# 12 Vázané extrémy

**Definice 12.1** (lokálního extrému vzhledem k množině)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce a $M \subseteq D(f)$ je nějaká neprázdná množina. Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $X_0 \in M$ *lokální minimum* (resp. *maximum*) *vzhledem k množině* $M$, jestliže existuje okolí $O(X_0)$ takové, že pro $X \in M \cap O(X_0)$ platí $f(X_0) \leq f(X)$ (resp. $f(X_0) \geq f(X)$). Jsou-li nerovnosti pro $X \neq X_0$ ostré, mluvíme o *ostrých lokálních extrémech vzhledem k* $M$.

V této kapitole budeme uvažovat případ, kdy množina $M$ je zadána soustavou

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \qquad \text{kde } 1 \leq m < n. \end{aligned} \tag{$\triangle$}$$

V tomto případě se místo termínu lokální extrém vzhledem k $M$ používá termínu *lokální extrém vázaný podmínkami* ($\triangle$) nebo stručně *vázaný lokální extrém*.

**Věta 12.2** (metoda Lagrangeových multiplikátorů, nutná podmínka pro existenci vázaného lokálního extrému)**.** *Nechť funkce $f, g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leq m < n)$ mají spojité parciální derivace v otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě množiny $U$ má Jacobiova matice $\mathscr{G}'$ $m$-funkce $\mathscr{G} = [g_1, g_2, \ldots, g_m]$ hodnost $m$. Dále, nechť $M \subseteq U$ je množina všech bodů $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, které vyhovují rovnicím ($\triangle$). Má-li $f$ v bodě $X_0 \in M$ vázaný lokální extrém, pak existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (Lagrangeovy multiplikátory) tak, že jsou splněny rovnosti*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(X_0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{$\heartsuit$}$$

*Důkaz.* Větu lze dokázat vícero způsoby, jeden z nich využívá větu o lokální inverzi (viz věta 11.11). Zde si pro jednoduchost ukážeme důkaz pro $n = 2$ a $m = 1$ (tj. uvažujeme funkci $f = f(x, y)$ dvou proměnných s jednou vazebnou podmínkou $g(x, y) = 0$).

Nechť jsou tedy splněny předpoklady věty a $f$ má v bodě $[x_0, y_0]$ vázaný lokální extrém. Pak $g(x_0, y_0) = 0$. Protože hodnost $h(g'_x, g'_y) = 1$ (matice je zde typu $1 \times 2$, tj. řádkový vektor) na nějaké množině $U$ obsahující bod $[x_0, y_0]$, nemůže být zároveň $g'_x(x_0, y_0) = 0$ a $g'_y(x_0, y_0) = 0$. Nechť např. $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak jsou splněny předpoklady vět o existenci implicitní funkce a o její derivaci, tj. existuje funkce $y = \varphi(x)$ taková, že $y_0 = \varphi(x_0)$ a

$$\varphi'(x_0) = -\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}.$$

Úlohu o vázaném extrému převedeme na na úlohu o (volném) lokálním extrému funkce $h(x) = f(x, \varphi(x))$. Podle věty o derivování složené funkce platí

$$h'(x_0) = f'_x(x_0, \varphi(x_0)) \cdot 1 + f'_y(x_0, \varphi(x_0))\, \varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\, \frac{-g'_x(x, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)} = 0.$$

Pro $[x, y] \in U$ splňující $g(x, y) = 0$ je $\mathrm{d}g = g'_x h + g'_y k = 0$, a tedy i $g'_x(x_0, y_0)h + g'_y(x_0, y_0)k = 0$. Odtud pro $h \neq 0$

$$-\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)} = \frac{k}{h}.$$

Po dosazení této rovnosti do vyjádření pro $h'(x_0)$ dostaneme vynásobením $h$ rovnost

$$f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = 0$$

K této rovnici nyní přičtěme výše uvedenou rovnost $g'_x(x_0, y_0)h + g'_y(x_0, y_0)k = 0$ vynásobenou parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$. Tím dostáváme novou rovnost ve tvaru

$$\big(f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0)\big)\, h + \big(f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0)\big)\, k = 0.$$

Zvolme $\lambda$ tak, aby $f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0$ (to jistě lze, neboť jsme předpokládali, že $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$). Pak ale také musí být $f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0$, protože $h$ je libovolné. Jinak řečeno, existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$, což jsme chtěli ukázat. □

**Definice 12.3** (stacionárního bodu funkce na $M$)**.** Bod $X_0 \in M$, pro který existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tak, že platí ($\heartsuit$), se nazývá *stacionární bod funkce* $f$ *na* $M$.

*Poznámka.* Věta 12.2 vlastně dává návod, jak stacionární body nalézt. Sestrojí se Lagrangeova funkce

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Položíme-li její gradient roven nulovému vektoru, dostaneme právě vztahy (♡).

**Věta 12.4** (postačující podmínky pro existenci vázaného lokálního extrému)**.** *Nechť $S$ je stacionární bod funkce $f$ na $M$, $\Lambda_S = [\lambda_1^S, \lambda_2^S, \dots, \lambda_m^S]$ jsou Lagrangeovy multiplikátory příslušné bodu $S$, funkce $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ mají spojité druhé parciální derivace v bodě $S$ a nějakém jeho okolí a Jacobiova matice $\mathscr{G}'(S)$ má hodnost $m$. Je-li* $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$

(i) *pozitivně definitní, pak v $S$ je ostré vázané lokální minimum.*

(ii) *negativně definitní, pak v $S$ je ostré vázané lokální maximum.*

*Důkaz.* Předpoklady věty jsou takové, že pozitivní definitnost $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ zaručuje existenci (volného) lokálního minima Lagrangeovy funkce $L$ v bodě $S$ při pevném $\Lambda = \Lambda_S$, tj. existuje okolí $O(S)$, na kterém platí

$$L(S, \Lambda_S) < L(X, \Lambda_S), \quad \text{tj. } f(S) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^S g_k(S) < f(X) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^S g_k(X) \implies f(S) < f(X) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^S g_k(X).$$

Uvedená nerovnost platí i pro body $X$ z množiny $M$, na které je $g_k(X) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$ a tedy pro tyto body platí $F(S) < F(X)$. To však znamená, že funkce má v $S$ ostré lokální minimum vázané podmínkami (△). Analogicky by se ukázalo pro maximum. □

*Poznámka.* a) Protože diferenciál součtu je součet diferenciálů, platí $\mathrm{d}^2 L = \mathrm{d}^2 f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathrm{d}^2 g_k$. Stejně tak pro Hessovu matici diferenciálu $\mathrm{d}^2 L$ platí $H_L = H_f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k H_{g_k}$.

b) Pozor, je-li $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ indefinitní, tak to (na rozdíl od volných lokálních extrémů) neznamená, že v $S$ není vázaný lokální extrém. Pro existenci vázaných lokálních extrémů stačí, když $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ je PDF nebo NDF pro všechny vektory $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ kolmé k vektorům $\nabla g_k(S)$, $k = 1, 2, \dots, m$). Je-li tedy $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ indefinitní, lze dále postupovat takto: Ze soustavy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_1(S) &= 0, \\ \mathrm{d}g_2(S) &= 0, \\ &\vdots \\ \mathrm{d}g_m(S) &= 0, \end{aligned}$$

tj. ze soustavy

$$\mathscr{G}'(S) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

lze jednoznačně vyjádřit $m$ přírůstků $h_i$ (protože $\mathscr{G}'(S)$ má hodnost $m$) jako lineární formy zbývajících přírůstků (lineární forma $n$-proměnných je funkce typu $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$). Dosazením takto vyjádřených přírůstků do $\mathrm{d}^2 L(S, \Lambda_S)$ dostaneme novou kvadratickou formu $n - m$ proměnných, označme ji např. $\Phi$. Potom platí: Je-li $\Phi$

a) pozitivně definitní, pak v $S$ je ostré vázané lokální minimum,

b) negativně definitní, pak v $S$ je ostré vázané lokální maximum,

c) indefinitní, pak v $S$ nenastává vázaný lokální extrém.

**Příklad 12.5.** Vyšetřete vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy$ vzhledem k množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.

*Řešení.* 1. způsob: Vazebnou podmínku pišme ve tvaru $x + y - 1 = 0$ (máme tedy $g(x, y) = x + y - 1$). Lagrangeova funkce má tvar $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Položíme-li parciální derivace podle všech proměnných rovny nule, dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} L'_x &= y + \lambda = 0, \\ L'_y &= x + \lambda = 0, \\ L'_\lambda &= x + y - 1 = 0, \end{aligned}$$

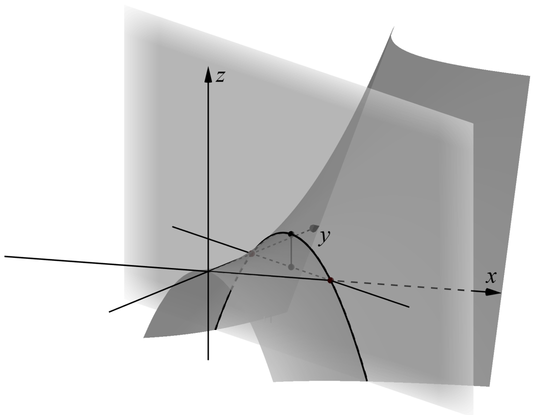
jejímž jediným řešením je $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ a $\lambda = -\frac{1}{2}$ (z první rovnice se vyjádří $y$, z druhé $x$ a dosadí se do třetí). Máme tedy jeden stacionární bod $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a k němu příslušný multiplikátor $\lambda_S = -\frac{1}{2}$.

Dále, $f''_{xx} = 0$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 0$, $g',xx = g''_{xy} = g''_{yy} = 0$, což dává Hessovu matici

$$H_L(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria je $\mathrm{d}^2 L(S)$ indefinitní kvadratická forma, což podle poznámky nad příkladem znamená, že zatím nelze rozhodnout. Vyjádřeme tedy z rovnice $\mathrm{d}g(S) = h + k = 0$ např. proměnnou $k$, tj. $k = -h$. Dosadíme-li toto vyjádření do $\mathrm{d}^2 L(S)$, dostáváme novou formu $\Phi(h) = -2h^2$ (s přihlédnutím k $H_L(S)$ je $\mathrm{d}^2 L(S) = 2hk$). Platí $\Phi(h) < 0$ pro každé $h \neq 0$, tj. forma $\Phi$ je negativně definitní a v $S$ je ostré vázané lokální maximum, viz obrázek 7.

2. způsob: Příklad lze vyřešit podstatně jednodušeji převodem na lokální extrém funkce jedné proměnné. Z vazebné podmínky vyjádříme jednu z proměnných, např. $y = 1 - x$ a zavedeme novou funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem $\varphi(x) = f(x, 1 - x)$ (jedná se o stejný obrat, který jsme používali již u vyšetřování limit funkce dvou proměnných nad svazkem přímek). Platí $\varphi(x) = x(1 - x) = x - x^2$ a z rovnice $\varphi'(x) = 1 - 2x = 0$ dostaneme jediný stacionární bod $x_s = \frac{1}{2}$. Zřejmě je $\varphi''(x_s) = -2 < 0$, a proto má funkce $\varphi$ v bodě $x_s$ ostré lokální maximum. To znamená, že funkce $f$ má v bodě $[x_s, y_s] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (druhou složku dostaneme z vazebné podmínky, tj. $y_s = 1 - x_1 = \frac{1}{2}$) ostré vázané maximum.



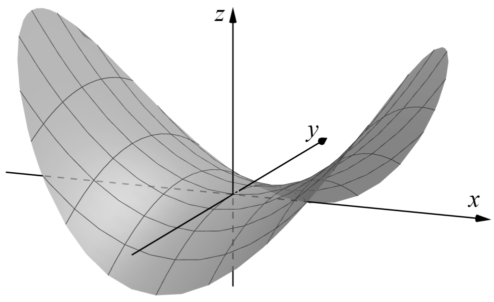

Obrázek 7: Ostré vázané lokální maximum funkce $f(x, y)$ nad přímkou $x + y = 1$ nastává v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

*Poznámka.* Druhý způsob v předchozím příkladě skutečně vede výrazně rychleji k cíli, je ale potřeba si uvědomit, že jej lze použít pouze v případě, kdy můžeme snadno vyjádřit z vazebných podmínek $m$-tici proměnných v závislosti na zbývajících. To nemusí být vůbec jednoduché, metoda se tedy uplatňuje spíše v případě funkce dvou proměnných s jednou vazebnou podmínkou.

**Příklad 12.6.** Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = 3x^2 - y^2$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

*Řešení.* Předně si uvědomme, že $M$ je kompaktní množina v $\mathbb{R}^2$ (tj. ohraničená a uzavřená), a protože $f$ je na $M$ spojitá, podle věty 5.4 (která je jinou formulací Weierstrassových vět) musí globální maximum i minimum na $M$ existovat. Podle poznámky na konci kapitoly 10 pak globální extrém nastane buď v bodě lokálního extrému, nebo na hranici (v případě kompaktní množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hranice do této množiny patří). Stačí tedy vyšetřit stacionární ležící uvnitř $M$ (jinde lokální extrém nastat nemůže, protože $f$ má na $M$ obě parciální derivace) a stacionární body na hranici $\partial M$ (zde se jedná o problém vázaných extrémů funkce $f$ vzhledem k hraniční množině). Není přitom ani potřeba zjišťovat, zda lokální (vázaný lokální) extrém ve stacionárním bodě nastává, stačí si poznamenat funkční hodnotu funkce $f$ v takovém bodě a nakonec se podívat, ve kterém bodě je funkční hodnota největší, resp. nejmenší.

Ze soustavy $f'_x = 6x = 0$, $f'_y = -2y = 0$ dostáváme stacionární bod $[0, 0]$ (ten leží uvnitř zadané množiny), přičemž $f(0, 0) = 0$. Podívejme se dále na situaci na hranici. Kružnici $x^2 + y^2 = 4$ lze vyjádřit parametricky jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Úlohu o vázaném extrému převedeme na úlohu o volném lokálním extrému funkce $\varphi(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 12\cos^2 t - 4\sin^2 t$. Máme $\varphi'(t) = -24\cos t \sin t - 8\sin t \cos t = -32\sin t \cos t = -16\sin 2t$. Stacionární body tedy obdržíme z rovnice $-16\sin 2t = 0$, neboli $\sin 2t = 0$. Řešením uvnitř intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ jsou body $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$, $t_3 = \frac{3\pi}{2}$. Tyto hodnoty parametru $t$ odpovídají postupně bodům $S_1 = [0, 2]$, $S_2 = [-2, 0]$, $S_3 = [0, -2]$ a krajní body intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ pak odpovídají bodu $S_4 = [2, 0]$. Odpovídající funkční hodnoty jsou $f(0, 2) = f(0, -2) = -9$, $f(2, 0) = f(-2, 0) = 12$. Na základě úvahy na začátku příkladu tedy lze usoudit, že globální maximum nastává nad osou $x$ v bodech $[-2, 0]$ a $[2, 0]$ (jeho hodnota je 12) a globální minimum nad osou $y$ v bodech $[0, -2]$ a $[0, 2]$ (jeho hodnota je $-9$). Tyto extrémy nejsou ostré. Graf funkce nad kruhem $M$ je na obrázku 8.




Obrázek 8: Graf funkce $f(x, y) = 3x^2 - y^2$ nad uzavřeným kruhem $x^2 + y^2 \leq 4$. Globální maxima jsou ve dvou bodech nad osou $x$ a globální minima ve dvou bodech nad osou $y$

# 13 Dvojný integrál

Motivace: Riemannův integrál byl zaveden tak, aby pro kladnou spojitou funkci na $\langle a, b\rangle$ odpovídal obsahu obrazce ohraničeného grafem funkce, osou $x$ a přímkami $x = a$, $x = b$. Dvojný integrál zavedeme analogicky, tj. tak, aby v případě kladné spojité funkce na dvourozměrném intervalu $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ odpovídal objemu tělesa ohraničeného grafem funkce a rovinami $z = 0, x = a, x = b, y = c$ a $y = d$. Vycházíme z funkce ohraničené na dvojrozměrném uzavřeném intervalu $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ (tj. na uzavřeném obdélníku), kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

Pro libovolné dělení $D_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a libovolné dělení $D_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$ intervalu $\langle c, d\rangle$ definujeme dělení $D = (D_x, D_y)$ obdélníku $I$ jakožto systém uzavřených obdélníků $I_{ij} = \langle x_i - x_{i-1}\rangle \times \left\langle y_j - y_{j-1}\right\rangle$ (kde $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$) a jejich obsah označme

$$\lambda(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Symbolem $\mathscr{D}(I)$ označíme množinu všech dělení $D$ obdélníku $I$. Nyní pro každé $D \in \mathscr{D}(I)$ položme $m_{ij} := \inf\{f(x, y) : [x, y] \in I_{ij}\}$ a $M_{ij} := \sup\{f(x, y) : [x, y] \in I_{ij}\}$ a definujme dolní a horní součet příslušný funkci $f$ a dělení $D$ jako

$$s(D, f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\lambda(I_{ij}) \quad \text{a} \quad S(D, f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\lambda(I_{ij}),$$

a dolní a horní integrál funkce $f$ na intervalu $I$ jako

$$\iint_{\underline{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \sup\{s(D, f) : D \in \mathscr{D}(I)\} \quad \text{a} \quad \iint_{\overline{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \inf\{S(D, f) : D \in \mathscr{D}(I)\}.$$

**Definice 13.1** (dvojného Riemannova integrálu na obdélníku)**.** Řekneme, že funkce $f$ je *na intervalu $I$ (riemannovsky) integrovatelná*, platí-li

$$\iint_{\underline{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\overline{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tuto společnou hodnotu nazveme *dvojným (Riemannovým) integrálem funkce $f$ na intervalu $I$*.

*Poznámka.* a) V souladu s výkladem Riemannova integrálu funkce jedné proměnné, výše uvedený přístup je Darbouxův (originální Riemannova definice pracuje opět s integrálními součty příslušnými k funkci $f$, dělení $D$ a výběrem reprezentantů $\Xi$).

b) Protože je dvojný integrál zaveden analogicky jako u funkce jedné proměnné, lze očekávat, že i základní vlastnosti zůstanou zachovány. Zejména platí: jsou-li $f, g$ integrovatelné na obdélníku $I$, pak

1. $cf$ je integrovatelná na $I$ a platí $\iint_I cf(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
2. $|f|$ je integrovatelná na $I$ a platí $\left|\iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \iint_I |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
3. $f + g$ je integrovatelná na $I$ a platí $\iint_I [f(x, y) + g(x, y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_I g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
4. je-li $I = I_1 \cup I_2$, kde $I_1, I_2$ jsou obdélníky s $I_1^\circ \cap I_2^\circ = \emptyset$, pak $\iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{I_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{I_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**Příklad 13.2.** Přímo z definice lze spočítat, že a) $\iint_I 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda(I) = (b - a)(d - c)$, b) $\iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $f(x, y) = \chi(x)$, neexistuje, neboť

$$\iint_{\underline{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \quad \text{a} \quad \iint_{\overline{I}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

**Věta 13.3** (postačující podmínka pro existenci integrálu na obdélníku). *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá na uzavřeném obdélníku $I$, pak je na $I$ integrovatelná.*

*Důkaz.* Uzavřený obdélník $I$ je kompaktní množinou v $\mathbb{R}^2$, a protože $f$ je podle předpokladu spojitá funkce na $I$, tak podle věty 5.4 je $f(I)$ kompaktní množina v $\mathbb{R}$, tj. uzavřený interval v $\mathbb{R}$. Funkce $f$ je tedy na $I$ ohraničená, a tudíž má horní a dolní integrál. Je potřeba ukázat, že se rovnají.

Podle Heineho–Cantorovy věty (viz věta 5.7) je spojitá funkce na uzavřeném obdélníku stejnoměrně spojitá. To znamená, že vezmeme-li $\varepsilon > 0$ libovolné, pak k $\varepsilon/\lambda(I)$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné body $[x_1, y_2]$, $[x_2, y_2]$ z obdélníku $I$ splňující $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$, platí $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon/\lambda(I)$.

Buď nyní $D = (D_x, D_y) = \{I_{ij} : i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\}$ nějaké dělení, jehož norma je menší než $\delta$, tj. délka uhlopříčky libovolného obdélníku $I_{ij}$ v dělení je menší než $\delta$. Protože také všechny $I_{ij}$ jsou kompaktní a $f$ je na nich spojitá, nabývá na každém $I_{ij}$ svého (globálního) minima a maxima, tj. existují body $[\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*] \in I_{ij}$ a $[\xi_{ij}^{**}, \eta_{ij}^{**}] \in I_{ij}$ takové, že

$$
\begin{aligned}
u_{ij} &:= f(\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*) \le f(x, y) \quad \forall [x, y] \in I_{ij},\\
U_{ij} &:= f(\xi_{ij}^{**}, \eta_{ij}^{**}) \ge f(x, y) \quad \forall [x, y] \in I_{ij}.
\end{aligned}
$$

Zároveň platí

$$0 \le U_{ij} - u_{ij} < \frac{\varepsilon}{\lambda(I)}, \quad \text{protože} \quad \sqrt{(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}^{**})^2 + (\eta_{ij}^* - \eta_{ij}^{**})^2} < \delta.$$

Odtud máme

$$
\begin{aligned}
S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} U_{ij}\lambda(I_{ij}) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}\lambda(I_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (U_{ij} - u_{ij})\lambda(I_{ij})\\
&< \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{\lambda(I)}\lambda(I_{ij}) = \frac{\varepsilon}{\lambda(I)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda(I_{ij}) = \frac{\varepsilon}{\lambda(I)}\lambda(I) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ukázali jsme, že rozdíl horního a dolního součtu lze při vhodném dělení $D$ udělat libovolně malý (menší než $\varepsilon$), což je nutnou a postačující podmínkou pro integrovatelnost funkce na obdélníku $I$ (jedná se o analogii věty 21.10 z SA1). Tím je důkaz hotov. □

Praktický výpočet dvojného integrálu nám umožňuje následující tvrzení.

**Věta 13.4** (Fubiniova na obdélníku, Guido Fubini 1879–1943, Ital). *Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce integrovatelná na uzavřeném dvojrozměrném intervalu $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Je-li pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ funkce $y \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na $\langle c, d\rangle$, pak je na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná funkce $g(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ a platí*

$$\iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

*Je-li naopak pro každé $y \in \langle c, d\rangle$ na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná funkce $x \mapsto f(x, y)$, pak je na $\langle c, d\rangle$ integrovatelná funkce $h(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ a platí*

$$\iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y.$$

*Důkaz.* Pro libovolné dělení $D = (D_x, D_y)$ obdélníku $I$ máme

$$m_{ij} \le f(x, y) \le M_{ij} \qquad \forall [x, y] \in I_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, m$$

($m_{ij}$ a $M_{ij}$ mají stejný význam jako v úvodu této kapitoly). Protože dle předpokladu je $y \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na $\langle c, d\rangle$, je integrovatelná i na $\langle y_{i-1}, y_i\rangle$ (monotonie vzhledem k integračnímu oboru, viz věta 22.14 v SA1), a tedy musí platit

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,\mathrm{d}y \le M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \qquad \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(viz věta 22.4 v SA1). Sečtením přes $j = 1, 2, \dots, m$ dostaneme

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{m}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,\mathrm{d}y \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1}),$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \qquad \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\,, \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}. \qquad (\spadesuit)$$

kde na prostřední člen jsme aplikovali větu 22.13 z SA1 (aditivitu vzhledem k integračnímu oboru). Označme

$$g(x) := \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

a ukažme, že tato funkce je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$, tj. že $\int_{\overline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\underline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x$. Předně si všimněme, že $g$ je ohraničená na $\langle a,b\rangle$. To plyne ihned z faktu, že $f$ je integrovatelná na $I$, tj. musí zde být ohraničená, tj. platí

$$\underbrace{\inf_{[x,y]\in I} f(x,y)\int_c^d \mathrm{d}y}_{konst.} \le \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y}_{g(x)} \le \underbrace{\sup_{[x,y]\in I} f(x,y)\int_c^d \mathrm{d}y}_{KONST.} \qquad \forall x \in \langle a,b\rangle$$

Z ohraničenosti $g$ pak plyne, že výše uvedený spodní a horní integrál na $\langle a,b\rangle$ existují. Z nerovností ($\spadesuit$) dále plyne, že

$$\begin{aligned}\int_a^{\underline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{\underline{x_i}} g(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{\underline{x_i}} \Big(\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j-y_{j-1})\Big)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j-y_{j-1})\int_{x_{i-1}}^{\underline{x_i}} \mathrm{d}x\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\lambda(I_{ij}) = S(D,f)\end{aligned}$$

(první rovnost plyne opět z věty 22.13 v SA1). Analogicky bychom ukázali, že

$$s(D,f) \le \int_{\overline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Protože poslední dvě nerovnosti platí pro libovolné dělení $D \in \mathscr{D}(I)$, dostáváme odtud (spolu s vlastností suprema a infima)

$$\iint_{\underline{I}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \int_{\overline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^{\underline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x \le \iint_{\overline{I}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Protože podle předpokladu je $f$ integrovatelná, v posledním vztahu nastanou rovnosti, a tedy $g$ je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ přičemž

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro funkci $h$ by se ukázalo analogicky. □

*Poznámka.* a) Za předpokladů věty tedy nezáleží na pořadí integrace, v případě spojité funkce na $I$ jsou tyto předpoklady splněny automaticky. Může se však stát, že pořadí není rovnocenné z hlediska obtížnosti integrace, viz následující příklad.

b) Je-li $f(x,y) = g(x)h(y)$, kde $g,h$ jsou spojité, pak lze psát $\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$.

**Příklad 13.5.** Vypočítejte $\iint_I x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$.

*Řešení.* Integrovaná funkce je na $I$ spojitá, a tedy podle Fubiniovy věty integrovatelná, přičemž

$$\iint_I x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\Big(\int_1^2 x^y\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_0^1\left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_1^2\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Problém nyní je, že poslední integrál neumíme vyčíslit, neboť nelze určit primitivní k funkci integrované. Zkusme tedy opačný postup, kdy nejprve budeme integrovat vzhledem k $y$:

$$\iint_I x^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2\Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \int_1^2\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1-0}{y+1}\,\mathrm{d}y = \big[\ln(y+1)\big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

**Definice 13.6** (normální množiny)**.** Nechť $\varphi_1,\varphi_2$ jsou spojité funkce na $\langle a,b\rangle$ takové, že $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Množinu

$$M_1 := \{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

nazveme *normální množinou vzhledem k ose $x$*.

Podobně, jsou-li $\psi_1, \psi_2$ spojité funkce na $\langle c, d\rangle$ takové, že $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ pro $\forall y \in (c, d)$, pak množinu

$$M_2 := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

nazveme *normální množinou vzhledem k ose $y$*.

Množinu $M$ nazveme *normální*, je-li normální k alespoň jedné z os $x, y$.

**Definice 13.7** (dvojného integrálu na normální množině)**.** Nechť $M$ je normální množina, např. vzhledem k ose $x$, a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná a omezená na $M$. Zvolme $c, d \in \mathbb{R}$ tak, že $c \le \min\{\varphi_1(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$, $d \ge \max\{\varphi_2(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$. Rozšiřme definiční obor funkce $f$ na obdélník $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ tak, že položíme $f(x, y) = 0$ pro $\forall [x, y] \in I \setminus M$. Řekneme, že funkce $f$ je *(riemannovsky) integrovatelná* na $M$, jestliže je integrovatelná na $I$. V tomto případě klademe

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

*Poznámka.* a) Uvedená definice zřejmě nezávisí na volbě konstant $c, d$ (změnou těchto čísel se pouze zmenší nebo zvětší obdélník přes který integrujeme, ale pouze tam, kde je $f$ nulová). Lze tedy vždy volit $c = \min\{\varphi_1(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$, $d = \max\{\varphi_2(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$.

**Věta 13.8** (postačující podmínka pro existenci integrálu na normální množině)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na normální množině $M$. Pak je na $M$ integrovatelná.*

*Idea důkazu.* Základní myšlenka je stejná jako ve větě 13.3 (využíváme vlastnosti, kdy funkce spojitá na kompaktní množině je zároveň stejnoměrně spojitá), důkaz je pouze o něco technicky náročnější. □

**Věta 13.9** (Fubiniova na normální množině vzhledem k ose $x$)**.** *Nechť $M$ je normální množina vzhledem k ose $x$ a nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je integrovatelná na $M$. Je-li pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ integrovatelná funkce $x \mapsto f(x, y)$ na $\langle \varphi_1(x), \varphi_2(x)\rangle$, pak platí*

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

*Důkaz.* Nechť $c, d$ jsou takové, že $c \le \min\{\varphi(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$, $d \ge \max\{\psi(x) : x \in \langle a, b\rangle\}$ a $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Podle definice a Fubiniovy věty na obdélníku máme

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

Pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$ je však $\langle c, d\rangle = \langle c, \varphi_1(x)\rangle \cup \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x)\rangle \cup \langle \varphi_2(x), d\rangle$ a tedy

$$\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{\varphi_2(x)}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

protože pro $y \in \langle c, \varphi_1(x))$ i pro $y \in (\varphi_2(x), d\rangle$ je $f(x, y) = 0$. Dosazením vyjde tvrzení. □

*Poznámka.* Pro normální množinu vzhledem k ose $y$ by se vzorec modifikoval

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y.$$

**Příklad 13.10.** Vypočtěte $\displaystyle\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M$ je vymezena křivkami $y = 4x$, $x = 2$, $y = \dfrac{1}{x}$.

*Řešení.* Množina $M$ je normální množinou vzhledem k oběma osám, její vyjádření vzhledem k ose $x$ je $\frac{1}{2} \le x \le 2$, $\frac{1}{x} \le y \le 4x$. Integrand je spojitou funkcí na $M$, je zde tedy integrovatelný a podle Fubiniovy věty pak platí

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{1/2}^2 \Big(\int_{1/x}^{4x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \left[\frac{-x^2}{y}\right]_{1/x}^{4x} \mathrm{d}x$$
$$= \int_{1/2}^2 \Big(-\frac{x}{4} + x^3\Big)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{4}\right]_{1/2}^2 = -\frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{225}{64}.$$

**Příklad 13.11.** Určete hodnotu integrálu $\iint_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $M$ je trojúhelník o vrcholech $[0,0]$, $[1,1]$, $[2,0]$.

*Řešení.* Množina $M$ je opět normální množinou vzhledem k oběma osám, nyní je ale výhodnější ji vyjádřit vzhledem k ose $y$, což vede na nerovnosti $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2-y$. Podle Fubiniovy věty tedy platí

$$\begin{aligned}\iint_M xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \Big(\int_y^{2-y} xy \,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \big[x^2 y\big]_y^{2-y} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \big((2-y)^2 y - y^3\big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (2y - 2y^2)\,\mathrm{d}y = \left[y^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

*Poznámka.* Definici dvojného integrálu je dále možné rozšířit na případ tzv. regulární množiny, což je množina, kterou lze rozložit na konečný počet normálních množin, tj. platí $M = \bigcup_{i=1}^m M_i$, $M_i^\circ \cap M_j^\circ = \emptyset$, $\forall i, j, i \neq j$, kde $M_i$ jsou normální. Příkladem regulární množiny je množina $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. Potom klademe

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \sum_{i=1}^m \iint_{M_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$