19 Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

Definice 19.1 (nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě)**.** Nechť Ω je oblast (tj. souvislá a otevřená množina) v $\mathbb{R}^2$, $\vec{f} = (P, Q)$ je spojité vektorové pole na Ω, $A = [x_A, y_A]$ a $B = [x_B, y_B]$ jsou body v Ω a Γ je po částech regulární křivka ležící v Ω jdoucí z bodu A do bodu B. Pokud hodnota integrálu $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}s$ nezávisí na volbě křivky Γ, říkáme, že *integrál nezávisí na integrační cestě mezi body A, B* a píšeme

$$\int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Jestliže uvedený integrál nezávisí na integrační cestě mezi libovolnými body A, B (zvolenými kdekoliv v oblasti Ω), říkáme, že *integrál nezávisí na integrační cestě v oblasti Ω.*

Věta 19.2. *Nechť $\int_\Gamma (P, Q) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí na integrační cestě v oblasti Ω. Potom výraz*

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y \quad (\textit{Pfaffova forma, Johann Friedrich Pfaff 1765–1825, Němec})$$

je totálním diferenciálem kmenové funkce (potenciálu)

$$\Phi(x, y) = \int_{[x_A, y_A]}^{[x,y]} (P, Q) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

(zápis chápeme tak, že integrujeme po libovolné křivce ležící v oblasti Ω a spojující body $[x_A, y_A]$ a $[x, y]$).

Věta 19.3. *Nechť P, Q jsou spojité v rovinné oblasti Ω a nechť Pfaffova forma $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce Φ (tj. platí $P = \Phi'_x$, $Q = \Phi'_y$). Potom integrál $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ nezávisí na integrační cestě v Ω a platí*

$$\int_A^B P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \Phi(B) - \Phi(A).$$

Poznámka. Předchozí dvě věty tedy říkají, že pro nezávislost integrálu na integrační cestě je nutné a stačí, aby existovala funkce Φ, pro kterou platí, že $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ je jejím totálním diferenciálem.

Z praktického hlediska je podstatná následující věta, která dává postačující podmínku pro nezávislost na integrační cestě. Oblast Ω se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže každou uzavřenou křivku ležící v Ω lze „stáhnout“ v bod, aniž bychom oblast opustili. Jednoduše souvislá oblast tedy nemá žádné „díry“.

Věta 19.4 (postačující podmínka pro nezávislost integrálu na integrační cestě)**.** *Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{R}^2$, P, Q jsou spojité spolu s parciálními derivacemi P'_y, Q'_x na Ω a platí*

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y) \quad \forall [x, y] \in \Omega.$$

Potom $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ nezávisí na integrační cestě v Ω.

Poznámka. a) Předpoklad jednoduše souvislé oblasti obecně nelze vynechat – pokud oblast není jednoduše souvislá, tak vektorové pole $\vec{f}$ může, ale také nemusí mít potenciál. Např. pole

$$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

je spojité na $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$ a není těžké nalézt potenciál (lze i uhodnout) $\Phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C$. Podle věty 19.3 tedy integrál $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí na integrační cestě.

Uvažujme nyní např. vektorové pole

$$\vec{g}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

které je spojité opět na oblasti $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Spočítejme integrál $\int_\Gamma \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ přes jednotkovou kružnici se středem v počátku:

$$\int_\Gamma \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi,$$

což znamená, že integrál závisí na integrační cestě (podle věty 19.3 tedy $\vec{g}$ nemůže mít v $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 0]$ potenciál).

b) V případě integrálu vektorového pole $\vec{f} = (P, Q, R)$ přes prostorovou křivku Γ bychom nezávislost na integrační cestě definovali analogicky. Obsah vět 19.2, 19.3 a 19.4 zůstává v platnosti, přičemž podmínka z věty 19.4 se modifikuje na

$$\operatorname{rot} \vec{f} := \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big) = \vec{o}.$$

To znamená, že postačující podmínkou pro nezávislost integrálu na integrační cestě v jednoduše souvislé prostorové oblasti Ω jsou rovnosti $R'_y = Q'_z$, $P'_z = R'_z$, $Q'_x = P'_y$ v Ω.

Příklad 19.5. Rozhodněte, zda vektorové pole $\vec{f} = (xy^2 - 2, x^2y + 5y^2)$ je potenciálové (konzervativní), pokud ano, nalezněte příslušný potenciál. $[\Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - 2x + \frac{5}{3}y^3 + C]$

Příklad 19.6. $\int_{[1,0,0]}^{[2,-1,3]} (2xy, x^2 - z, 1 - y) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$. [2]

20 Plochy v prostoru

Definice 20.1 (prostorové plochy a souvisejících pojmů).

1. Nechť S_{uv} je uzavřená a ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$ taková, že existuje oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ splňující $\Omega \subseteq S_{uv}$ (S_{uv} tedy nemůže být bod nebo křivka) a nechť $\mathscr{F} = [\varphi, \psi, \chi]$ je 3-funkce spojitá na S_{uv}. *Plochou v* $\mathbb{R}^3$ *(prostorovou plochou)* nazveme množinu $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), [u, v] \in S_{uv}\}$ a 3-funkci $\mathscr{F}$ nazveme *parametrizací plochy* S.
2. Nechť množina S_{uv} z předchozího bodu má po částech regulární hranici ∂S_{uv}, $\mathscr{F}$ je prostá na S_{uv}, Jacobiova matice $\mathscr{F}'$ je spojitá na S_{uv} a tečné vektory
$$\vec{t}_u(u, v) = (\varphi'_u(u, v), \psi'_u(u, v), \chi'_u(u, v)), \qquad \vec{t}_v(u, v) = (\varphi'_v(u, v), \psi'_v(u, v), \chi'_v(u, v))$$
jsou lineárně nezávislé pro $\forall [u, v] \in S_{uv}$. Pak plochu S nazveme *(jednoduchou) hladkou plochou.* Obraz $\mathscr{F}(\partial S_{uv})$ křivky ∂S_{uv} nazveme *okrajem plochy* S, budeme značit ∂S (s vědomím, že jsme v kolizi se značením, neboť symbol ∂S jsme používali také pro hranici množiny, což je v našem případě opět S). Z uvedených předpokladů je zřejmé, že hladké plochy se nikde neprotínají, nemají žádné „ostré" hrany ani vrcholy, a v každém bodě plochy lze sestrojit tečnou rovinu.
3. Plochu $S \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme *po částech hladkou plochou*, existují-li hladké plochy $S_1, S_2, \dots, S_n$ takové, že platí
   - (i) $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$;
   - (ii) $S_i \cap S_j \subseteq \partial S_i \cap \partial S_j$, $\forall i \neq j$, přičemž $S_i \cap S_j$ je buď regulární křivka, nebo po částech regulární křivka (může být i uzavřená) – v tomto případě říkáme, že S_i a S_j jsou *přilehlé plochy*, nebo bod, nebo prázdná množina;
   - (iii) Pro $i \neq j \neq k$ je $S_i \cap S_j \cap S_k$ jednobodová nebo prázdná množina;
   - (iv) Pro každé $i = 2, 3, \dots, n$ je plocha S_i přilehlá k některé z ploch $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$.
4. Křivku Γ nazveme *částí okraje* po částech hladké plochy S (která se skládá z n hladkých ploch), jestliže existuje právě jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tak, že $\emptyset \neq \Gamma \cap \partial S_i \subseteq \partial S_i$. *Okraj* ∂S *po částech hladké plochy* S pak definujeme jako sjednocení všech částí hranice této plochy.
5. Po částech hladká plocha S se nazývá *uzavřená*, jestliže $\partial S = \emptyset$. Příkladem uzavřené plochy je kulová plocha, povrch kvádru, válce, kužele, atp.

Poznámka. a) V dalším uvidíme, že důležitou roli bude hrát normálový vektor v bodech plochy. Protože $\vec{t}_u$, $\vec{t}_v$ jsou tečné vektory, normálový vektor je dán vektorovým součinem $\vec{t}_u \times \vec{t}_v$. V případě hladké plochy lineární nezávislost vektorů $\vec{t}_u$ a $\vec{t}_v$ na celé množině S_{uv} zaručuje, že vektorový součin je nenulový, a tedy normálový vektor v každém bodě hladké plochy existuje. Navíc se spojitě mění díky předpokladu spojitosti $\mathscr{F}'$.

b) Graf funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$, $[x, y] \in S_{xy}$ představuje plochu. Lze ji vždy zparametrizovat nekonečně mnoha způsoby, např. $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, $[u, v] \in S_{xy}$. Analogicky pro graf funkcí $y = g(x, z)$ a $z = h(y, z)$.

c) Hladké plochy mají dvě „strany". Nepatří mezi ně např. známý Möbiův list (August Ferdinand Möbius 1790–1868, Johann Benedikt Listing 1808–1882, Němci), který lze popsat parametricky $x = \cos t + p \cos t/2 \cos t$, $x = \sin t + p \cos t/2 \sin t$, $z = p \sin t/2$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $p \in \langle p_{\min}, p_{\max} \rangle$ (takto popsaný list by měl jednotkovou délku). Druhým nejznámějším příkladem plochy, která nemá dvě strany, je Kleinova nádoba (Felix Christian Klein 1849–1925, Němec). Tu si lze zjednodušeně představit jako uzavřenou nádobu, která nemá vnitřek ani vnějšek. Podobných ploch je známo více, nazýváme je *jednostrannými plochami.*

d) Pro potřeby plošného integrálu II. druhu je třeba plochu orientovat. Plochu orientujeme tak, že vybereme směr vektoru normály. Jednostranné plochy nelze orientovat.