16 Substituce (transformace) ve dvojném a trojném integrálu

Připomeňme nejprve, jak vypadá věta o substituci v případě funkce jedné proměnné: Je-li f spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$ a φ je rostoucí (a tedy prostá) funkce na $\langle\alpha,\beta\rangle$, která zde má spojitou derivaci, přičemž $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Je-li naopak φ klesající na $\langle\alpha,\beta\rangle$, přičemž nyní $\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$, pak se vzorec modifikuje

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zaměníme-li předpoklad ryzí monotonie funkce φ předpokladem $\varphi'(t)\neq 0$ pro každé $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$ (to nám zaručí, že φ je zde rostoucí, nebo je klesající), pak lze oba vzorce psát v jednom jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

Definice 16.1 (regulární 2-funkce)**.** Nechť $\mathscr{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ je 2-funkce, která je spojitě diferencovatelná na otevřené množině M. Řekneme, že $\mathscr{F}$ je *regulární na* M, jestliže $J_{\mathscr{F}}\neq 0$ v každém bodě množiny M.

Věta 16.2 (o substituci ve dvojném integrálu)**.** *Nechť $M^*\subseteq\mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ je otevřená množina a nechť $M^*\subseteq\Omega$. Nechť dále $\mathscr{F}(u,v)=[g(u,v),h(u,v)]$ je prostá a regulární 2-funkce na Ω a $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je spojitá na $M=\mathscr{F}(M^*)$. Pak platí*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M^*} \underbrace{f(\mathscr{F}(u,v))}_{f(g(u,v),h(u,v))}\,|J_{\mathscr{F}}(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Poznámka. a) Vzorec věty formálně odpovídá vzorci $(*)$.

b) Ve větě vystupuje předpoklad, že 2-funkce $\mathscr{F}$ je prostá a regulární na otevřené oblasti Ω. Potom, je-li M omezená množina taková, že $\overline{M}\subseteq\Omega$, tak platí, že M je měřitelná, právě když $\mathscr{F}(M)$ je měřitelná.

c) Vysvětleme si význam jakobiánu na pravé straně rovnosti. Zvolme $f(x,y)=1$ a předpokládejme pro jednoduchost, že jakobián $J_{\mathscr{F}}\neq 0$ je konstantní. Potom podle předchozí věty je

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = |J_{\mathscr{F}}|\iint_{M^*}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad \text{tj.} \quad \lambda(M)=|J_{\mathscr{F}}|\lambda(M^*).$$

Jako příklad uvažujme čtverec $M^*=\langle 0,1\rangle^2$ a lineární 2-funkci $\mathscr{F}(u,v)=[au+bv,cu+dv]$, kde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Protože $J_{\mathscr{F}}(u,v)=ad-bc$, je třeba požadovat $ad-bc\neq 0$. Dosazením do výše uvedeného vzorce tedy máme $\lambda(M)=|ad-bc|$, kde $M=\mathscr{F}(M^*)$ je rovnoběžník s vrcholy $[0,0]$, $[a,c]$, $[b,d]$ a $[a+b,c+d]$. To odpovídá známému faktu z analytické geometrie, kdy obsah rovnoběžníku určeného vektory (a,c) a (b,d) je roven absolutní hodnotě determinantu

$$\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Pokud jakobián $J_{\mathscr{F}}$ není konstantní, pak na základě integrální věty o střední hodnotě lze psát $\lambda(M)=|J_{\mathscr{F}}(u_0,v_0)|\lambda(M^*)$, kde $[u_0,v_0]\in M^*$. V jakobiánu je tedy „schován“ poměr obsahů množin M^* a M.

Příklad 16.3. Určete míru (obsah) množiny M, která je vymezena křivkami $xy=a$, $xy=b$ $(0<a<b)$, $y^2=cx$, $y^2=dx$ $(0<c<d)$.

Řešení. Označíme-li $xy=u$, $\frac{y^2}{x}=v$, pak M^* je vymezena nerovnostmi $a\le u\le b$, $c\le v\le d$ a 2-funkce $x=u^{2/3}v^{-1/3}$, $y=u^{1/3}v^{1/3}$ je prostá uvnitř I. kvadrantu (každému bodu $[u_0,v_0]$ odpovídá jediný bod $[x_0,y_0]$, který leží na hyperbole $xy=u_0$ a parabole $y^2/x=v_0$). Platí

$$J(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3}\\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3v}\neq 0 \quad \text{ve vnitřku I. oktantu.}$$

Protože Jacobiova matice je spojitá ve vnitřku I. oktantu, naše 2-funkce je regulární a podle věty 16.2 platí

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{M^*}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^b\Big(\int_c^d\frac{1}{3v}\,\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{d}{c}.$$

Poznámka. Požadavek věty 16.2, aby bylo možné 2-funkci $\mathscr{F}$ prostě rozšířit na otevřenou nadmnožinu integračního oboru M^* při zachování regularity, je často nesplnitelný (i v případě poměrně jednoduchých transformací). Tento požadavek lze oslabit, byť za cenu komplikovanější formulace tvrzení. Zhruba řečeno, substituční vzorec zůstane v platnosti, pokud předpoklady věty 16.2 nejsou splněny na množinách míry nula, viz následující tvrzení.

Věta 16.4 (o substituci ve dvojném integrálu za slabších předpokladů). *Nechť $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $M^* \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a platí $\Omega^* \subseteq M^*$, $\lambda(M^* \setminus \Omega^*) = 0$. Dále, nechť 2-funkce $\mathscr{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daná jako $\mathscr{F}(u, v) = [g(u, v), h(u, v)]$ je spojitě diferencovatelná na M^*, přičemž je prostá a regulární v Ω^*. Označme $\Omega = \mathscr{F}(\Omega^*)$, $M = \mathscr{F}(M^*)$ a předpokládejme, že M je měřitelná s $\lambda(M \setminus \Omega) = 0$. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce ohraničená na M, spojitá na Ω a nechť funkce $f(g(u, v), h(u, v))|J_{\mathscr{F}}(u, v)|$ je ohraničená na Ω^*. Pak platí*

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M^*} \underbrace{f(\mathscr{F}(u, v))}_{f(g(u,v),h(u,v))} |J_{\mathscr{F}}(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Poznámka. Důkazy vět 16.2 a 16.4 jsou dosti náročné (využívá se zde některých speciálních vlastností regulárních zobrazení).

Běžně používané transformace

1. Posunutí (translace): $x = u + a$, $y = v + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$,

$$J(u, v) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

2. Dilatace (změna měřítka): $x = au$, $y = bv$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$,

$$J(u, v) = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab.$$

3. Transformace do polárních souřadnic: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, kde $\rho \geq 0$ a φ nabývá obvykle hodnot z intervalu 2π (může být ale i delší),

$$J(\rho, \varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$$

4. Transformace do zobecněných polárních souřadnic: $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $a, b \in \mathbb{R}^+$,

$$J(\rho, \varphi) = \det\begin{pmatrix} a\cos\varphi & b\rho\sin\varphi \\ a\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{pmatrix} = ab\rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = ab\rho.$$

Příklad 16.5. Určete hodnotu dvojného integrálu $\iint_M x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je množina vymezená nerovností $x^2 + y^2 \leq 4$.

Řešení. Množina M je uzavřený kruh se středem v počátku o poloměru 2. Tomu odpovídá množina $M^* = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, tj. uzavřený obdélník. V tomto případě nelze splnit předpoklady věty 16.2, protože 2-funkce $\mathscr{F}(\rho, \varphi) = [\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi]$ není prostá na M^*. To je způsobeno tím, že všechny body ležící na levé hraniční úsečce obdélníka se zobrazí na počátek $[0, 0]$ a pro každé $c \in \langle 0, 2\rangle$ se body $[c, 0]$ a $[c, 2\pi]$ zobrazí na bod $[c, 0] \in M$. Prostá by byla, kdybychom uvažovali např. $M^* = (0, 2\rangle \times \langle 0, 2\pi)$, ale pak by M^* nebyla uzavřená, což je též ve větě požadováno.

Lze však použít větu 16.4. Za množinu Ω^* vezmeme vnitřek obdélníka $M^* = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$. Množina $M^* \setminus \Omega^*$ představuje hranici obdélníka M^* a tedy $\lambda(M^* \setminus \Omega^*) = 0$. Množina $M \setminus \Omega$ se skládá z kružnice $x^2 + y^2 = 4$ a úsečky spojující body $[0, 0]$ a $[2, 0]$, což je množina míry nula. Zobrazení $\mathscr{F}$ je na Ω^* prostou a regulární 2-funkcí ($J(\rho, \varphi) = \rho \neq 0$ pro $\forall[\rho, \varphi] \in \Omega^*$). Integrovaná funkce je spojitá na M (a tedy ohraničená na M a spojitá na Ω) a funkce $\rho^3\cos^2\varphi$ je spojitá na M^* (a tedy ohraničená na Ω^*). Podle věty 16.4 tedy máme

$$\iint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \rho^3\mathrm{d}\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Příklad 16.6. Určete obsah množiny vymezené Bernoulliovou lemniskátou, což je křivka určená jako množina bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ vyhovující rovnici $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$.

Řešení. Pomocí substituce do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ přejde rovnice na tvar $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$. Uvědomíme-li si, křivka musí být symetrická vzhledem k ose x i y (změna $x \mapsto -x$ i $y \mapsto -y$ rovnici nezmění), stačí uvažovat obrazec, jehož míru máme spočítat, např. jenom v I. kvadrantu. Výsledná míra pak bude čtyřnásobek této části. Prvnímu kvadrantu odpovídá úhel z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Protože levá strana rovnice $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ je nezáporná, musí být nezáporná také pravá strana, což v uvažovaném intervalu nastane, je-li $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$. Čtvrtina množiny M^* je tedy vymezena nerovnostmi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ a platí

$$\lambda(M) = 4 \iint_{M^*} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = 4 \int_0^{\pi/4} \Big(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho \, \mathrm{d}\rho \Big) \mathrm{d}\varphi = 2 \int_0^{\pi/4} \big[\rho^2\big]_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \, \mathrm{d}\varphi$$
$$= 4a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 2a^2 [\sin 2\varphi]_0^{\pi/4} = 2a^2.$$

V případě substituce ve trojném integrálu by za analogických předpokladů vět 16.2 a 16.4 příslušný vzorec vypadal

$$\iiint_M f(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y = \iiint_{M^*} f(\mathscr{F}(u, v, w)) |J_{\mathscr{F}}(u, v, w)| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Vedle translace a dilatace jsou běžně používanými transformacemi transformace do cylindrických (válcových) souřadnic a do sférických souřadnic.

1. Transformace do cylindrických souřadnic: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, kde $\rho \ge 0$ a φ nabývá obvykle hodnot z intervalu délky 2π,

$$J(\rho, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

2. Transformace do sférických souřadnic: I. zp. $x = \rho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = \rho\sin\vartheta$, kde $\rho \ge 0$, φ je obvykle z intervalu délky 2π a omezení na úhel ϑ je $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$,

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\cos\vartheta & -\rho\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} = \rho^2\cos\vartheta.$$

   II. zp. $x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\cos\vartheta$, kde $\rho \ge 0$, φ je obvykle z intervalu délky 2π a omezení na úhel ϑ je $0 \le \vartheta \le \pi$.

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & \rho\sin\vartheta \end{pmatrix} = \rho^2\sin\vartheta.$$

Příklad 16.7. Odvoďte známý vzorec pro objem kužele o poloměru podstavy r a výšce h.

Řešení. Použijeme transformace do cylindrických souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Kužel umístěme např. tak, že jeho podstava leží v rovině xy a má střed v počátku. Pak průmětem kužele do roviny xy je kruh o poloměru r, který je v polárních souřadnicích vyjádřen nerovnostmi $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le r$. Samotná kuželová plocha má rovnici

$$z = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2},$$

a v cylindrických souřadnicích (toto vyjádření dostaneme po dosazení za x a y) $z = h - \frac{h}{r}\rho$. Množina M^*, přes kterou budeme integrovat, je tedy vyjádřena nerovnostmi

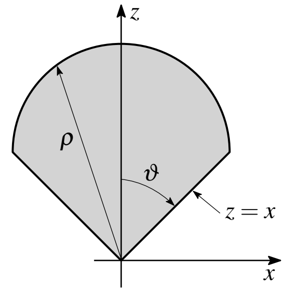
$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le z \le h - \frac{h}{r}\rho$$

a objem tělesa je dán integrálem

$$\lambda(M) = \iiint_{M^*} \rho \, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^r \Big(\int_0^{h - h\rho/r} \rho \Big) \mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}\rho \Big) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^r [\rho z]_0^{h-h\rho/r} \mathrm{d}\rho \Big) \mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi \int_0^r \left(h\rho - \frac{h\rho^2}{r} \right) \mathrm{d}\rho = \left[\frac{h\rho^2}{2} - \frac{h\rho^3}{3r} \right]_0^r = 2\pi \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^2}{3} \right) = \frac{1}{3}\pi r^2.$$

Příklad 16.8. Určete objem tělesa vymezeného nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$ a kuželem $x^2 + y^2 \le z^2$.

Řešení. Použijeme substituce do sférických souřadnic. Hraniční plochy tělesa se skládají z části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ o poloměru 1 se středem v bodě $[0, 0, 1]$ (rovnice psána ve středovém tvaru totiž je $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$) a částí kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$. Po dosazení výrazů $x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\cos\vartheta$ má kulová plocha ve sférických souřadnicích vyjádření $\rho = 2\cos\vartheta$. Z geometrického náhledu (viz obrázek 10) vidíme, že množina M^*,



Obrázek 10: Řez tělesem rovinou xz (z obrázku je patrno, že průvodič ρ se skutečně mění s úhlem ϑ)

přes kterou integrujeme, je vymezena nerovnostmi $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le 2\cos\vartheta$ (platí $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$). Objem tělesa je pak dán integrálem

$$\begin{aligned}
\lambda(M) &= \iiint_{M^*} \rho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \rho^2 \sin\vartheta \right) \mathrm{d}\rho \Big) \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \left[\rho^3 \sin\vartheta\right]_0^{2\cos\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\vartheta \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \left| \begin{array}{c} \cos\vartheta = t \\ \mathrm{d}\vartheta = -\mathrm{d}t/\sin\vartheta \\ 0 \to 1,\ \pi/4 \to \sqrt{2}/2 \end{array} \right| = \frac{16\pi}{3} \int_{\sqrt{2}/2}^{1} t^3 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{16\pi}{3} \left[\frac{t^4}{4}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{4\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

Poznámka. Transformaci do cylindrických i sférických souřadnic lze zobecnit podobně jako v případě polárních souřadnic, tj. $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $z = z$, $J(\rho,\varphi,z) = ab\rho$, resp. $x = a\rho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = b\rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = c\rho\sin\vartheta$, $J(\rho,\varphi,\vartheta) = abc\,\rho^2\cos\vartheta$.

17 Aplikace dvojného a trojného integrálu v mechanice

Již víme, že integrál

$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

představuje rovinný obsah množiny M, integrál

$$\iiint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

představuje objem tělesa M a integrál

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $f(x,y) \ge 0$, představuje objem tělesa pod plochu $f(x,y)$. Označme

$$\mathrm{d}m = \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{d}m = \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde funkce $\rho(x,y)$, resp. $\rho(x,y,z)$ je hustota v bodě $[x,y] \in M \subseteq \mathbb{R}^2$, resp. $[x,y,z] \in M \subseteq \mathbb{R}^3$ (veličině $\mathrm{d}m$ se říká hmotnostní element). Pak (zejména v mechanice) jsou užitečné následující integrály:

1. hmotnost desky M, resp. tělesa M

$$m(M) = \iint_M \mathrm{d}m, \qquad \text{resp.} \qquad m(M) = \iiint_M \mathrm{d}m,$$

2. statické momenty desky M vzhledem k osám x a y

$$S_x(M) = \iint_M y\,\mathrm{d}m, \qquad S_y(M) = \iint_M x\,\mathrm{d}m,$$

3. statické momenty tělesa M vzhledem k souřadným rovinám xy, xz a yz

$$S_{xy}(M) = \iiint_M z\,\mathrm{d}m, \qquad S_{xz}(M) = \iiint_M x\,\mathrm{d}m, \qquad S_{yz}(M) = \iiint_M x\,\mathrm{d}m,$$

4. momenty setrvačnosti desky M vzhledem k osám x a y, a polární moment setrvačnosti

$$I_x(M) = \iint_M y^2 \,\mathrm{d}m, \qquad I_y(M) = \iint_M x^2 \,\mathrm{d}m, \qquad I_p(M) = \iint_M (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}m,$$

5. souřadnice těžiště desky M

$$x_T = \frac{S_y(M)}{m(M)}, \qquad y_T = \frac{S_x(M)}{m(M)},$$

6. souřadnice těžiště tělesa M

$$x_T = \frac{S_{yz}(M)}{m(M)}, \qquad y_T = \frac{S_{xz}(M)}{m(M)}, \qquad x_T = \frac{S_y(M)}{m(M)}, \qquad z_T = \frac{S_{xy}(M)}{m(M)},$$

7. momenty setrvačnosti tělesa M vzhledem k osám x, y a z

$$I_x(M) = \iiint_M (y^2 + z^2) \,\mathrm{d}m, \qquad I_y(M) = \iiint_M (x^2 + z^2) \,\mathrm{d}m, \qquad I_z(M) = \iiint_M (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}m,$$

8. polární moment setrvačnosti tělesa M

$$\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}m,$$

9. plošné momenty setrvačnosti tělesa M vzhledem k souřadným rovinám xy, xz a yz

$$I_{xy}(M) = \iiint_M z^2 \,\mathrm{d}m, \qquad I_{xz}(M) = \iiint_M y^2 \,\mathrm{d}m, \qquad I_{yz}(M) = \iiint_M x^2 \,\mathrm{d}m,$$

10. deviační momenty tělesa M vzhledem k souřadným rovinám xy, xz a yz

$$D_{xy}(M) = \iiint_M xy \,\mathrm{d}m, \qquad D_{xz}(M) = \iiint_M xz \,\mathrm{d}m, \qquad D_{yz}(M) = \iiint_M yz \,\mathrm{d}m.$$

Momenty setrvačnosti lze uspořádat do tzv. *tenzoru setrvačnosti*

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{pmatrix}.$$