18 Křivky v rovině a prostoru

Definice 18.1 (rovinné křivky)**.** Nechť $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$ je 2-funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$. *Rovinnou křivkou* nazveme množinu $\Gamma := \{\mathscr{F}(t) : t \in \langle a, b\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^2$, přičemž 2-funkce $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$ se nazývá *parametrizace křivky* Γ. Body $A := [\varphi(a), \psi(a)]$, $B := [\varphi(b), \psi(b)]$ nazýváme *koncové body křivky* Γ. Křivka Γ se nazývá *uzavřená*, je-li $A = B$.

Poznámka. a) Všimněme si, že křivkou zde nenazýváme samotnou 2-funkci $\mathscr{F}$, ale její obraz v $\mathbb{R}^2$ (takové množině se říká také *hodograf*). V tomto i dalších pojmech týkajících se křivek nepanuje v literatuře jednotnost, někdy se křivkou myslí zobrazení $\mathscr{F}$ a množině Γ se říká (vedle již zmíněného pojmu hodograf) geometrický obraz křivky.

b) Na křivku lze nahlížet jako na pohyb hmotného bodu v rovině (řídícího se 2-funkcí $\mathscr{F}$) v časovém intervalu $\langle a, b\rangle$.

c) Definice připouští i množiny Γ, které příliš neodpovídají intuitivní představě o křivce. Např., známá Peanova křivka vyplňuje čtverec v rovině, má tedy nenulovou Jordanovu míru. Níže proto požadavky na křivku postupně zpřísníme tak, abychom se v další kapitole (kde se budeme věnovat křivkovým integrálům) nedostali nikde do problémů.

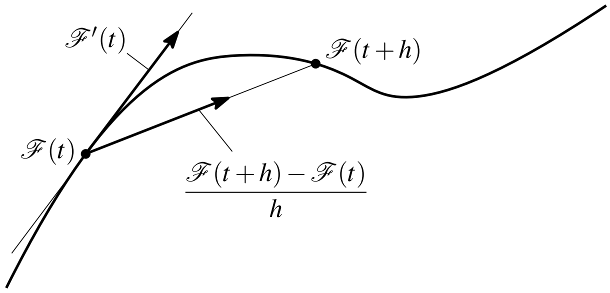
Definice 18.2 (křivek se speciálními vlastnostmi)**.** 1. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá*, je-li $\mathscr{F}$ prostá na $\langle a, b\rangle$. Geometricky to znamená, že křivka se nikde neprotíná (postačující podmínkou pro to, aby $\mathscr{F}$ byla prostá, je ryzí monotonie alespoň jedné z funkcí φ, ψ na $\langle a, b\rangle$).

2. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá uzavřená* (neboli *jordanovská*), je-li uzavřená a $\mathscr{F}$ je prostá na (a, b).
3. Křivka Γ se nazývá *třídy* C^1, jestliže její paramterizace $\mathscr{F}$ má spojitou Jacobiovu matici na $\langle a, b\rangle$ (tj. funkce φ a ψ mají spojité derivace na $\langle a, b\rangle$).
4. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá hladká*, je-li jednoduchá, je třídy C^1 a navíc $\varphi^2(t) + \psi^2(t) > 0$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$ (jinak řečeno, hodnoty $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ nejsou v žádném bodě intervalu současně nulové).
5. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá uzavřená hladká*, je-li jednoduchá uzavřená, je třídy C^1, platí $\varphi^2(t) + \psi^2(t) > 0$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$, a navíc $\varphi'_+(a) = \varphi'_-(b)$, $\psi'_+(a) = \psi'_-(b)$.
6. Křivka Γ se nazývá *jednoduchá po částech hladká*, je-li spojením konečně mnoha jednoduchých hladkých křivek, přičemž toto spojení je pouze skrz koncové body. Přesněji, existuje parametrizace $\mathscr{F}$, která je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, a existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že na každém dílčím intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$ představuje $\mathscr{F}$ jednoduchou hladkou křivku. Zde již nebudeme rozlišovat, zda výsledná křivka je nebo není uzavřená.

Poznámka. a) Každá jednoduchá (a jednoduchá uzavřená křivka) má nekonečně mnoho parametrizací, např. jednotková kružnice se středem v počátku má parametrizaci $[\cos t, \sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, nebo $[\cos 2t, \sin 2t]$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$, nebo $[\sin t, \cos t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

b) Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak její graf je křivka s parametrizací $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$.

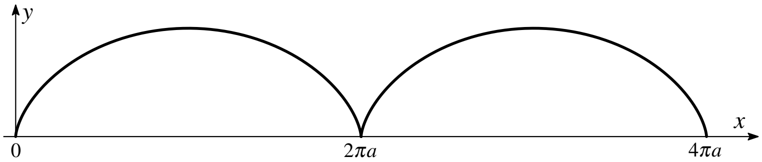
c) Je-li Γ křivka třídy C^1 a pro nějaké $t_0 \in \langle a, b\rangle$ je $\mathscr{F}'(t_0) = [0, 0]$, pak bod $P = [\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ nazveme singulárním bodem křivky, v opačném případě jej nazveme regulárním bodem. Máme-li dvě různé parametrizace téže křivky, může se stát, že některý bod je regulární v jedné parametrizaci a singulární v druhé. Např úsečka spojující body $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ má při parametrizaci $[t, t]$, $t \in \langle -1, 1\rangle$ všechny body regulární, ale při parametrizaci $[t^3, t^3]$, $t \in \langle -1, 1\rangle$ je počátek singulárním bodem. Jednoduchá (resp. jednoduchá uzavřená) hladká křivka má tedy všechny body regulární. Není težké si rozmyslet, že $\mathscr{F}'(t)$ představuje tečný vektor ke křivce Γ v bodě $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$ (viz obrázek 11). Tento tečný



Obrázek 11: Jacobiova matice $\mathscr{F}'(t)$ je v případě 2-funkce $\mathscr{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vektorem v rovině, který představuje tečný vektor ke křivce v bodě $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$

vektor lze také interpretovat jako vektor okamžité rychlosti, kterou má hmotný při pohybu po křivce v čase t. Když je tento vektor v každém čase $t \in \langle a, b\rangle$ nenulový a mění se spojitě, nemůže hmotný najednou prudce změnit směr, nemůže zastavit a pak se vydat opačným směrem, atp. Jeho pohyb je skutečně „hladký“. Příkladem křivky, kdy hmotný bod zastaví (v singulárním bodě) a vydá se jiným směrem, je např. část cykloidy o parametrizaci $\mathscr{F}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $t \in \langle 0, 4\pi\rangle$ $(a > 0)$, viz obrázek 12. Na tomto příkladu vidíme, že samotná spojitost Jacobiovy matice parametrizace $\mathscr{F}$ hladkost, tak ji i intuitivně chápeme, nezaručí.

Pro případ křivkového integrálu II. druhu je navíc potřeba zavést pojem orientace křivky. Orientovat křivku znamená určit směr, ve kterém jsou body křivky procházeny (to lze dvěma způsoby).



Obrázek 12: Dva oblouky cykloidy při parametrizaci $\mathscr{F}(t) = [\,a(t-\sin t),\ a(1-\cos t)\,]$, $0 \le t \le 4\pi$ ($a > 0$ je parametr). Tato křivka má tři singulární body (počátek a body $[2\pi a, 0]$, $[4\pi a, 0]$)

Definice 18.3 (souhlasné a nesouhlasné orientace jednoduché (uzavřené) křivky)**.** 1. Buď $\Gamma = \{[\varphi(t), \psi(t)] : t \in \langle a, b\rangle\}$ jednoduchá křivka a zvolme na ní dva různé body $P_1 = [\varphi(t_1), \psi(t_1)]$ a $P_2 = [\varphi(t_2), \psi(t_2)]$. Orientujme křivku tak, že se pohybujeme od bodu P_1 směrem k bodu P_2 (říkáme také, že bod P_1 je před bodem P_2, zapisujeme $P_1 \prec P_2$). Je-li $t_1 < t_2$, řekneme, že *křivka Γ je orientována souhlasně s parametrizací* $[\varphi, \psi]$. Je-li naopak $t_1 > t_2$, řekneme, že *křivka Γ je orientována nesouhlasně s parametrizací* $[\varphi, \psi]$.

2. V případě jednoduché uzavřené křivky Γ ji orientujme pomocí tří bodů P_1, P_2 a P_3 tak, že se po křivce pohybujeme z bodu P_1 do P_2 a z P_2 do P_3 (bodu P_i odpovídá parametr t_i, $i = 1, 2, 3$). Je-li $t_1 < t_2 < t_3$ nebo $t_3 < t_1 < t_2$ nebo $t_2 < t_3 < t_1$, pak řekneme, že *křivka Γ je orientována souhlasně s parametrizací* $[\varphi, \psi]$ a je-li $t_1 > t_2 > t_3$ nebo $t_2 > t_3 > t_1$ nebo $t_3 > t_1 > t_2$, pak řekneme, že *křivka Γ je orientována nesouhlasně s parametrizací* $[\varphi, \psi]$.

Příklad 18.4. Jednotková kružnice se středem v počátku orientovaná proti oběhu hodinových ručiček je orientována souhlasně vzhledem k parametrizaci $\mathscr{F}(t) = [\cos t, \sin t]$, ale nesouhlasně vzhledem k parametrizaci $\mathscr{G}(t) = [\sin t, \cos t]$.

Prostorovou křivku bychom definovali jako množinu

$$\Gamma = \{[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] : t \in \langle a, b\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

kde 3-funkce $\mathscr{F} = [\varphi, \psi, \chi]$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Ostatní pojmy jako jednoduchá nebo hladká křivka by se zavedly analogicky. Pozor, křivku v prostoru nelze zadat explicitně pomocí funkce!

19 Křivkový integrál

Definice 19.1 (křivkového integrálu I. druhu ze spojité funkce)**.** Nechť Γ je jednoduchá (nebo jednoduchá uzavřená) hladká křivka s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na nějaké otevřené množině obsahující křivku Γ. Potom definujeme křivkový integrál I. druhu jako

$$\int_\Gamma f(x, y)\,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t \tag{$*$}$$

Ukažme, co nás vedlo ke vzorci v předchozí definici. Jako motivaci uvažujme úlohu určit obsah plochy

$$\tau = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Gamma,\ 0 \le z \le f(x, y)\}.$$

Proveďme nějaké dělení intervalu $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Tímto dělením je určeno také dělení $A = P_0 \prec P_1 \prec P_2 \prec \cdots \prec P_n = B$ křivky Γ ($P_k = [\varphi(t_k), \psi(t_k)]$, $k = 0, 1, \ldots, n$). Potom je přirozené aproximovat hledaný obsah číslem

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(t_k), \psi(t_k))\sqrt{([\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}.$$

Potřebujeme ukázat, že S_n konverguje k hodnotě na pravé straně ($*$) pro každou nulovou posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ (připomeňme, že se jedná o posloupnost dělení, ve které norma dělení $\max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} |t_k - t_{k-1}|$ jde s rostoucím n k nule). Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz věta 16.2 v SA1) existují čísla ξ_k, $\eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$ taková, že $\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ a $\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \psi'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$. Hodnotu S_n tedy můžeme přepsat

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(t_k), \psi(t_k))\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2 + [\psi'(\eta_k)]^2}\,(t_k - t_{k-1}).$$

Kdyby pod odmocninou byly hodnoty derivací v bodě t_k (namísto ξ_k a η_k), pak by S_n představoval přímo integrální součet (s výběrem reprezentantů $\Xi = \{t_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$) a v limitě bychom ihned dostali požadovaný integrál (protože f

je spojitá nad křivkou Γ a výraz $\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$ je také spojitá funkce díky předpokladu hladkosti Γ). Jako poslední krok je tedy potřeba ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(t_k), \psi(t_k)) \sqrt{[\varphi'(t_k)]^2 + [\psi'(t_k)]^2}\,(t_k - t_{k-1}).$$

Důkaz tohoto kroku využívá Heineho–Cantorovy věty (viz věta 13.14 v SA1), která říká, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu je již stejnoměrně spojitá.

Poznámka. a) Předpoklad hladkosti křivky lze v definici křivkového integrálu oslabit, zejména lze připustit jednoduché C^1 křivky, které mají konečný počet singulárních bodů, případně lze porušit „jednoduchost“ křivky ve smyslu, že dovolíme konečný počet protnutí.

b) Je-li křivka třídy C^1, pak je tzv. *rektifikovatelná*. To znamená, že délka lomené čáry při zjemňování dělení neroste nade všechny meze, a tedy křivka má konečnou délku (délka křivky je právě takto definována – jako supremum délek lomených čar přes všechna možná dělení). Příkladem nerektifikovatelné křivky je křivka o parametrizaci $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$, kde

$$\varphi(t) = t, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = 0 \\ t \sin\frac{1}{t} & \text{pro } t > 0. \end{cases}, \quad t \in \langle 0, 1\rangle\,, \quad \psi' \text{ není spojitá v bodě } 0.$$

Pro délku rektifikovatelné křivky platí

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Veličině $\mathrm{d}s = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$ se říká *diferenciál oblouku*, přičemž výraz $\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$ představuje velikost tečného vektoru ke křivce (vektoru rychlosti hmotného bodu) v bodě $\mathscr{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$.

c) Lze ukázat, že za předpokladů kladených na křivku a integrovanou funkci hodnota integrálu nezávisí na zvolené parametrizaci dané křivky.

d) Křivkový integrál je možné definovat obecněji než v definici 19.1, kdy vycházíme z ohraničené funkce na oblasti obsahující křivku a zavedeme podobně jako u standardního Riemannova integrálu horní a dolní součty funkce nad křivkou, případně integrální součty.

e) Křivkový integrál přes jednoduchou po částech hladkou křivku bychom definovali jako součet integrálů přes jednotlivé části.

f) V případě uzavřené křivky se někdy znak integrálu píše jako $\oint$.

Příklad 19.2. Určete hodnotu integrálu

$$\int_\Gamma (x + y)\,\mathrm{d}s,$$

kde Γ je obvod trojúhelníka ABC, $A = [0,0]$, $B = [0,2]$, $C = [1,0]$.

Řešení. Jedná se o po částech hladkou křivku, pokud budeme strany trojúhelníka parametrizovat např. takto: stranu $\overline{AB}$ je nejjednodušší parametrizovat 2-funkcí $\mathscr{F}_1(t) = [0, t]$, $t \in \langle 0, 2\rangle$, stranu $\overline{BC}$ 2-funkcí $\mathscr{F}_2(t) = [t, 2 - 2t]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ a stranu $\overline{AC}$ 2-funkcí $\mathscr{F}_3(t) = [t, 0]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Protože $\mathscr{F}_1'(t) = [0, 1]$, $\mathscr{F}_2'(t) = [1, -2]$ a $\mathscr{F}_3'(t) = [1, 0]$, jednotlivé křivkové integrály jsou dány

$$\int_{\overline{AB}} (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_0^2 (0 + t)\sqrt{0^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2,$$
$$\int_{\overline{BC}} (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (t + 2 - 2t)\sqrt{1^2 + (-2)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$
$$\int_{\overline{AC}} (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (t + 0)\sqrt{1^2 + 0^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Celkově tedy

$$\int_\Gamma (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_{\overline{AB}} (x + y)\,\mathrm{d}s + \int_{\overline{BC}} (x + y)\,\mathrm{d}s + \int_{\overline{AC}} (x + y)\,\mathrm{d}s = 2 + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\big(5 + 3\sqrt{5}\big).$$

Příklad 19.3. Určete hodnotu integrálu

$$\int_\Gamma \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}s, \quad \text{kde } \Gamma \text{ je část Archimédovy spirály } \rho = \varphi \text{ ležící v kruhu se středem v počátku o poloměru } \frac{\pi}{2}.$$

Řešení. Archimédova spirála začíná v počátku (pro $\varphi = 0$) a s rostoucím úhlem roste (lineárně) vzdálenost ρ bodu křivky od počátku. Bodu na kružnici o poloměru $\frac{\pi}{2}$ tedy dosáhne, je-li $\rho = \varphi = \frac{\pi}{2}$. Odvoďme nejprve, jak vypadá diferenciál oblouku $\mathrm{d}s$, je-li křivka vyjádřena v polárních souřadnicích. Vzhledem k transformačním rovnicím mezi kartézskými a polárními souřadnicemi $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$ a $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$ platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = (\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)^2\mathrm{d}\varphi^2 + (\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi^2 \\
&= \big((\rho'(\varphi))^2\cos^2\varphi - 2\rho'(\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi \\
&+ (\rho'(\varphi))^2\sin^2\varphi + 2\rho'(\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2(\varphi)\cos^2\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi^2 = \big((\rho'(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi^2.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Nyní již stačí dosadit do zadaného integrálu (nyní máme $\rho'(\varphi) = 1$), což vede na

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}\frac{\varphi\sin\varphi}{\varphi\cos\varphi}\sqrt{1^2+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi = \left|\begin{array}{c} 1+\varphi^2 = t^2,\ \mathrm{d}\varphi = t\,\mathrm{d}t/\varphi \\ 0 \to 1, \pi/2 \to \sqrt{1+\pi^2/4}\end{array}\right| \\
&= \int_1^{\sqrt{1+\pi^2/4}} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_1^{\sqrt{1+\pi^2/4}} = \frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Poznámka. V případě prostorové křivky Γ by se za analogických předpokladů vzorec definice 19.1 modifikoval na

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 19.4. Určete hodnotu integrálu

$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s, \quad \text{kde} \quad \Gamma = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ x = y,\ x \le 0, z \ge 0\}.$$

Řešení. Prostorová křivka Γ je průnikem kulové plochy (sféry) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s rovinou $y = x$ (procházející osou z), což je kružnice o poloměru 2. Omezení $x \le 0$, $z \ge 0$ pak dává čtvrtkružnici (ležící ve III. oktantu). Tuto křivku lze snadno parametrizovat pomocí úhlů φ, ϑ, které vystupují v substituci do sférických souřadnic:

$$x = 2\cos\frac{5\pi}{4}\cos\vartheta = -\sqrt{2}\cos\vartheta, \qquad y = 2\sin\frac{5\pi}{4}\cos\vartheta = -\sqrt{2}\cos\vartheta, \qquad z = 2\sin\vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Pro diferenciál oblouku ještě potřebujeme derivace parametrických rovnic:

$$x' = \sqrt{2}\sin\vartheta, \qquad y' = \sqrt{2}\sin\vartheta, \qquad z' = 2\cos\vartheta.$$

Podle výše uvedeného vzorce pak platí

$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2\vartheta + 4\sin^2\vartheta}\sqrt{2\sin^2\vartheta + 2\sin^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\vartheta = 4[\vartheta]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu přes rovinnou křivku budeme hodnoty 2-funkce dvou proměnných interpretovat jako vektory, budeme tedy hovořit o vektorovém poli a značit ho $\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Definice 19.5 (křivkového integrálu II. druhu ze spojitého vektorového pole)**.** Nechť Γ je orientovaná jednoduchá (nebo jednoduchá uzavřená) hladká křivka s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$ a $\vec{f}$ je vektorové pole spojité na nějaké otevřené množině obsahující křivku Γ. Pak definujeme křivkový integrál II. druhu

$$\int_\Gamma \vec{f}(x,y)\cdot\vec{\mathrm{d}s} = \int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y := \pm\int_a^b [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,\mathrm{d}t, \qquad (**)$$

kde znaménko „$+$“ bereme v případě souhlasné orientace křivky s parametrizací $\mathscr{F}$ a znaménko „$-$“ v případě nesouhlasné.

Motivace pro vzorec $(**)$ je následující. Buď $\overline{AB}$ orientovaná úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Uvažujeme-li konstantní silové pole $\vec{f}$, pak z fyziky je známo, že práce, kterou vykoná silové pole $\vec{f}$ po úsečce $\overline{AB}$, je dána skalárním součinem $\vec{f}\cdot(B-A)$. Je-li tento skalární součin kladný, jedná se o vykonanou práci, je-li záporný, jedná se o spotřebovanou práci. Opačná orientace úsečky by znamenala práci s opačným znaménkem.

Jaká bude práce, kterou vykoná/spotřebuje silové pole $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$ po orientované křivce Γ? Uvažujme opět nějaké dělení $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$ (to opět určí dělení $A = P_0 \prec P_1 \prec \cdots \prec P_n = B$ křivky Γ). Nahradíme-li orientované křivky $\Gamma_k := \{[\varphi(t), \psi(t)] : t \in \langle t_{k-1}, t_k\rangle\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ orientovanými úsečkami $\overline{P_{k-1}P_k}$ a na každé z nich silové pole $\vec{f}$ konstantním silovým polem s hodnotou $\vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1}))$, pak získáme aproximaci vykonané práce

$$W_n := \sum_{k=1}^{n} \vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) \cdot (P_k - P_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) \cdot (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}), \psi(t_k) - \psi(t_{k-1})).$$

Přepíšeme-li rozdíly $\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$ a $\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})$ pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě, dostaneme

$$W_n := \sum_{k=1}^{n} \vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) \cdot (\varphi'(\xi_k), \psi'(\eta_k))(t_k - t_{k-1}).$$

Pomocí Heineho–Cantorovy věty lze opět ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \vec{f}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) \cdot (\varphi'(t_{k-1}), \psi'(t_{k-1}))(t_k - t_{k-1}).$$

Suma za znakem limity na pravé straně předchozího vztahu představuje integrální součet spojité funkce, takže v limitě (pro $n \to \infty$) W_n dává pravou stranu vzorce $(**)$ pro libovolnou nulovou posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Příklad 19.6. Určete $\int_\Gamma (xy, 0) \cdot \vec{ds}$, kde Γ je část paraboly $x = y^2$ jdoucí z bodu $[1, 1]$ do počátku $[0, 0]$.

Řešení. Vzhledem k parametrizaci $x = t^2,\ y = t,\ 0 \le t \le 1$ je křivka Γ orientována nesouhlasně. Dosazením do vzorce $(**)$ pak máme

$$\int_\Gamma (xy, 0) \cdot \vec{ds} = -\int_0^1 (t^3, 0) \cdot (2t, 1)\,dt = -\int_0^1 2t^4 dt = -\left[\frac{2t^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{2}{5}.$$

Poznámka. Vztah mezi křivkovým integrálem I. a II. druhu je následující. Je-li Γ jednoduchá (resp. jednoduchá uzavřená) hladká křivka s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi]$, tak tečný vektor $\mathscr{F}'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))$ je nenulový v každém $\forall t \in \langle a, b\rangle$. Potom vektor $\mathscr{F}_1'(t) = \mathscr{F}'(t)/|\mathscr{F}'(t)|$ je jednotkový ($|\cdot|$ je eukleidovská velikost vektoru). Uvažujeme-li spojité vektorové pole $\vec{f}$ v nějaké oblasti obsahující křivku Γ, pak platí

$$\int_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{ds} = \pm \int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathscr{F}_1'\,ds$$

(„+“ v případě souhlasné orientace křivky Γ s parametrizací $\mathscr{F}$ a „−“ v případě nesouhlasné).

Následující tvrzení dává do souvislosti dvojný integrál přes množinu M s křivkovým integrálem II. druhu přes hranici množiny M. Řekneme, že *hranice ∂M množiny M je orientována kladně*, jestliže množina při pohybu po ∂M zůstává po levé ruce.

Věta 19.7 (Greenova přes normální množinu vzhledem k ose x, George Green 1793–1841, Angličan)**.** *Nechť M je normální množina vzhledem k ose x (tj. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ a její hranice ∂M je kladně orientovaná křivka, přičemž předpokládáme, že funkce φ, ψ mají spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$. Nechť dále vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je spojité na M a má zde spojité parciální derivace P_y' a Q_x'. Pak platí*

$$\iint_M (Q_x' - P_y')\,dx\,dy = \oint_{\partial M} (P, Q) \cdot \vec{ds}.$$

Důkaz. Protože M je normální vzhledem k ose x, její hranici ∂M lze složit ze čtyř částí $\Gamma_\ell : x = a, y \in \langle \varphi(a), \psi(a)\rangle$, $\Gamma_d : y = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle$, $\Gamma_p : x = b, y \in \langle \varphi(b), \psi(b)\rangle$ a $\Gamma_h : y = \psi(x), x \in \langle a, b\rangle$. Části hranice Γ_ℓ a Γ_p jsou zřejmě (vzhledem ke vhodné parametrizaci) jednoduché hladké křivky a díky předpokladu spojitosti derivací funkcí φ, ψ jsou i části hranice Γ_d a Γ_h jednoduché hladké křivky (např. vzhledem k parametrizaci $[t, \varphi(t)]$, resp. $[t, \psi(t)]$). Platnost tvrzení bude prokázána, pokud ukážeme, že

$$-\iint_M P_y'(x, y)\,dx\,dy = \int_{\partial M} P(x, y)\,dx \quad \text{a} \quad \iint_M Q_x'(x, y)\,dx\,dy = \int_{\partial M} Q(x, y)\,dy.$$

Platí

$$\int_{\partial M} P(x, y)\,dx = \underbrace{\int_{\Gamma_\ell} P(x, y)\,dx}_{=0,\ \text{protože}\ \varphi'(t)=0} + \int_{\Gamma_d} P(x, y)\,dx + \underbrace{\int_{\Gamma_p} P(x, y)\,dx}_{=0,\ \text{protože}\ \varphi'(t)=0} + \int_{\Gamma_h} P(x, y)\,dx,$$

tj.

$$\int_{\partial M} P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_d} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_h} P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,\psi(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b [P(x,\varphi(x)) - P(t,\psi(x))]\,\mathrm{d}x.$$

Na druhou stranu, podle Fubiniovy věty

$$-\iint_M P'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} P'_y(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = -\int_a^b [P(x,y)]_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b [P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x))]\mathrm{d}x,$$

tj. platí $-\iint_M P(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} P(x,y)\mathrm{d}x$.

Důkaz druhé rovnosti $\iint_M Q(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} Q(x,y)\,\mathrm{d}x$ je trochu obtížnější, opírá se o následující vlastnost integrálu závislého na parametru:

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na nějaké otevřené množině Ω obsahující normální množinu $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Potom integrál $F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ je spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$. Má-li navíc f spojitou parciální derivaci f'_x na Ω a φ', ψ' jsou spojité na $\langle a,b\rangle$, pak F má derivaci na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x). \qquad (\triangle)$$

Rovnost $(\triangle)$ využijeme při výpočtu $\iint_M Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Fubiniova věta dává

$$\iint_M Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

Položíme-li $f = Q$ v rovnosti $(\triangle)$, pak

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}y = F'(x) - Q(x,\psi(x))\psi'(x) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

a tedy

$$\iint_M Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = [F(x)]_a^b - \int_a^b Q(x,\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f(a,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b Q(x,\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zároveň však platí

$$\int_{\partial M} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_p} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_\ell} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_h} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_d} Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f(a,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b Q(x,\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

tj. $\displaystyle\iint_M Q(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} Q(x,y)\,\mathrm{d}x.$ □

Poznámka. a) Analogicky by se tvrzení dokázalo pro normální množinu vzhledem k ose y.

b) Tvrzení zůstane v platnosti, i když části hranice Γ_d a Γ_h budou po částech hladké křivky.

c) Tvrzení dále bude platit i v případě, kdy M je regulární množina (připomeňme, že to je množina, kterou lze „rozřezat“ na konečný počet normálních množin).

d) Platnost tvrzení lze rozšířit i na případ ještě komplikovanějších množin než jsou regulární množiny (např. typu „řez ementálem s nepříliš pěknými oky“). Zejména lze (za určitých dalších předpokladů) připustit hranice, které obsahují konečný počet singulárních bodů.

e) Obsah (míru) ohraničené množiny M lze pomocí Greenovy věty počítat jako

$$\lambda(M) = \frac{1}{2}\int_{\partial M} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 19.8. Určete obsah eliptické výseče mezi body $A = [\varphi(t_1), \psi(t_1)]$ a $B = [\varphi(t_1), \psi(t_2)]$, kde $[\varphi(t), \psi(t)] = [a\cos t, b\sin t]$, $a, b > 0$, $0 \le t_1 < t_2 \le \pi/2$.

Řešení. Budeme integrovat přes hranici eliptické úseče, která se skládá ze tří hladkých částí: úsečky $\overline{OA}$, oblouku elipsy $\widehat{AB}$ a úsečky $\overline{BO}$ (O značí počátek). Aby platil vzorec nad příkladem, je potřeba hranici úseče orientovat kladně, tj. ve směru $O \to A \to B \to O$. Úsečku OA parametrizujme např. rovnicemi $x = at\cos t_1$, $y = bt\sin t_1$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, vůči této parametrizaci je orientace úsečky souhlasná. Příslušný křivkový integrál je potom vyjádřen

$$\int_{\overline{OA}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 (-bt\sin t_1, at\cos t_1) \cdot (a\cos t_1, b\sin t_1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Oblouk $\widehat{AB}$ je vůči parametrizaci $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ (viz zadání) orientován souhlasně, platí tedy

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_{t_1}^{t_2} (-b\sin t, a\cos t) \cdot (-a\sin t, b\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= ab\int_{t_1}^{t_2} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = ab\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = ab(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Integrál přes úsečku $\overline{BO}$ bude, podobně jako integrál přes úsečku $\overline{OA}$, nulový. Celkově tedy

$$\lambda(\text{úseče}) = \frac{1}{2}\int_{\overline{OA}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \frac{1}{2}\int_{\widehat{AB}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \frac{1}{2}\int_{\overline{BO}} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 + \frac{1}{2}ab(t_2 - t_1) + 0 = \frac{1}{2}ab(t_2 - t_1).$$

Poznamenejme, že pro $t_1 = 0$ a $t_2 = 2\pi$ dostáváme celou elipsu, vzorec tedy souhlasí se známým vzorcem pro obsah množiny ohraničené elipsou $S = \pi ab$ (ten se redukuje na vzorec pro obsah kruhu, je-li $a = b$).

Poznámka. To, že v předchozím příkladu byly integrály přes obě úsečky vycházející z počátku nulové, není náhoda. Plyne to z faktu, že práci přes úsečku spojující počátek s nějakým bodem roviny koná silové pole $\vec{f}(x, y) = (-y, x)$. V každém bodě $[x, y]$ úsečky je tento vektor kolmý k úsečce, což znamená, že žádnou práci nevykoná. Obecně tedy, při výpočtu obsahu pomocí Greenovy věty, integrály přes úsečky vycházející z počátku není potřeba počítat.