Aplikace dvojného integrálu (kde $\sigma(x,y)$ je plošná hustota):

a) $S(M)=\iint\limits_M 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... obsah rovinného obrazce M.

b) $m(M)=\iint\limits_M \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... hmotnost rovinného obrazce M.

c) $P(M)=\iint\limits_M \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... plošný obsah části plochy $z=f(x,y)$ nad obrazcem M.

d) $S_x(M)=\iint\limits_M y\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... statický moment rovinného obrazce M vzhledem k ose x.

$S_y(M)=\iint\limits_M x\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... statický moment rovinného obrazce M vzhledem k ose y.

e) $T(M)=\left[\frac{S_y(M)}{m(M)},\frac{S_x(M)}{m(M)}\right]$ ... těžiště rovinného obrazce M

f) $I_x(M)=\iint\limits_M y^2\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... moment setrvačnosti rovinného obrazce M vzhledem k ose x.

$I_y(M)=\iint\limits_M x^2\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... moment setrvačnosti rovinného obrazce M vzhledem k ose y.

$I_z(M)=\iint\limits_M (x^2+y^2)\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... moment setrvačnosti rovinného obrazce M vzhledem k počátku.

g) $V(M)=\iint\limits_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ... objem kolmého válce nad rovinným obrazcem M, který je shora omezený plochou $z=f(x,y)$.

1. Zapište pouze meze pro výpočet dvojného integrálu $\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ a integrál nepočítejte:
   (a) $M: x=1, x=2, y=3, y=6.$
   (b) $M: x=1, x=2, y=2, y=-x+7.$
   (c) $M: y=x^2+1, y=x-1, 0\le x\le 1.$
   (d) $M: y^2=x, 1\le x\le 3.$
   (e) $M: y\le x^2, y\le -x+2, y\ge 0, x\ge 0.$
   (f) $M: y\ge x^2, y\le -x+2, x\ge 0.$
   (g) $M: y^2=x, y=x-2.$
   (h) $M: y\ge x, y\le 5-x^2, x\le 0.$
   (i) $M: y\le \mathrm{e}^x+1, -2\le x\le 1, y\ge -2.$
   (j) $M: x^2+y^2\le 4, y\ge\sqrt{3}x, y\ge 0.$
   (k) $M: x^2+y^2\le 1, y\ge |x|.$

   Poznámka: Některé integrály zkuste vyjádřit jak vzhledem k ose x a také vzhledem k ose y.

2. Spočtěte $\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $x+y=4, x+y=12, y^2=2x.$ $\frac{196}{3}$

3. Spočtěte $\iint\limits_M y\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $x^2-y+2=0, x+y-4=0.$ $\frac{81}{5}$

4. Spočtěte $\iint\limits_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $x=0, y=1, y=2, y^2=x.$ $\mathrm{e}^2-\frac{3}{2}$

5. Spočtěte $\iint\limits_M xy^2\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $x^2+y^2-1\le 0, x+y-1\ge 0.$ $\frac{1}{20}$

6. Zapište transformační vztahy pro polární souřadnice a vypočtěte jakobián této transformace.

7. Spočtěte $\iint\limits_M \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M: $\frac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le\sqrt{3}x,\ 1\le x^2+y^2\le 9.$ $\frac{\pi^2}{6}$

8. Spočtěte $\iint\limits_M x^2+y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $|x| \le y$. $\frac{15\pi}{8}$

9. Spočtěte $\iint\limits_M \sin\sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $y \ge 0, \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$. $-3\pi^2$

10. Spočtěte $\iint\limits_M \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$. $-\frac{\pi}{4\mathrm{e}}+\frac{\pi}{4}$

11. Spočtěte $\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $x^2+y^2 \le y, y \ge x, x \ge 0$. $\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}$

12. Spočtěte $\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je určena vztahy $x^2+y^2 \le -4x, x^2+y^2 \ge 4, y \le \frac{\sqrt{3}}{3}x$. $\frac{\pi}{3}$

Často používané integrály:

$$\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \text{substituce :} & \\ 2x & = t \\ 2\,\mathrm{d}x & = 1\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sin t \,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\cos t) + C = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1-\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$$

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \text{substituce :} & \\ \cos x & = t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x & = 1\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \\ &= -\int 1-t^2 \mathrm{d}t = -\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

Aplikace dvojného integrálu:

1. a) Dvojným integrálem vypočtěte obsah rovinné oblasti M, dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq$ $\leq 2y$, $y \geq x$. $\left[\frac{7\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}+2}{4}\right]$

   b) Spočtěte si obsah vhodné části kruhu běžným vzorcem a porovnejte jej s vaším výsledkem. Vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.

2. Spočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$. $[\,\pi + 3\sqrt{3} - 6]$

3. Spočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = x$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$. $[\,\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}]$

4. Určete obsah plochy ohraničené lemniskátou $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 18\left(x^2 - y^2\right)$ a kružnicí $x^2 + y^2 = 6x$. $[\,9\pi - 9]$

5. Spočtěte obsah rovinné oblasti dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq y$, $y \geq x$, $x \geq 0$.

6. Pomocí dvojného integrálu určete objem tělesa daného nerovnostmi $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq$ $\leq x^2 + y^2$. $[\,\frac{1}{4}\pi]$

7. Část elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v prvním kvadrantu je pokryta hmotou tak, že plošná hustota $\sigma(x, y)$ je přímo úměrná x-ové souřadnici. Určete její hmotnost. $[\frac{ka^2b}{3}]$

8. Určete těžiště homogenního rovinného obrazce daného nerovnostmi $y \geq 0$, $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.

9. Určete těžiště nehomogenního rovinného obrazce daného nerovnostmi $y \geq 0$, $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$. Hustota je přímo úměrná vzdálenosti od osy x.

10. Určete těžiště homogenní plochy ohraničené křivkou $y^2 = x^2 - x^4$ pro $x \leq 0$. $[\,T\left[\frac{3\pi}{16}, 0\right]]$

    Nápověda: Pokuste se plochu alespoň zhruba namalovat a popřemýšlejte o případné symetrii.

11. Určete těžiště homogenní plochy ohraničené parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = 1$. $[\,T\left[0, \frac{3}{5}\right]]$

12. Vypočtěte moment setrvačnosti kruhu $x^2 + (y - 3)^2 \leq 9$ vzhledem k jeho tečně v bodě $[0, 0]$. $[\,\pi\frac{127}{4}]$

    Nápověda: Použijte raději posunuté polární souřadnice.

13. Spočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$. $[\,\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}]$

14. Spočtěte hmotnost a těžiště nehomogenní plochy dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq -4y$, $x \leq 0$, je-li její plošná hustota přímo úměrná vzdálenosti od počátku. $[\,m = \frac{128}{9}k,\ T[-0,9; -2,4]]$

15. Dvojným integrálem spočtěte obsah plochy $M:\ x^2 + y^2 \leq y$, $y \geq x$, $x \geq 0$. $\frac{\pi}{8}$
    Nápověda: $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$

16. Určete hmotnost nehomogenní množiny $M:\ \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}$, $y \geq 0$. Plošná hustota je přímo úměrná sinu vzdálenosti od počátku. $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi \doteq 2,7$

    Nápověda: Integrál $\int \varrho \cdot \sin\varrho \, \mathrm{d}\varrho$ řešíme metodou per partes.

17. Pomocí transformace $x^2 = uy$, $y^2 = vx$ spočtěte obsah množiny M, která je ohraničená křivkami $y = x^2$, $y = 3x^2$, $x = y^2$, $x = 2y^2$.
    Nápověda: Je potřeba získat explicitní vyjádření transformačních vztahů $x = f_1(u, v)$ a $y = f_2(u, v)$, určit jakobián této transformace a určit meze pro nové proměnné u a v.

    Řešení příkladu 17:
    Transformační rovnice jsou $x = \sqrt[3]{u^2v}$, $y = \sqrt[3]{uv^2}$, jakobián vyjde $\frac{1}{3}$. Meze pro integraci jsou $\frac{1}{3} \leq u \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$ a výsledný obsah množiny M je $\frac{1}{9}$.

Aplikace trojného integrálu (kde $\varrho(x,y,z)$ je prostorová hustota):

a) $V(M) = \iiint\limits_M 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... objem tělesa M.

b) $m(M) = \iiint\limits_M \varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... hmotnost tělesa M.

c) $S_{xy}(M) = \iiint\limits_M z\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... statický moment tělesa M vzhledem k rovině $z=0$.

$S_{xz}(M) = \iiint\limits_M y\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... statický moment tělesa M vzhledem k rovině $y=0$.

$S_{yz}(M) = \iiint\limits_M x\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... statický moment tělesa M vzhledem k rovině $x=0$.

e) $T(M) = \left[\frac{S_{yz}(M)}{m(M)}, \frac{S_{xz}(M)}{m(M)}, \frac{S_{xy}(M)}{m(M)}\right]$ ... těžiště tělesa M.

f) $I_x(M) = \iiint\limits_M (y^2+z^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k ose x.

$I_y(M) = \iiint\limits_M (x^2+z^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k ose y.

$I_z(M) = \iiint\limits_M (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ... moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k počátku.

1. Spočtěte $\iiint\limits_M xy + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je určena vztahy $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $0 \le z \le 2-x-2y$. $[\frac{13}{40}]$
2. Spočtěte $\iiint\limits_M y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je omezena plochami $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$, $y=\sqrt{x}$. $[\frac{\pi^2-8}{16}]$
3. Spočtěte $\iiint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je určena vztahy $\frac{\sqrt{3}}{3}y \le z \le x+y+3$, $x \ge 0$, $\frac{3}{2}x - 3 \le y \le 0$. $[8+\sqrt{3}]$
4. Zapište obě varianty pro transformaci do sférických souřadnic, vysvětlete, v čem spočívá jejich rozdíl a vypočtěte jejich jakobiány. Zapište válcové souřadnice a spočtěte jakobián.
5. Spočtěte $\iiint\limits_M z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je určena vztahy $0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ $[\frac{16}{3}\pi]$
6. Spočtěte $\iiint\limits_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je určena vztahy $y \le x$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x^2+y^2+z^2 \le 1$. $[\frac{\pi}{16}]$
7. Spočtěte $\iiint\limits_M z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je určena vztahy $z=0$, $z=3$, $y \ge 0$, $x^2+y^2-2x=0$. $[8]$
8. Spočtěte $\iiint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je určena vztahy $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - x^2 - y^2$, $y \ge x$. $[\frac{16}{3}\pi]$
9. Spočtěte $\iiint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je určena vztahy $x^2+y^2 \le z \le 6 - \sqrt{x^2+y^2}$, $y \ge |x|$. $[\frac{8}{3}\pi]$
10. Spočtěte $\iiint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde M je určena vztahy $x^2+y^2 \le z \le 2 + \sqrt{x^2+y^2}$, $y \ge |x|$. $[\frac{4}{3}\pi]$

Aplikace trojného integrálu:

1. a) Trojným integrálem určete objem tělesa daného nerovnostmi $2 \leq z \ \leq 4 - x^2 - y^2$, $y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x, x \geq 0$.

   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.

2. a) Určete objem tělesa daného nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ a $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. $[\ \frac{2\pi r^3}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)]$

   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.

3. a) Určete objem tělesa daného nerovnostmi $z \leq 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, $y \geq |x|$. $[\ \frac{\pi}{8}]$

   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.

4. a) Určete objem tělesa daného nerovnostmi $6 - 2y \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$. $[\ 8\pi]$

   Nápověda: Prumětem rovinného řezu na paraboloidu do roviny kolmé k ose rotace je kružnice.

   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.

5. a) Určete objem tělesa daného nerovnostmi $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 2y$, $z \leq x^2 + y^2$. $[\ \frac{3}{2}\pi]$

   b) Spočtěte si objem části vhodného tělesa běžným vzorcem. Výsledek porovnejte s vaším výpočtem a vyslovte závěr, zda si myslíte, že máte výpočet správně.

6. Vypočtěte hmotnost tělesa omezeného soustřednými kulovými plochami o poloměrech r a R, kde $r < R; r, R \in \mathbb{R}$. Prostorová hustota je nepřímo úměrná vzdálenosti od středu kulových ploch.

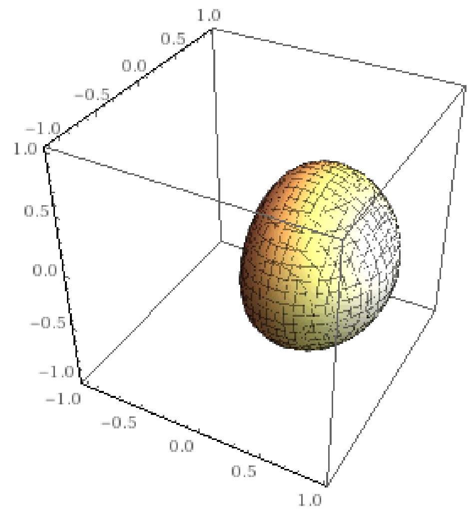
   $[\ 2k\pi\left(R^2 - r^2\right)$*, kde k je koeficient nepřímé úměrnosti*$]$

7. Určete celkový náboj tělesa $M:\ x^2 + y^2 \leq 9,\ -3 \leq z \leq 10 - \sqrt{x^2 + y^2},\ y \geq -x,\ y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Rozložení náboje je přímo úměrné třetí mocnině y-ové souřadnice. Tedy $Q = \iiint\limits_M y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

8. Spočtěte hmotnost nehomogenního tělesa M s hustotou, která je přímo úměrná vzdálenosti od osy z. $T:\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 3$.

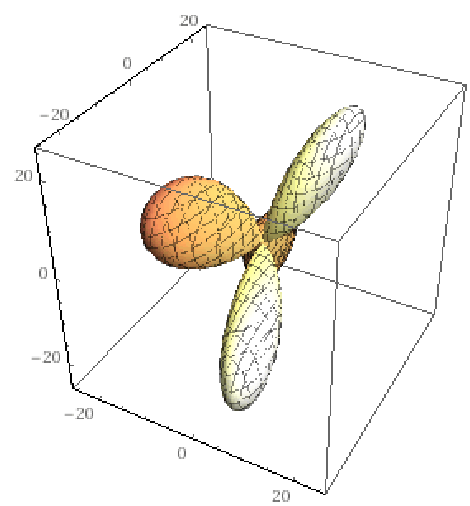
   Řešení příkladu 8:
   Pokud zvolíme transformaci do posunutých válcových souřadnic, tak získáme sice pěkné meze, ale integrál bude problematický. Vyplatí se použít obyčejné válcové souřadnice, kde se pak vyskytne $\int \cos^3 \varphi \mathrm{d}\varphi$.

9. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3x$, $a>0$. $\frac{\pi a^3}{3}$
Nápověda: Transformujte do sférických souřadnic. Plocha ohraničující těleso je zobrazena na obrázku 1.



Obrázek 1: Plocha $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3x$ pro $a=1$ z příkladu 9

10. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}\right)^2 = xyz$. $\frac{160}{3}\pi$
Nápověda: Transformujte do zobecněných sférických souřadnic. Plocha ohraničující těleso je zobrazena na obrázku 2.



Obrázek 2: Plocha $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}\right)^2 = xyz$ z příkladu 10

Řešení příkladu 10:
Po transformaci do zobecněných sférických souřadnic $x = 2\varrho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = 5\varrho\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = 4\varrho\sin\vartheta$, jejíž jakobián v absolutní hodnotě je $|J| = 2\cdot 5\cdot 4\varrho^2\cos\vartheta$, dostaneme ze zadané funkce vztah $\varrho = 40\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos^2\vartheta$, který dále analyzujeme a tím určíme meze pro proměnné φ a ϑ. Víme, že ϱ musí být nezáporné, což nastane právě když $\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta \geq 0$. U úhlu ϑ, který jsme zavedli jako odklon od půdorysny, platí navíc podmínka, že nabývá hodnot z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Rozborem podmínky $\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta \geq 0$ v kombinaci s podmínkou $\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ získáme tedy celkem čtyři varianty mezí pro ϱ, φ a ϑ, což je v souladu s obrázkem 2, kde jsou vidět čtyři části tělesa M.