Aplikace křivkového integrálu 1. druhu

a) $L(\Gamma) = \int_\Gamma 1 \mathrm{d}s$ ... délka křivky Γ;

b) $P(\Gamma) = \int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$ ... plošný obsah válcové plochy nad rovinnou křivkou Γ shora ukončený plochou $z = f(x,y)$;

c) $m(\Gamma) = \int_\Gamma \mu(x,y)\mathrm{d}s$ ... hmotnost rovinné křivky Γ s lineární (délkovou) hustotou $\mu(x,y)$.

d) $Q(\Gamma) = \int_\Gamma q(x,y)\mathrm{d}s$ ... celkový náboj křivky s nábojem $q(x,y)$

1. Zapište dvě libovolné parametrizace:
   (a) Úsečka AB, kde $A[-1,6]$, $B[2,-1]$.
   (b) Horní polovina kružnice $x^2 + y^2 = 16$.
   (c) Levá část elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$.
   (d) Parabola $y = -x^2 + 2$ pro $-1 \leq x \leq 2$.
   (e) Prostorová křivka splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $y = \sqrt{3}x$.

2. Spočtěte $\int_\Gamma (x+y)\mathrm{d}s$, kde Γ je obvod trojúhelníka ABC, $A[0,0]$, $B[0,2]$, $C[1,0]$. *[$\frac{3\sqrt{5}}{2}$]*

3. Spočtěte $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$. *[$\frac{13}{4}$]*

4. Spočtěte $\int_\Gamma (5 - x^2 + 3y^2 - 2xy)\mathrm{d}s$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\}$. *[$36\pi$]*

5. Spočtěte $\int_\Gamma \sqrt{2y^2 + z^2}\mathrm{d}s$, kde $\Gamma = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = y, x \leq 0, z \geq 0\right\}$. *[$2\pi$]*

6. Určete délku cykloidy, která je dána parametrickými rovnicemi $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$. *[8]*
   Nápověda: Vyjde $\mathrm{d}s = \sqrt{2 - 2\cos t}\mathrm{d}t$. Kvůli snadnější integraci je vhodné si tento výraz upravit do tvaru $\mathrm{d}s = \sqrt{2 - 2\cos t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\mathrm{d}t = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos t} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\mathrm{d}t = 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$.

7. Určete délku evolventy kružnice dané parametrickými rovnicemi $x = r(\cos t + t\sin t), y = r(\sin t - t\cos t), t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. *[$2\pi^2 r$]*

8. Určete délku jednoho závitu šroubovice, která je dána parametrickými rovnicemi $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t, z = \frac{3}{2\pi}t, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. *[$\sqrt{16\pi^2 + 9}$]*

9. Určete těžiště homogenní části kružnice se středem v počátku a poloměrem 4, pro $y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x$ a $y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x$. *[$\left[0, \frac{6\sqrt{3}}{\pi}\right]$]*

10. Určete těžiště horní poloviny kružnice $x^2 + y^2 = x$, jestliže její délková hustota je přímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku. *[$\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$]*

11. Určete statický moment $S_y = \int_\Gamma x\mu(x,y)\mathrm{d}s$ homogenní křivky Γ.
    a) $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 3y = 2x\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\right\}$. *[$\frac{100\sqrt{5}+4}{15}$]*
    b) Γ je část paraboly $y = \dfrac{x^2}{2}$, kde $x \in \langle -4, 2\rangle$. *[-19,6]*

12. Určete hmotnost části kružnice $x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0$, je-li její délková hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku. *[4]*

13. Spočtěte $\int_\Gamma z\mathrm{d}s$, kde $\Gamma = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y = 0, x \geq 0, z \geq 0\}$. *[1]*

    Nápověda: Jedna z možných parametrizací křivky Γ je např. $x = 1 \cdot \cos t$, $y = 0$, $z = 1 \cdot \sin t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. *[1]*

Aplikace křivkového integrálu 2. druhu

a) $A(\Gamma) = \int\limits_\Gamma \vec{f} \mathrm{d}\vec{s} \ldots$ práce, kterou vykoná síla $\vec{f} = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ podél orientované křivky Γ.

1. Spočtěte $\int\limits_\Gamma (y^2, -x^2)\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je úsečka s počátečním bodem $[0,1]$ a koncovým $[1,0]$. *[$\frac{2}{3}$]*

   a) Výpočet proveďte tak, že úsečku vezmete jako rovinnou křivku danou explicitně.
   b) Výpočet proveďte tak, že danou křivku parametrizujete.

2. Spočtěte $\int\limits_\Gamma -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\right\}$ je orientována tak, že bod $[2,0]$ je počátečním bodem. *[-2π]*

3. Spočtěte $\int\limits_\Gamma \left(x - \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, 1 \leq x \leq 2\right\}$, kde bod $[1,1]$ je počátečním bodem.

   [$\frac{14}{3} - \ln 4$]

4. Spočtěte $\int\limits_\Gamma (xy - y^2)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 4x, 0 \leq x \leq 1\right\}$, kde počáteční bod je $[1,2]$.

   [$-\frac{44}{15}$]

5. Spočtěte $\int\limits_\Gamma (2x+y^2, \sqrt{x})\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je část paraboly $x = y^2$ pro $x \in \langle 0,4\rangle$ a bod $[4,2]$ je počáteční. *[-4]*

6. Spočtěte $\int\limits_\Gamma y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$, kde $\Gamma = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0\right\}$ je orientována tak, že bod $[1,0]$ je počátečním bodem křivky. *[π]*

7. Spočtěte $\int\limits_\Gamma (x, y, x^2+y^2-z)\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je křivka daná parametrickými rovnicemi $x = \mathrm{e}^t \cos t$, $y = \mathrm{e}^t \sin t$, $z = \mathrm{e}^t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ a počáteční bod je bod $[1,0,1]$. *[$\frac{\mathrm{e}^{3\pi}}{3} - \frac{1}{3}$]*

8. Spočtěte $\int\limits_\Gamma x^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$, kde $\Gamma = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2, z = 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$ je orientována tak, že nad osou x je počáteční bod. *[$\frac{1}{6}$]*

9. Formulujte Greenovu větu pro normální množinu M vzhledem k ose x a její hranici ∂M. *[věta 18.7]*

10. Spočtěte $\int\limits_\Gamma y(x^2+1)\,\mathrm{d}x + x(y^2-1)\,\mathrm{d}y$, kde Γ je hranice oblasti $\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x \leq 0, y \geq 0\right\}$ a je orientována kladně, tj. proti směru oběhu hodinových ručiček. *[$-\frac{3}{2}\pi$]*

11. Spočtěte $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (xy-y^2)\,\mathrm{d}y$, kde Γ je hranice oblasti $\Omega = \left\{[x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 5\right\}$ a je orientována kladně. *[0]*

12. Spočtěte $\int\limits_\Gamma (1-x^2)y\,\mathrm{d}x + x(1+y^2)\,\mathrm{d}y$, kde Γ je kružnice $x^2+y^2 = R^2$, $R > 0$, která je orientovaná kladně.

    [$\frac{\pi R^4}{2}$]

    a) Výpočet proveďte bez použití Greenovy věty, tedy podle definice.
    b) Výpočet proveďte pomocí Greenovy věty.

13. Spočtěte $\int\limits_\Gamma (y^2, 2xy-2x+y)\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je hranice trojúhelníka ABC, kde $A[-2,2]$, $B[6,-2]$, $C[-2,6]$. *[32]*

14. Mějme homogenní magnetické pole vyplňující válcový objem o poloměru $R = 8,5$ cm, charakterizované změnou velikosti magnetického indukce $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 0,13\ \mathrm{T{\cdot}s^{-1}}$.

    a) Určete vztah pro velikost E intenzity indukovaného el. pole $\vec{E}$ v bodech o vzdálenosti r od osy mag. pole. *[$E(r) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2}$]*

Nápověda: Jde o příklad z HRW 2003, Elektřina a magnetismus, příklad 31.5, str. 809
Faradayův zákon říká $\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$*; víme, že velikost* E *je pro dané* r *konstantní; víme, že vektory* $\vec{E}$ *a* $\mathrm{d}\vec{s}$ *svírají úhel* $0°$*; víme, že mag. tok* $\Phi_B = \int_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S}$*; víme, že vektory* $\mathrm{d}\vec{S}$ *a* $\vec{B}$ *svírají úhel* $180°$*.*

b) Určete velikost E intenzity $\vec{E}$ pro $r = 5,2$ cm. *[*$E(2,5 \text{ cm}) = 0,00338 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$*]*

15. Formulujte postačující podmínku pro nezávislost integrálu na integrační cestě.

 a) V rovině. *[věta 18.12]*
 b) V prostoru. *[věta 18.12 modifikovaná ve smyslu poznámky b) za větou 18.12]*

16. Ověřte, zda je vektorové pole $\vec{f} = (x^2 - y^2, 5 - 2xy)$ potenciální (nebo také potenciálové nebo také konzervativní, tj. zda $\int_\Gamma \vec{f}\mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí na integrační cestě). Pokud ano, tak najděte jeho potenciál (nebo také kmenovou funkci) Φ a pomocí tohoto potenciálu spočtěte $\int_\Gamma \vec{f}\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je křivka s počátečním bodem $[0,0]$ a koncovým bodem $[1,2]$. *[*$6 + \frac{1}{3}$*]*

17. Ověřte, zda je vektorové pole $\vec{f} = (-5\cos y, 5x\sin y)$ potenciální. Pokud ano, tak najděte jeho potenciál Φ a pomocí tohoto potenciálu spočtěte $\int_\Gamma \vec{f}\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je křivka s počátečním bodem $[1,1]$ a koncovým bodem $[5,5]$.

18. Ověřte, zda je vektorové pole $\vec{f} = (\mathrm{e}^x\cos y + yz, xz - \mathrm{e}^x\sin y, xy + z)$ potenciální. Pokud ano, tak najděte jeho potenciál Φ a pomocí tohoto potenciálu spočtěte $\int_\Gamma \vec{f}\mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je křivka s počátečním bodem $[0,0,0]$ a koncovým bodem $[\frac{\pi}{2}, \pi, 2]$. *[*$-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \pi^2 + 1$*]*

19. Mějme homogenní elektrické pole popsané vektorovou veličinou $\vec{E} = (2,0)$ N$\cdot$ C^{-1}, kterou nazýváme intenzita elektrického pole. Toto pole pusobí na kladně nabitou testovací částici s nábojem Q_0 silou $\vec{F} = Q_0 \cdot \vec{E}$. Určete práci W $\left(\text{tj. } W = \int_\Gamma \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}\right)$, kterou tato síla $\vec{F}$ vykoná při přesunu částice Q_0 z bodu $A[-1,-1]$ do bodu $B[2,8]$. a) Po přímce, která body AB spojuje; *[6* Q_0 *J]*
 b) Po křivce $y = x^3$; *[6* Q_0 *J]*
 c) Zkuste popřemýšlet o souvislosti výsledku části a) a b) a vyslovte závěr, proč si myslíte, že to tak vyjít muselo.

 Nápověda: Zvažte, zda je dané elektrické pole konzervativní (nebo také potenciální) (tj. zda pro vektorovou funkci $\vec{F} = (f_1, f_2)$ *platí podmínka* **rot** $\vec{F} = \vec{o}$*, tzn. zda platí* $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$*)*

Zdroje:
HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Dotisk 1. českého vydání. Brno: VUTIUM, 2003. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 80-214-1868-0. (část 3 Elektřina a magnetismus)