) \\
&\qquad + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1).
\end{aligned}$$

Funkce f je spojitá v bodě x_1 (tj. platí $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1) = y_1$), a tedy $\tau(x - x_1, f(x) - y_1) \to 0$ pro $x \to x_1$. Oba členy obsahující odmocninu ve jmenovateli jsou v absolutní hodnotě ohraničené jedničkou, a proto také

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_1} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1) = 0, \\
&\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}}\, \tau(x - x_1, f(x) - y_1) = 0.
\end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $x \to x_1$ tedy celkově dostáváme

$$0 = F'_x(x_1, y_1) + F'_y(x_1, y_1) \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad \text{neboli} \quad f'(x_1) = -\frac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}.$$

Protože bod x_1 byl v intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ volen libovolně, můžeme za něj volit bod x_0. Dokázali jsme tedy, že derivace $f'(x_0)$ existuje a je dána vzorcem věty. □

Poznámka. a) Samotný vzorec pro výpočet derivace si není potřeba pamatovat, lze jej snadno formálně odvodit z pravidla pro derivování složené funkce:

$$F(x, f(x)) = 0 \;/'_x \quad \Longrightarrow \quad F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Dosadíme-li $x = x_0$, tak s využitím $y_0 = f(x_0)$ dostaneme vzorec tvrzení.

b) Z důkazu je zřejmé, že derivace existuje nejenom v bodě $[x_0, y_0]$, ale na celém $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a je zde spojitá.

Příklad 11.5. Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Funkce $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ je má parciální derivace $F'_x(x, y) = 3x^2 - 2y$, $F'_y(x, y) = 3y^2 - 2x$, které jsou spojité na libovolném (čtvercovém) okolí bodu $[1, 1]$ (sama funkce F tedy musí být také spojitá v každém bodě uvažovaného okolí, protože je zde diferencovatelná). Protože navíc $F'_y(1, 1) = 1 \neq 0$, jsou splněny všechny předpoklady věty 11.3, a tedy v okolí bodu $[1, 1]$ existuje implicitní funkce $y = f(x)$, která má v bodě $x_0 = 1$ derivaci, přičemž

$$f'(1) = -\frac{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = -1.$$

Rovnice tečny funkce f v bodě x_0 je dána vzorcem $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, viz SA1. Po dosazení tedy dostáváme $y = 1 - (x - 1)$, tj. hledaná tečna má rovnici $x + y - 2 = 0$. Normála je potom kolmá na tečnu, snadno napíšeme její parametrické vyjádření $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Eliminací parametru t pak dostaneme rovnici normály $x - y = 0$.

Poznámka. a) Z příkladu je zřejmé, že rovnice tečny v bodě $[x_0, y_0]$ ke grafu funkce $y = f(x)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ má tvar $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

b) Jsou-li splněny předpoklady věty 11.3 a F má navíc na R spojité druhé parciální derivace, pak funkce $y = f(x)$, která je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ dána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ má v bodě x_0 druhou derivaci a platí

$$y''(x_0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)(F'_y(x_0, y_0))^2 - 2F''_{xy}(x_0, y_0)F'_x(x_0, y_0)F'_y(x_0, y_0) + F''_{yy}(x_0, y_0)(F'_x(x_0, y_0))^2}{(F'_y(x_0, y_0))^3}.$$

Jak je to ve vyšší dimenzi?

Definice 11.6 (implicitní funkce dvou proměnných)**.** Nechť $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je funkce, $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^3$ je takový bod, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Řekneme, že *funkce $z = f(x, y)$ je v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové že pro $[x, y] \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ je $F(x, y, f(x, y)) = 0$ a graf funkce f prochází bodem $[x_0, y_0, z_0]$.

Věta 11.7 (o implicitní funkci dvou proměnných a jejích parciálních derivacích)**.** *Nechť $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na krychli $K = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - a, y_0 + a) \times (z_0 - a, z_0 + a)$ pro nějaké $a > 0$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a má zde derivaci F'_z, která je spojitá v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, přičemž $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pak existuje číslo $\delta > 0$ a jediná spojitá funkce $z = f(x, y)$, která je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ dána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Jsou-li navíc na krychli K spojité parciální derivace F'_x, F'_y a F'_z, pak funkce $z = f(x, y)$ má parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ a platí*

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Poznámka. Z předchozí definice a věty je již zřejmé, jak by vypadalo rozšíření na případ implicitní funkce tří a více proměnných.

Definice 11.8 (m-funkce)**.** Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_m$ jsou funkce n proměnných takové, že $D(f_1) \cap D(f_2) \cap \cdots \cap D(f_m) \neq \emptyset$. Pak zobrazení $\mathscr{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dané předpisem

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] \xrightarrow{\mathscr{F}} [f_1(x_1, x_2 \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2 \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2 \ldots, x_n)]$$

nazveme *m-funkcí n proměnných*. Funkce $f_1, f_2, \ldots, f_m$ nazýváme *složky $\mathscr{F}$*, množina $D(\mathscr{F}) := \bigcap_{i=1}^m D(f_i)$ se nazývá *definiční obor* m-funkce $\mathscr{F}$.

Poznámka. a) Interpretujeme-li obraz bodu $X \in \mathbb{R}^n$ jako vektor v $\mathbb{R}^m$, pak m-funkci nazýváme také *vektorovou funkcí* a je-li $m = n$, tak *vektorovým polem*.

b) Lze snadno ukázat, že $\mathscr{F}$ je spojitá v bodě $X_0 \in \mathbb{R}^n \iff$ všechny funkce $f_1, \ldots, f_m$ jsou v tomto bodě spojité.

Definice 11.9 (diferencovatelnosti m-funkce)**.** Řekneme, že m-funkce $\mathscr{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $X_0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže každá z funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_m$ je diferencovatelná v tomto bodě. Zobrazení $\mathrm{d}\mathscr{F}(X_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dané předpisem

$$[h_1, h_2, \ldots, h_n] \mapsto [\mathrm{d}f_1(X_0), \mathrm{d}f_2(X_0), \ldots, \mathrm{d}f_m(X_0)]$$

se nazývá *totální diferenciál m-funkce $\mathscr{F}$ v bodě X_0*. m-funkce $\mathscr{F}$ se nazývá *diferencovatelná na $M \subseteq D(\mathscr{F})$*, je-li diferencovatelná v každém bodě z M.

Poznámka. Totální diferenciál $\mathrm{d}\mathscr{F}(X_0)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ určené maticí

$$\mathscr{F}'(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (X_0),$$

tj. platí

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d} f_1(X_0) \\ \mathrm{d} f_2(X_0) \\ \vdots \\ \mathrm{d} f_m(X_0) \end{pmatrix} = \mathscr{F}'(X_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathscr{F}'(X_0)$ se nazývá *Jacobiova*[5] *matice m-funkce $\mathscr{F}$ v bodě X_0*. Je-li $n = m$, pak se determinant Jacobiovy matice m-funkce $\mathscr{F}$ v bodě X_0 nazývá *Jacobián*, budeme značit $J_{\mathscr{F}}(X_0)$ nebo stručně $J(X_0)$.

Věta 11.10 (o Jacobiově matici složeného zobrazení)**.** *Nechť $\mathscr{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je m-funkce diferencovatelná v bodě $X_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\mathscr{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ je p-funkce diferencovatelná v bodě $Y_0 = \mathscr{G}(X_0) \in \mathbb{R}^m$. Pak složené zobrazení $\mathscr{H} = \mathscr{F} \circ \mathscr{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ je p-funkce diferencovatelná v bodě X_0 a pro její Jacobiovu matici platí*

$$\underbrace{\mathscr{H}'(X_0)}_{p\times n} = \underbrace{\mathscr{F}'(Y_0)}_{p\times m} \underbrace{\mathscr{G}'(X_0)}_{m\times n}.$$

Důkaz. Podle definice p-funkce $\mathscr{H}$ máme

$$h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_i(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

a podle věty 9.1 platí

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial g_k}\big(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pro $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, n$. □

Věta 11.11 (o lokální inverzi)**.** *Nechť $\mathscr{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelná n-funkce na nějaké otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ obsahující bod X_0 a $\mathscr{F}'(X_0)$ je regulární (tj. $\det(\mathscr{F}'(X_0)) \neq 0$). Pak existuje okolí $O(X_0)$, v němž je $\mathscr{F}$ prostá, a tedy existuje inverzní n-funkce $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{F}(O(X_0)) \to \mathbb{R}^n$. Tato inverze je spojitě diferencovatelná na $\mathscr{F}(O(X_0))$ a v bodě $Y_0 = \mathscr{F}(X_0)$ pro její Jacobiovu matici platí*

$$(\mathscr{F}^{-1})'(Y_0) = (\mathscr{F}'(X_0))^{-1} \quad \textit{a odtud} \quad J_{\mathscr{F}^{-1}}(Y_0) = \frac{1}{J_{\mathscr{F}}(X_0)}.$$

Poznámka. a) Předpoklady a závěry věty lze mírně modifikovat. Je známo vícero důkazů (jsou poměrně náročné), obvykle jsou založeny na Banachově větě o pevném bodu (případně její modifikaci). Intuitivně, pokud $\mathscr{F}(X_0) = Y_0$, tak podle Taylorovy věty na $O(X_0)$ platí

$$\mathscr{F}(X) \approx Y_0 + \mathrm{d}\mathscr{F}(X_0; X - X_0).$$

Lineární zobrazení na pravé straně přibližné rovnosti je prosté, právě když je Jacobiova matice $\mathscr{F}'(X_0)$ regulární. Lze se domnívat, že prostá bude na daném okolí i samotná n-funkce $\mathscr{F}$.

Jacobiova matice identického zobrazení $\mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je jednotková matice E. Podle věty 11.10 pak platí $E = (\mathscr{F}^{-1})'(\mathscr{F}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)) \cdot \mathscr{F}'(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Odtud dostaneme vzorec pro Jacobiovu matice inverze.

b) Věta vlastně říká, za jakých okolností lze ze soustavy $\mathscr{F}(X) = Y$ získat jednoznačné řešení X v závislosti na Y, musíme se ovšem pohybovat „blízko“ bodů X_0 a Y_0.

Uvažujme nyní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0, \end{aligned} \tag{$*$}$$

m-funkci

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{$**$}$$

[5] Carl Gustav Jacob Jacobi 1804–1851, Němec

bod $[X_0, Y_0] = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0] \in \mathbb{R}^{n+m}$, který vyhovuje soustavě $(*)$ a nechť $\delta > 0$. Řekneme, že m-funkce $(**)$ je dána na okolí $O_\delta(X_0)$ implicitně soustavou $(*)$, jestliže pro každé $X \in O_\delta(X_0)$ platí

$$\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= 0,\\
g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= 0,\\
&\vdots\\
g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= 0.
\end{aligned}$$

Věta 11.12 (o existenci implicitní m-funkce a její Jacobiově matici)**.** *Nechť $\mathscr{G} = [g_1, g_2, \dots, g_m] : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ je spojitá m-funkce v okolí $O_a([X_0, Y_0])$ pro nějaké $a > 0$ (okolí bereme opět v metrice ρ_∞), přičemž bod $[X_0, Y_0]$ vyhovuje soustavě $\mathscr{G}(X, Y) = O = [0, 0, \dots, 0]$ (tj. soustavě $(*)$), a nechť všechny prvky matice*

$$\mathscr{G}'_Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

existují v $O_a([X_0, Y_0])$, jsou spojité v bodě $[X_0, Y_0]$ a platí $\det(\mathscr{G}'_Y(X_0, Y_0)) \neq 0$. Pak existuje okolí $O_\delta(X_0) \subseteq \mathbb{R}^n$, na kterém je soustavou $\mathscr{G}(X, Y) = O = [0, 0, \dots, 0]$ implicitně dána jediná spojitá m-funkce

$$Y = \mathscr{F}(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X)]$$

(tj. m-funkce ve tvaru $(**)$). Jsou-li navíc spojité všechny prvky matice

$$\mathscr{G}'_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

a všechny prvky matice G'_Y v $O_a([X_0, Y_0])$, pak $\mathscr{F}$ je diferencovatelná v X_0 a pro její Jacobiovu matici platí

$$\mathscr{F}'(X_0) = -(\mathscr{G}'_Y(X_0, Y_0))^{-1} \mathscr{G}'_X(X_0, Y_0).$$

Idea důkazu. Označíme-li $d = \det(\mathscr{G}'_y(X_0, Y_0))$ a budeme-li s maticemi $\mathscr{G}'_y$ a $\mathscr{G}'_x$ manipulovat stejně jako s derivacemi F'_y a F'_x v důkazu věty 11.3, tak zjistíme, že tento důkaz lze přepsat i pro maticový případ. □

Poznámka. První část věty vlastně říká, za jakých podmínek lze ze soustavy $(*)$ vyjádřit m-tici $(**)$ (pokud to jde, tak to ještě neznamená, že je to početně jednoduché).

Příklad 11.13. Najděte bod, v jehož okolí vyjadřuje soustava $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 2$, $xu + yv + \mathrm{e}^{uv} = 0$ implicitně 2-funkci $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ a určete její Jacobiovu matici v tomto bodě.

Řešení. Dosazením ověříme, že soustavě vyhovuje např. bod $[x_0, y_0, u_0, v_0] = [-1, 0, 1, 0]$. Dále máme

$$\mathscr{G}'_{[x,y]} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ u & v \end{pmatrix}, \quad \mathscr{G}'_{[u,v]} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ x + v\,\mathrm{e}^{uv} & y + u\,\mathrm{e}^{uv} \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathscr{G}'_{[u,v]}) = 2uy + 2u^2\,\mathrm{e}^{uv} - 2xv - 2v^2\,\mathrm{e}^{uv}.$$

Odtud

$$(\mathscr{G}'_{[u,v]})^{-1} = \frac{1}{2uy + 2u^2\,\mathrm{e}^{uv} - 2xv - 2v^2\,\mathrm{e}^{uv}} \begin{pmatrix} y + u\,\mathrm{e}^{uv} & -2v \\ -x - v\,\mathrm{e}^{uv} & 2u \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{F}' = \frac{-1}{2uy + 2u^2\,\mathrm{e}^{uv} - 2xv - 2v^2\,\mathrm{e}^{uv}} \begin{pmatrix} 2xy + 2xu\,\mathrm{e}^{uv} - 2uv & 2y^2 + 2yu\,\mathrm{e}^{uv} - 2v^2 \\ -2x^2 - 2xv\,\mathrm{e}^{uv} + 2u^2 & -2xy - 2yv\,\mathrm{e}^{uv} + 2uv \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\mathscr{F}'(1, 0) = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$