Plošný integrál I. druhu:

1. Je dána plocha $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4 - x - y\}$. Danou plochu parametrizujte a spočtěte velikost její normály.

   [parametrizace plochy $S:\ x = 2\cos u,\ y = 2\sin u,\ z = v,\ u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,\ v \in \langle 0, 4 - 2\cos u - 2\sin u\rangle$, velikost normály je $|\vec{n}| = 2$]

2. Je dána plocha $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2},\ y \leq 0\}$. Spočtěte velikost její normály.

   [plocha S je daná explicitně, velikost normály je $|\vec{n}| = \sqrt{2}$]

3. Vypočtěte plošný integrál $\iint\limits_S xy \, \mathrm{d}S$, kde $S = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\big\}$.

   [12, plochu S parametrizujeme]

4. Určete plošný obsah vrchlíku rotačního paraboloidu $z = 6 - x^2 - y^2$ nad rovinou $z = 0$.

   [$\frac{62}{3}\pi$, plocha S je daná explicitně]

5. Určete povrch horní části kulové plochy $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$.

   [8π, plocha S je daná explicitně, ale obecně doporučujeme kulové plochy parametrizovat]

6. Vypočtěte plošný integrál $\displaystyle\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, \mathrm{d}S$, kde S je plášť čtvrtiny kruhového válce $x^2 + y^2 = r^2$, $r > z > 0$ v prvním oktantu a je omezený rovinami $z = 0$ a $z = h$, kde $r \geq h > 0$.

   [$\frac{\pi r}{2} \arcsin \frac{h}{r}$, plochu S parametrizujeme]

7. Určete povrch části zeměkoule ($R \doteq 6400$km) vymezený poledníkem 0° a 30° v.d. a rovnoběžkami 45° s.š. a 60° s.š.

   [$\frac{\pi R^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{12}$, plocha S je daná explicitně, ale obecně doporučujeme kulové plochy parametrizovat]

8. Vypočtěte plošný integrál $\iint\limits_S (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}S$, kde $S = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 9(x^2 + y^2),\ \ -1 \leq z \leq 2\big\}$.

   [$\pi\sqrt{10}\frac{17}{162}$, plocha $S = S_1 \cup S_2$, plochy S_1 a S_2 jsou dány explicitně]

9. Vypočtěte plošný obsah plochy $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \leq 7,\ y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ y \geq \sqrt{3}x\}$.

   [plocha S je daná explicitně]

10. Vypočtěte plošný integrál $\iint\limits_S x^2 + y^2 \, \mathrm{d}S$, kde $S = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 6,\ x^2 + y^2 \leq 1\big\}$.

    [$\frac{\sqrt{14}}{2}\pi$, plocha S je daná explicitně]

11. Vypočtěte plošný integrál $\iint\limits_S x^2 + y^2 \, \mathrm{d}S$, kde $S = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 6 - 2x - 3y\big\}$.

    [12π, plochu S parametrizujeme]

12. Vypočtěte plošný obsah plochy $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + 2y^2,\ z \leq 4,\ y \geq 0\}$.

    [$\frac{33\sqrt{33} - 1}{48}\pi$, plocha S je daná explicitně]

13. Vypočtěte plošný obsah plochy $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

    [$\sqrt{2}\pi$, plocha S je daná explicitně]

14. Vypočtěte plošný obsah plochy $S = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\big\}$.

    [$\frac{7}{2}$, plocha S je daná explicitně]

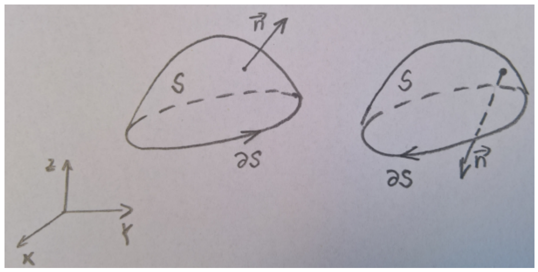
15. Vypočtěte plošný obsah plochy $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{2x^2 + 2y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 1\}$.

    [$\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$, plocha S je daná explicitně]

Plošný integrál II. druhu:
Věta 20.7 Stokesova:
Nechť Sje hladká plocha, která je spolu se svým okrajem ∂S orientována dle obrázku 1 a $\vec{f}$ je vektorové pole takové, která má spojité parciální derivace na nějaké oblasti obsahující plochu S. Potom platí

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{f}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\limits_{\partial S} \vec{f}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

kde $\operatorname{rot}\vec{f} = \vec{\nabla}\times\vec{f} = \det\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$



Obrázek 1: Orientace plochy S a jejího okraje ∂S ve Stokesově větě

Věta 20.5 Gaussova–Ostrogradského:
Nechť M je normální množina v $\mathbb{R}^3$ taková, že její hranice ∂M je po částech hladká uzavřená plocha orientovaná orientovaná ve směru vnější normály a nechť vektorové pole $\vec{f} = (P,Q,R)$ je spojité na M a má zde spojité parciální derivace P'_x, Q'_y a R'_z. Potom platí

$$\iiint\limits_M \operatorname{div}\vec{f}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\partial M} \vec{f}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

kde $\operatorname{div}\vec{f} = \vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R) = P'_x + Q'_y + R'_z.$

1. Pomocí plošného integrálu II. druhu vypočtěte tok vektoru $\vec{v} = (0, 6\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 0)$ plochou $S = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : y = 0,\ 0\le x\le 1{,}2,\ 1\le z\le 3\}$. Normála míří ve směru osy y. $[4\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}]$

2. Spočtěte plošný integrál $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $S = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ \ 0\le z\le 1\}$. Normála míří ven. $[2\pi]$

3. Spočtěte plošný integrál $\iint\limits_S y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $S = \left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ \ z\le 2\right\}$. Normála míří ven. $[-4\pi]$

4. Spočtěte plošný integrál $\iint\limits_S xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, kde $S = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2,\ z\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$. Normála míří dovnitř. $[-\frac{64}{15}]$

5. Spočtěte plošný integrál $\iint\limits_S (x,y,0)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$, kde $S = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ z\ge 0,\ y\le 0\}$. Normála míří ven. $[\frac{16}{3}\pi]$

6. Spočtěte plošný integrál $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $S = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9,\ x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0\}$. Normála míří dovnitř. $[-\frac{9}{2}\pi]$

7. Pomocí Stokesovy věty vhodnou volbou plochy S spočtěte $\oint\limits_{\partial S} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde $\partial S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ x+z=1\}$. ∂S je orientována proti oběhu hodinových ručiček. [-2π]

8. Pomocí Stokesovy věty spočtěte $\oint\limits_{\partial S} x^2y^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$, kde ∂S je hranicí plochy $S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z=0,\ x^2+y^2 \le 16,\ y \ge 0\}$ a je orientována proti oběhu hodinových ručiček. [$-\frac{4096}{15}$]

9. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\oiint\limits_S (x,y,z)\mathrm{d}\vec{S}$, kde S je povrch čtyřstěnu omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$. Normála míří ven. [$\frac{1}{2}$]

10. Vypočtěte tok kapaliny přes boční stěny čtyřstěnu $ABCD$ s podstavou ABC. $A[0,0,0]$, $B[2,0,0]$, $C[0,1,0]$, $D[0,0,2]$. Stěny jsou orientovány ve směru vnější normály a vektor proudění $\vec{v} = (yz, xy, xy)$. [$\frac{1}{3}$]

11. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\oiint\limits_S \left(x^2,y^2,z^2\right)\mathrm{d}\vec{S}$, kde plocha S je vnější strana povrchu kvádru $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle 0,c\rangle$. Normála míří ven z kvádru. [$abc(a+b+c)$]

12. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\oiint\limits_S (x^2yz, xy^2z, \sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\vec{S}$, kde S je plášť tělesa $M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$, tedy $S = \partial M$. Normála míří ven. [$\frac{4}{3}$]

13. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\oiint\limits_S (x^2,y^3,z)\mathrm{d}\vec{S}$, kde S je plášť tělesa $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 9,\ 2 \le z \le 6,\ y \ge |x|\}$. Normála míří ven. [$\frac{9}{4}(54+31\pi)$]

14. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty spočtěte plošný integrál $\oiint\limits_S (xy,z,yz)\mathrm{d}\vec{S}$, kde S je plášť tělesa $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le -x+y+2\}$. Normála míří ven. [$\frac{781}{12}$]