21 Plošný integrál

Definice 21.1 (plošného integrálu I. druhu přes hladkou plochu)**.** Nechť S je hladká plocha s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi, \chi]$ a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na nějaké prostorové oblasti obsahující plochu S. Potom definujeme *plošný integrál I. druhu* vztahem

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S := \iint_{S_{uv}} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))|\vec{t}_u(u,v) \times \vec{t}_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

Poznámka. a) Za uvedených předpokladů je funkce $f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))|\vec{t}_u(u,v) \times \vec{t}_v(u,v)|$ spojitá na S_{uv}, tudíž je integrovatelná a definice tedy má smysl.

b) Jako motivace pro takto zavedený integrál poslouží úloha spočítat hmotnost plochy S, kde funkce f představuje plošnou hustotu. Pro jednoduchost předpokládejme, že S_{uv} je obdélník. Uvedený vzorec se odvodí tak, že množina S_{uv} se (stejně jako u zavedení dvojného integrálu) „rozřeže“ na malé obdélníky $I_{jk} = \langle u_{i-1}, u_i\rangle \times \langle v_{j-1}, v_j\rangle$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Tyto obdélníky zároveň určují dělení plochy pomocí malých plošek S_{ij}. Myšlenka je, že obsah každé plošky S_{ij} nahradíme obsahem části tečné roviny (nad obdélníkem I_{ij}), například v bodě $\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1})$. Lze ukázat, že obsah této části tečné roviny je roven $|\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{i-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{i-1})|(u_i - u_{i-1})(v_i - v_{i-1})$. Aproximace hmotnosti plošky S_{ij} je pak dána hodnotou $f(\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1}))|\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{i-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{i-1})|(u_i - u_{i-1})(v_i - v_{i-1})$ a aproximace hmotnosti celé plochy S je

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1}))|\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{i-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{i-1})|(u_i - u_{i-1})(v_i - v_{i-1}).$$

To ale není nic jiného než integrální součet, který v limitě (pro každou nulovou posloupnost dělení S_{uv}) dává pravou stranu rovnosti $(*)$.

c) Stejně jako u křivkového integrálu lze ukázat, že hodnota integrálu nezávisí na zvolené parametrizaci.

d) Integrál $\iint_S \mathrm{d}S$ představuje obsah plochy S.

e) Je-li plocha S dána explicitně, např. jako $z = f(x,y)$, $[x,y] \in S_{xy}$ a jsou-li parciální derivace f'_x, f'_y spojité na S_{xy}, pak pro velikost normálového vektoru v bodě $[x,y] \in S_{xy}$ platí $|\vec{n}(x,y)| = \sqrt{1 + [f'_x(x,y)]^2 + [f'_y(x,y)]}$.

f) Je-li S po částech hladká plocha skládající se z hladkých ploch S_i, $i = 1, \dots, n$, pak definujeme

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

kde S_i jsou hladké. Opět lze ukázat, že hodnota nezávisí na konkrétním rozkladu na hladké plochy.

Příklad 21.2. $\iint_S (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, kde S je povrch kužele $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$. $[\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})]$

Definice 21.3 (plošného integrálu II. druhu přes hladkou plochu)**.** Nechť S je orientovaná hladká plocha s parametrizací $\mathscr{F} = [\varphi, \psi, \chi]$ a vektorové pole $\vec{f} = (P, Q, R)$ je spojité v nějaké prostorové oblasti obsahující plochu S. Označme $\mathrm{d}\vec{S} = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}x\mathrm{d}z, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ (orientovaný diferenciál plochy). Potom *plošný integrál II. druhu* definujeme jako

$$\iint_S \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} := \pm \iint_{S_{uv}} \vec{f}(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot (\vec{t}_u(u,v) \times \vec{t}_v(u,v))\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (**)$$

Poznámka. a) Motivace pro takto zavedený integrál je následující. Buď τ rovinná plocha, přes kterou protéká ve směru jejího jednotkového normálového vektoru $\vec{n}_1$ nestlačitelná kapalina konstantní rychlostí (tj. nezávislou na poloze i čase) danou vektorem $\vec{f_c}$. Potom (objemové) množství kapaliny, které proteče přes plochu τ za jednotku času je dáno číslem $\vec{f_c} \cdot \vec{n}_1 \lambda(\tau)$, kde $\lambda(\tau)$ je obsah plochy τ. Jaký bude tok vektorového pole $\vec{f}$ přes plochu S? Uvažujeme-li opět pro jednoduchost množinu S_{uv} jako obdélník, který rozdělíme na malé obdélníky $I_{ij} = \langle u_{i-1}, u_i\rangle \times \langle v_{j-1}, v_j\rangle$, pak aproximace toku přes část plochy S_{ij} (ta je dána obrazem $\mathscr{F}(I_{ij})$) bude dána tokem vektoru $\vec{f}(u_{i-1}, v_{j-1})$ přes část tečné roviny (nad obdélníkem I_{jk}) v bodě $\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1})$, tj. hodnotou

$$\begin{aligned}
&\vec{f}(\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1})) \cdot \frac{\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{j-1})}{|\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|} |\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})\\
=&\vec{f}(\mathscr{F}(u_{i-1}, v_{j-1})) \cdot (\vec{t}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \vec{t}_v(u_{i-1}, v_{j-1}))(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).
\end{aligned}$$

Aproximací celkového toku pak bude součet přes všechny obdélníky I_{ij}, což ale není nic jiného než integrální součet, který v limitě (pro každou nulovou posloupnost dělení S_{uv}) dává pravou stranu vzorce $(**)$.

b) Pokud plochu S lze vyjádřit explicitně zároveň jako $x = x(y,z)$, $[y,z] \in S_{yz}$, resp. $y = y(x,z)$, $[x,z] \in S_{xz}$, resp. $z = z(x,y)$, $[x,y] \in S_{xy}$, pak lze integrál vyjádřit jako

$$\begin{aligned}&\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \pm\iint_{S_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint_{S_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \pm \iint_{S_{xy}} R(x,y,z(x,z))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

kde „+“ bereme, pokud normálový vektor svírá s kladným směrem osy x, resp. y, resp. z ostrý úhel a „−“ bereme, pokud svírá tupý úhel. Je-li průmětem plochy do nějaké ze souřadných roviny křivka, klademe příslušný integrál roven nule (to odpovídá situaci, kdy normálový vektor je kolmý na vektor toku, tedy přes plochu nic neproteče).

Příklad 21.4. Určete tok kapaliny s rychlostním polem $\vec{f} = (x,y,z)$ přes válcovou plochu $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = 1$. Plocha je orientována tak, že normálový vektor směřuje od osy z „pryč“. $[2\pi]$

Poznámka. Vztah mezi plošným integrálem I. a II. druhu je následující. Je-li S hladká plocha, potom její normálový vektor $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$ lze normalizovat vydělením jeho velikostí, tj. vektor $\vec{n}_1 = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|}$ je jednotkový a platí

$$\iint_S \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pm \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}_1\,\mathrm{d}S.$$

Věta 21.5 (Gaussova–Ostrogradského, Michail Vasiljevič Ostrogradskij 1801–1862, kozák z Ukrajiny)**.** *Nechť M je normální množina v $\mathbb{R}^3$ taková, že její hranice ∂M je po částech hladká uzavřená plocha orientovaná ve směru vnější normály a nechť vektorové pole $\vec{f} = (P,Q,R)$ je spojité na M a má zde spojité parciální derivace P'_x, Q'_y a R'_z. Potom platí*

$$\iiint_M \operatorname{div} \vec{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\partial M} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

kde $\operatorname{div} \vec{f} := P'_x + Q'_y + R'_z$.

Poznámka. Platnost tvrzení lze rozšířit i na komplikovanější množiny než je normální, úplně libovolné množiny to ale být nemohou.

Příklad 21.6. Určete tok vektorového pole $\vec{f} = (yz, xz, xy)$ přes boční stěny čtyřstěnu s vrcholy $[0,0,0]$, $[2,0,0]$, $[0,1,0]$ a $[0,0,2]$, které jsou orientovány tak, že normalový vektor směřuje z tělesa „ven“. Využijte faktu: Tok přes boční stěny = tok přes povrch − tok přes podstavu. $[\frac{1}{6}]$

Poznámka. Objem tělesa Ω lze pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty počítat jako

$$V(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{\partial\Omega} (x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Věta 21.7 (Stokesova, George Gabriel Stokes 1819–1903, Ir)**.** *Nechť S je hladká plocha, která je spolu se svým okrajem ∂S orientována dle obrázku a $\vec{f}$ je vektorové pole, které má spojité parciální derivace na nějaké oblasti obsahující plochu S. Potom platí*

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Poznámka. Tvrzení zůstane v platnosti i v případě po částech hladké plochy, která má neprázdný okraj.

Příklad 21.8. Pomocí Stokesovy věty (po horní polovině kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$) vypočtěte integrál $\int_\Gamma (x^2y^3, 1, z) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, kde Γ je kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$, $z = 0$ orientována tak, že v rovině (x,y) „obíháme“ proti smyslu pohybu hodinových ručiček.

Řešení. Pro rotaci zadaného vektorového pole platí

$$\operatorname{rot} \vec{f} = (0,0,3x^2y^2).$$

Podle Stokesovy věty tedy platí

$$I = \iint_S (0,0,3x^2y^2) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Parametrické vyjádření zadané části kulové plochy je $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\vartheta \in \langle 0, \pi/2\rangle$. Tečné vektory jsou dány

$$\vec{t_\varphi} = (-r\sin\varphi\cos\vartheta, r\cos\varphi\cos\vartheta, 0), \quad \vec{t_\vartheta} = (-r\cos\varphi\sin\vartheta, -r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,.$$

Dále

$$\vec{t_\varphi} \times \vec{t_\vartheta} = (r^2\cos\varphi\cos^2\vartheta, r^2\sin\varphi\cos^2\vartheta, r^2\cos\vartheta\sin\vartheta)\,,$$

$$I = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi/2}(0,0,3r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\vartheta)\cdot(r^2\cos\varphi\cos^2\vartheta, r^2\sin\varphi\cos^2\vartheta, r^2\cos\vartheta\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 3r^6\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^5\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\cos\vartheta = t\\ \mathrm{d}\vartheta = -\frac{\mathrm{d}t}{\sin\vartheta}\\ 0\to 1, \pi/2\to 0\end{array}\right| = \frac{3}{4}r^6\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\int_0^1 t^5\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}r^6\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{3}{8}\frac{1}{6}r^6[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{8}\pi r^6\,.$$

Několik operátorových identit

Platí:
1. $\operatorname{div}\vec{f} = \nabla\cdot\vec{f}$,
2. $\operatorname{rot}\vec{f} = \nabla\times\vec{f}$,
3. $\operatorname{rot}\nabla f = \vec{o}$,
4. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f} = 0$,
5. $\operatorname{div}\nabla f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} =: \Delta f$ (Laplaceův operátor, Pierre Simon de Laplace 1749–1827, Francouz).

Poznámka. Stokesovu větu lze interpretovat také takto: je-li nějaké vektorové pole $\vec{f}$ rotací jiného vektorového pole, pak plošný integrál $\iint_S \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ závisí pouze na okraji plochy ∂S, nikoliv na jejím vnitřku. V takovém případě je podle bodu 4. předchozích identit $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ a říkáme, že *pole $\vec{f}$ je nezřídlové.*