Verze 21. října 2019

3. Analytická geometrie

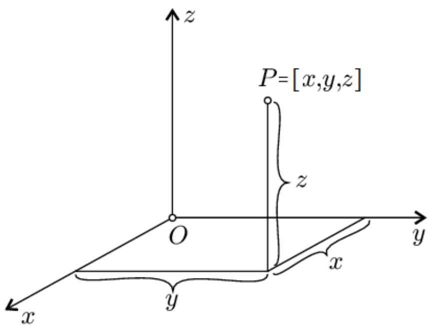
Objekty v rovině i prostoru (body, úsečky, přímky, křivky, roviny, plochy atd.) lze popsat pomocí čísel. Popisem a studiem těchto objektů se zabývá analytická geometrie. Tento popis má v současnosti velký význam v technické praxi, využívá se nejen při konstrukci strojů, ale i pro řízení obráběcích strojů apod. Nejprve si připravíme aparát vektorů, potom se budeme zabývat „rovnými“ útvary a nakonec kvadratickými křivkami a plochami.

3A. Vektorový počet

Body a útvary v prostoru budeme popisovat pomocí trojic (v případě roviny pomocí dvojic) reálných čísel, budeme se pohybovat v prostoru $\mathbb{R}^3$ nebo $\mathbb{R}^2$, což je kartézský součin množiny reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,, \qquad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Zvolíme-li v (trojrozměrném) prostoru bod O zvaný **počátek** a z něj vycházející tři navzájem kolmé polopřímky zvané **poloosy** s jednotkovými délkami na nich, dostáváme **soustavu pravoúhlých souřadnic** $Oxyz$. Každý bod prostoru lze potom jednoznačně popsat pomocí jeho **souřadnic** – trojic reálných čísel, tj. prvkem $\mathbb{R}^3$.



Obr. 3.1: Souřadnice $[x, y, z]$ charakterizující polohu bodu $P[x, y, z]$ v trojrozměrné pravotočivé soustavě pravoúhlých souřadnic $Oxyz$.

Podle pořadí jednotlivých poloos rozeznáváme pravotočivou a levotočivou souřadnicovou soustavu. **Pravotočivá soustava** s osami x, y, z je na Obr. 3.1. Prohozením poloos x a y bychom dostali soustavu levotočivou.

Obvykle se využívá pravotočivá soustava. V ní při pohledu z (kladné) poloosy z pootočením poloosy x o pravý úhel v kladném směru (proti směru pohybu hodinových ručiček) dostaneme poloosu y. Libovolný bod P prostoru tak lze popsat pomocí jeho tzv. souřadnic x, y, z, viz Obr.3.1:

$$P = [x, y, z] \quad \text{nebo} \quad P[x, y, z]\,.$$

Podobně zvolením počátku O a dvou navzájem kolmých poloos x a y dostáváme souřadnicovou soustavu v rovině. Uvažujeme soustavu pravotočivou, při které pootočením osy x o pravý úhel v kladném směru dostáváme osu y. Každý bod roviny potom lze jednoznačně popsat pomocí jeho souřadnic $P = [x, y]$.

Označení, vázaný a volný vektor

Na rozdíl od teorie množin a dalších oborů, kde se množiny značí velkými písmeny a jejich prvky malými písmeny, v geometrii je tradice opačná: **body se značí velkými písmeny** a **množiny malými písmeny: přímky latinskými, roviny řeckými písmeny**.

Ani označení souřadnic není jednotné. V prostoru $\mathbb{R}^3$ s osami x, y, z jsou souřadnice obecného bodu P označeny $[x, y, z]$, pokud je bodů více, souřadnice bodů rozlišíme indexy: $A = [x_A, y_A, z_A]$, často se rovnítko vynechává a píše jenom $A[x_A, y_A, z_A]$. V rovině je značení souřadnic x, y a bodů $A = [x_A, y_A]$ analogické.

Většina pojmů lze zavést nejen v prostoru $\mathbb{R}^3$ a rovině $\mathbb{R}^2$ ale i v prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$. Potom je nejjednodušší označovat osy a jednotlivé souřadnice čísly, například

$$\text{osy} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad \text{vektory } \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{a body} \quad A = [A_1, A_2, \ldots, A_n].$$

Tento zápis zahrnuje nejen body v rovině v případě $n = 2$ a body v prostoru v případě $n = 3$, ale i body v tzv. **n-rozměrném prostoru**, které není snadné si představit, není problém však v něm s body pracovat.

V dalším se budeme zabývat vektory v prostoru. Osy budeme označovat x, y, z a souřadnice bodů indexy např. $A = [x_A, y_A, z_A]$, a vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Ve fyzice se vektory označují i velkými písmeny, např. síla $\mathbf{F}$. Rovinný případ dostaneme „odstraněním“ třetí složky.

Definice 3.1. Uspořádanou dvojici bodů $A = [x_A, y_A, z_A]$, $B = [x_B, y_B, z_B]$ nazveme **vázaný vektor** v $\mathbb{R}^3$ s **počátkem** v bodě A a s **koncem** v bodě B. Značíme ho $\overrightarrow{AB}$.

Vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ lze zadat také bodem A a trojicí reálných čísel $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Samotnou uspořádanou trojici čísel nazýváme **volný vektor** a značíme $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \overrightarrow{AB}$ a čísla $u_1 = x_B - x_A$, $u_2 = y_B - y_A$ a $u_3 = z_B - z_A$ pak **souřadnicemi** nebo **složkami** volného vektoru $\mathbf{u}$.

Je jasné, že vektor $\mathbf{u}$ body A, B neurčuje, protože i jiné body C, D mohou vést k témuž volnému vektoru $\mathbf{u}$. Proto přesnější matematický přístup zavádí binární relaci mezi dvěmi vázanými vektory: Řekneme, že dva vázané vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ jsou ekvivalentní, jestliže

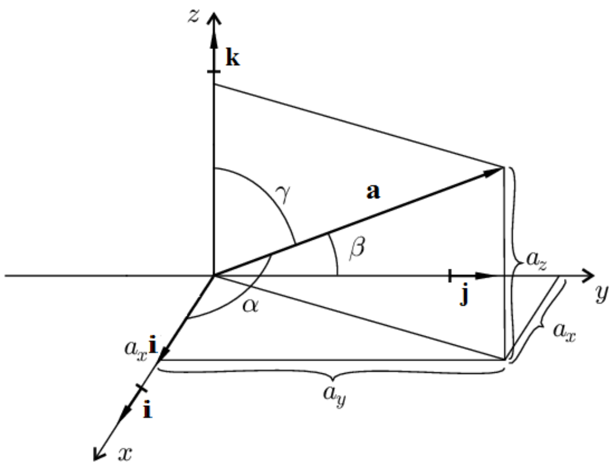
$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2, d_3 - c_3).$$

Tato relace rozkládá množiny vázaných vektorů na třídy zvané volné vektory. Volný vektor je tedy množina vektorů mající stejnou velikost, směr i orientaci. K určení této množiny stačí zadat jeden z nich, obvykle se vybírá vektor mající počátek v bodě $\mathbf{0}$.

Protože jak body, tak vektory jsou určeny trojicí reálných čísel, abychom je rozlišili, v dalším budeme označovat **body souřadnicemi v hranatých závorkách**, např. $A = [2, 7, 3]$, a **vektory souřadnicemi v kulatých závorkách**, např. $\mathbf{u} = (3, 6, 2)$. Vedle zápisu vektoru $\overrightarrow{AB}$ a $\mathbf{u}$ se užívá také symbol s „šipkou“ $\overrightarrow{u}$ nebo s „podtržením“ $\underline{u}$, které se však nebudeme používat. Dále budeme slovem vektor myslet volný vektor.

Definice 3.2. Buď $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ (případně $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$) nenulový volný vektor v $\mathbb{R}^3$, viz Obr. 3.2. **Kolmé průměty** vektoru $\mathbf{a}$ do souřadnicových os x, y, z jsou jeho souřadnice a_x, a_y, a_z (případně a_1, a_2, a_3). Úhly, které svírá vektor $\mathbf{a}$ se souřadnými poloosami x, y, z, označíme po řadě α, β, γ. Čísla $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ se nazývají **směrové kosíny** vektoru $\mathbf{a}$.

Velikost vektoru $\mathbf{a}$ označíme symbolem $a := |\mathbf{a}|$. Jednotkové vektory ve směru os x, y, z budeme označovat $\mathbf{i} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\mathbf{j} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, $\mathbf{k} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.



Obr. 3.2: Vyjádření vektoru $\mathbf{a}$ pomocí jeho složek a_x, a_y, a_z. V obrázku jsou rovněž vyznačeny úhly α, β, γ, které svírá vektor $\mathbf{a}$ se souřadnicovými osami, a jednotkové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Věta 3.3. Buď $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ nenulový volný vektor v $\mathbb{R}^3$. Pojmy z předešlé definice splňují:

$$a := |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \qquad a_x = a\,\cos(\alpha)\,, \quad a_y = a\,\cos(\beta)\,, \quad a_z = a\,\cos(\gamma)\,. \tag{3.1}$$

Pomocí jednotkových vektorů $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ lze vektor $\mathbf{a}$ jednoznačně vyjádřit $\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$.

Poznámky. Ze vztahu (3.1) plyne $a_x > 0$ pro $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, $a_x = 0$ pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $a_x < 0$ pro $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$. Pomocí souřadnic a Věty 3.3 lze určit velikost vektoru a úhly, které svírá se souřadnicovými osami.

Operace s vektory v prostoru

V dalším budeme označovat souřadnice vektorů číselnými indexy $1, 2, 3$.

Skalární násobek vektoru v geometrii pro $c > 0$ je vektor stejného směru a orientace, velikost je c-krát větší, v případě $c < 0$ se směr nemění, orientace je opačná a velikost $|c|$-krát větší. Představíme-li si vektor jako posunutí (translaci), která libovolný bod P posune o vektor $\mathbf{u}$ do bodu $P + \mathbf{u}$, součtu dvou vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ odpovídá složení těchto dvou posunutí: bod P je posunut do bodu $P + \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Každý vektor v geometrii lze jednoznačně popsat trojicí čísel, což je speciální případ matic typu $(3, 1)$ případně $(1, 3)$ – nerozlišujeme řádkové a sloupcové vektory. Sčítání a skalární násobení vektoru lze proto definovat po složkách stejně jako v případě matic:

Definice 3.4. **(Součet a skalární násobek)** Pro vektory je operace **součet** $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ definovaná vztahem

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \equiv (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

a operace **násobení skalárem** $c\mathbf{u}$, kde $c \in \mathbb{R}$, ke dán $c\,\mathbf{u} \equiv c\,(u_1, u_2, u_3) := (c\,u_1, c\,u_2, c\,u_3)$. Operace odčítání je dána vztahem $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\,\mathbf{v}$.

Poznámky.

(a) Geometrická i analytická definice skalárního násobku a součtu vektorů dává stejný výsledek.

(b) Uvedené operace pro vektory jsou definovány i pro vektory mající n složek stejně jako u matic.

(c) Povšimněte si, že volné vektory spolu s binární operací sčítání jsou příkladem grupy, která byla definována v Kapitole 1 části Algebraické struktury. Neutrálním prvkem je zde tzv. **nulový vektor** $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, prvkem opačným k vektoru $\mathbf{u}$ je vektor $-\mathbf{u} := (-1) \cdot \mathbf{u}$.

(d) Množinu volných vektorů v $\mathbb{R}^3$ (i vektorů, tj. n-tic, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ s operacemi součet a skalární násobek) se nazývá **vektorový prostor** nebo také **lineární prostor**.

(e) Stejně jako u řádků v Kapitole 2 části Hodnost matice lze u vektorů zavést pojem závislosti a nezávislosti vektorů: **$\mathbf{v}$ je závislý na vektorech $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$**, pokud ho lze napsat jako **lineární kombinaci** vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, tj. pro nějaká $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ platí $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$.

Řekneme také, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou **lineárně nezávislé**, pokud jediná jejich lineární kombinace, která dává nulový vektor, je kombinace nulová, tj. $c_i = 0$.

(f) V trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ nejvýše tři vektory jsou nezávislé a každé čtyři vektory v $\mathbb{R}^3$ už musí být závislé. Dva vektory jsou závislé, pokud mají stejný směr, tj. leží na stejné přímce.

(g) Nezávislé vektory nazveme **bází**, pokud každý vektor prostoru lze vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Trojice jednotkových vektorů $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ proto tvoří tzv. **kanonickou bázi**. Bází v prostoru je nekonečně mnoho, každá trojice nezávislých vektorů v $\mathbb{R}^3$ tvoří bázi. Trojice nenulových vektorů je lineárně nezávislá, pokud vektory neleží na jedné „přímce“ ani v jedné „rovině“.

Skalární součin

V geometrii můžeme vektory násobit skalárně i vektorově. Vedle geometrické máme i analytickou definici:

Definice 3.5. Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektory v $\mathbb{R}^3$. Jejich **skalární součin** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ je skalár (tj. číslo)

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u\,v\,\cos(\alpha)$, kde u, v jsou velikosti vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ a α úhel, který tyto vektory svírají,

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$, kde u_i, v_i jsou složky vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Bez důkazu uvedeme další tvrzení:

Věta 3.6. Obě definice skalárního součinu (a) i (b) jsou **ekvivalentní**.

Skalární součin je **komutativní**, tj. pro každé dva vektory platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

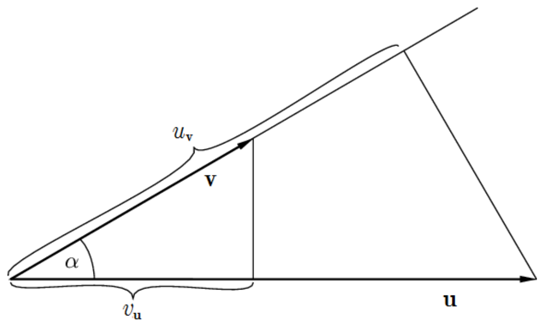
Skalární součin je **lineární** v obou proměnných, tj. pro každé čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a každé vektory platí

$$(c_1\, \mathbf{u}_1 + c_2\, \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v})\,, \qquad \mathbf{u} \cdot (c_1\, \mathbf{v}_1 + c_2\, \mathbf{v}_2) = c_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2)\,.$$

Poznámky.

(a) Výsledkem skalárního součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dvou libovolných vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je skalár.

(b) Označme u_v kolmý průmět vektoru $\mathbf{u}$ na přímku určenou směrem vektoru $\mathbf{v}$ a v_u kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}$ na přímku určenou směrem vektoru $\mathbf{u}$. Potom pro ostrý úhel α skalární součin vektorů je součin velikosti prvního vektoru a velikosti průmětu druhého vektoru: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u\, v_{\mathbf{u}} = v\, u_{\mathbf{v}}$, viz Obr. 3.3.



Obr. 3.3: Geometrický význam skalárního součinu: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u\, v_{\mathbf{u}} = v\, u_{\mathbf{v}}$.

(c) Porovnání s geometrickým vyjádření skalárního součinu dává $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u\, v\, \cos(\alpha)$, odkud lze vyjádřit kosinus úhlu, který vektory svírají:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\,.$$

(d) Speciální případ úhlu $\alpha = 0$ a $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, kdy $\cos(0) = 1$ dává $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2$, odkud plyne $u = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.

(e) Speciální případ vektorů svírajících pravý úhel, tj. úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dává $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. V tomto případě mluvíme o vektorech **kolmých** nebo **ortogonálních**.

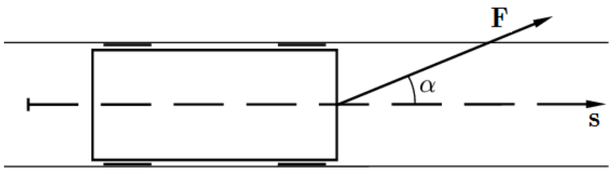
(f) Vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ s tímto skalárním součinem nazýváme **euklidovský prostor** a značíme $\mathbf{E}^3$.

Fyzikální význam skalárního součinu je vidět z následujícího příkladu:

Příklad 3.7. Vagón je tažen na přímém úseku délky $s = 20\,\mathrm{m}$ lanem, které svírá se směrem $\mathbf{s}$ pohybu vagonu úhel $\alpha = 20°$, a které je napínáno silou o velikosti $F = 800\,\mathrm{N}$. Vyjádřete práci W vykonanou silou $\mathbf{F}$ pomocí skalárního součinu a vypočtěte ji.

Řešení: Situaci načrtneme. Buď F_s průmět vektoru $\mathbf{F}$ do směru $\mathbf{s}$. Potom platí rovnost $W = F_s\, s = |\mathbf{F}|\, |\mathbf{s}|\, \cos(\alpha) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, odkud plyne

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}|\, |\mathbf{s}|\, \cos(\alpha) = 800\,\mathrm{N} \cdot 20\,\mathrm{m} \cdot \cos 20° \doteq 1.50 \cdot 10^4\,\mathrm{J}.$$



Obr. 3.4: K příkladu 3.7.

Vektorový součin

Na rozdíl od skalárního součinu výsledkem vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ je vektor. Opět vedle geometrické definice máme definici analytickou:

Definice 3.8. Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektory v $\mathbb{R}^3$. Jejich **vektorový součin** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je

(a) vektor $\mathbf{w}$ kolmý na vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ velikosti $w = u\,v\,\sin(\alpha)$ a takové orientace, že trojice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tvoří pravotočivý systém, kde α je úhel, který vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ svírají.

(b) $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} := \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou jednotkové vektory souřadnicových os, viz Definice 3.4, a u_i, v_j složky vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Bez důkazu uvedeme následující tvrzení:

Věta 3.9. Obě definice vektorového součinu (a) i (b) jsou **ekvivalentní**.
Analytický vzorec (b) lze rozepsat do složek vektoru $\mathbf{w}$

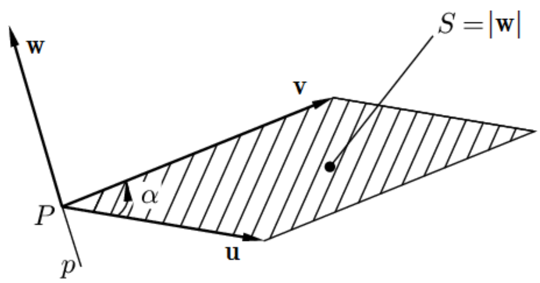
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = (u_2\,v_3 - u_3\,v_2\ ,\ u_3\,v_1 - u_1\,v_3\ ,\ u_1\,v_2 - u_2\,v_1)\ .$$

Vektorový součin není komutativní, je tzv. **antikomutativní**: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$,
Vektorový součin je **lineární** v obou proměnných, tj. pro každá čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a pro každé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, platí

$$(c_1\,\mathbf{u}_1 + c_2\,\mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} = c_1(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v})\,,\ \mathbf{u} \times (c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = c_1(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_2)\,.$$

Geometrický význam vektorového součinu

Vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dvou vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je vektor $\mathbf{w}$, který je kolmý na oba vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Jeho velikost je rovna plošnému obsahu $S = u\,v\,\sin(\alpha)$ rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ v Obrázku 3.5).



Obr. 3.5: Geometrický význam vektorového součinu $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Poznámky.

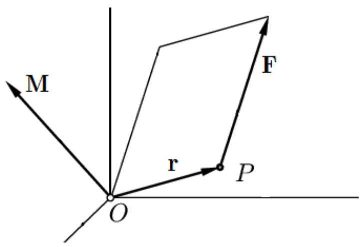
Vektorový součin lineárně závislých vektorů dává nulu, rovnoběžník jimi určený degeneruje na úsečku s nulovým plošným obsahem, speciálně $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$.

Ze skalární součinu vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ lze určit kosinus úhlu α, který svírají, z vektorového součinu pak lze určit sinus úhlu, který svírají:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}|}, \qquad \sin(\alpha) = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}|} \tag{3.2}$$

Uveďme dva příklady využití vektorového součinu ve fyzice:

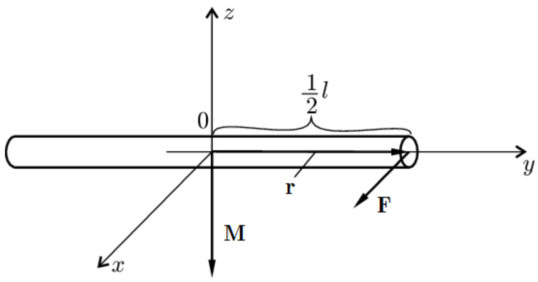
Příklad 3.10. Síla $\mathbf{F}$ působící na těleso v bodě P vyvozuje vzhledem k počátku souřadnic otáčivý moment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor bodu P, viz Obrázek 3.6.



Obr. 3.6: Otáčivý moment $\mathbf{M}$ síly $\mathbf{F}$ působící na těleso v bodě P s polohovým vektorem $\mathbf{r}$, je $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Příklad 3.11. Na konci tyče délky l působí síla $\mathbf{F}$ rovnoběžně s osou x podle Obrázku 3.7. Určete otáčivý moment síly $\mathbf{F}$ vzhledem k počátku O.

Řešení: Platí $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Vektor $\mathbf{M}$ zakreslíme podle Obrázku 3.7.



Obr. 3.7: K příkladu 3.11, velikost vektoru $\mathbf{M}$ je $M = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \sin 90° = \frac{1}{2} lF$.

Smíšený součin vektorů

V prostoru $\mathbb{R}^3$ máme ještě tzv. smíšený součin tří vektorů, tj. ternární operaci: první vektor skalárně násobíme vektorovým součinem druhého a třetího vektoru:

Definice 3.12. Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektory v $\mathbb{R}^3$. Jejich **smíšený součin** označený $[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}]$ je skalár, tj. číslo, které dostaneme, když první vektor skalárně vynásobíme vektorovým součinem druhého a třetího vektoru, tj.

$$[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že skalární součin vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ s vektorem $\mathbf{t} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ lze pomocí Věty 3.9 a rozvoje determinantu podle prvního řádku zapsat jako determinant

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (t_1, t_2, t_3) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_3 \\ w_2 & v_3 \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} v_3 & w_1 \\ w_3 & v_1 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_2 \\ w_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} .$$

Změna pořadí vektorů tak vede na změnu pořadí řádků příslušného determinantu. Vlastnosti smíšeného součinu shrneme v tvrzení:

Věta 3.13. Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektory v $\mathbb{R}^3$. Potom jejich smíšený součin lze zapsat ve tvaru determinantu:

$$[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} .$$

Součin není komutativní, při změně pořadí vektorů se mění znaménko podle znaménka permutace, při sudé permutaci se znaménko nemění, při liché permutaci se znaménko změní:

$$[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}] = [\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,\mathbf{u}] = [\mathbf{w}\,\mathbf{u}\,\mathbf{v}] = -[\mathbf{u}\,\mathbf{w}\,\mathbf{v}] - [\mathbf{v}\,\mathbf{u}\,\mathbf{w}] - [\mathbf{w}\,\mathbf{v}\,\mathbf{u}] .$$

Absolutní hodnota smíšeného součinu $[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}]$ je rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Operace s vektory v rovině

Vektory v rovině lze sčítat i násobit skalárem. Skalární součin je také

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 .$$

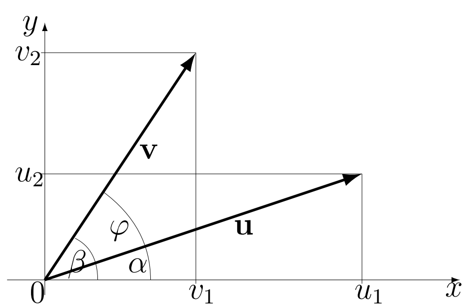
Výsledkem vektorového součinu dvou vektorů v rovině x_1, x_2 však není vektor, ale skalár; je to třetí složka vektorového součinu v prostoru, protože první dvě složky jsou nulové:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1, u_2) \times (v_1, v_2) = u_1\, v_2 - u_2\, v_1 .$$

Vektorový součin je i v rovině **antikomutativní**: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
Také úhel α dvou vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lze určit stejně jako v trojrozměrném prostoru:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}|} = \frac{u_1\, v_1 + u_2\, v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} , \qquad \sin(\alpha) = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}|} = \frac{|u_1\, v_2 - u_2\, v_1|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} .$$

Poznámky. Skalární i vektorový součin vektorů jsme si definovali geometricky i analyticky. V případě roviny lze ekvivalenci snadno ukázat. Uvažujme vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ svírající s kladnou poloosou x (orientovaný) úhel α a vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ svírající s kladnou poloosou x úhel β. Oba vektory svírají úhel $\varphi = \beta - \alpha$, viz Obr. 3.8.



Obr. 3.8: K důkazu ekvivalence geometrické a analytické definice skalárního a vektorového součinu

Pro úhel α platí $\sin(\alpha) = u_2/|\mathbf{u}|$, $\cos(\alpha) = u_1/|\mathbf{u}|$ a podobné rovnosti pro úhel β. Využitím vzorce pro rozdíl úhlů $\cos(\beta-\alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha)$ dostáváme

$$\cos(\varphi) = \cos(\beta-\alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha) = \frac{v_1}{|\mathbf{v}|}\cdot\frac{u_1}{|\mathbf{u}|} + \frac{v_2}{|\mathbf{v}|}\cdot\frac{u_2}{|\mathbf{u}|},$$

odkud vynásobením rovnosti $|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$ plyne ekvivalence obou definic skalárního součinu. Podobně využitím vzorce $\sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)$ dostáváme

$$\sin(\varphi) = \sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha) = \frac{v_2}{|\mathbf{v}|}\cdot\frac{u_1}{|\mathbf{u}|} - \frac{v_1}{|\mathbf{v}|}\cdot\frac{u_1}{|\mathbf{u}|},$$

odkud plyne ekvivalence obou definic vektorového součinu v rovině.

Vektory v n-rozměrném prostoru

Na závěr se pro zajímavost podívejme na vektory v n-rozměrném prostoru:

Uspořádané n-tice $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ reálných čísel lze ztotožnit s vektory v prostoru $\mathbb{R}^n$. Tyto vektory lze sčítat a skalárně násobit po složkách stejně jako matice.

(a) Skalární součin nedělá problém:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\cdot(v_1, v_2, \ldots, v_n) = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + \cdots + u_n\,v_n,$$

je komutativní a platí pro něj distributivní zákony jako v prostoru $\mathbb{R}^3$.

(b) Délku vektoru snadno vyjádříme pomocí skalárního součinu:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}\,.$$

(c) Dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ určují rovinu, ve které můžeme pomocí skalárního součtu určit úhel α, který svírají:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{u}|} = \frac{u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + \cdots + u_n\,v_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}}\,.$$

(d) Vektorový součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^n$ není definován: v prostoru $\mathbb{R}^n$, $n \ge 4$, je nekonečně mnoho směrů kolmých na rovinu určenou dvěma nezávislými vektory.

Místo toho lze definovat vektorový součin n–1 vektorů jako (n–1)-ární operaci, tj. operaci, která n–1 vektorům $\mathbf{u}_1 = (u_1^1, \ldots, u_n^1)$, $\mathbf{u}_2 = (u_1^2, \ldots, u_n^2)$, $\ldots$, $\mathbf{u}_{n-1} = (u_1^{n-1}, \ldots, u_n^{n-1})$ vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 \times \cdots \times \mathbf{u}_{n-1}$ jako determinant

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \ldots & u_n^{n-1} \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix},$$

kde vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots\mathbf{e}_n$ tvoří tzv. kanonickou bázi, jsou to jednotkové vektory ve směrech souřadnicových os, tj. vektor $\mathbf{e}_i$ má jedničku na i-tém místě, ostatní jsou nuly: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ a $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

(e) Také ve smíšeném součinu binární operaci vektorového součinu musíme nahradit $(n-1)$-ární operací vektorového součinu. Dostáváme tak n-nární operaci tzv. vnější součin n vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, jejímž výsledkem je determinant, tj. číslo

$$[\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n] = \det \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \ldots & u_n^n \end{vmatrix}.$$

Poznamenejme, že absolutní hodnota vnějšího součinu vyjadřuje „objem“ n-rozměrného rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$.

(f) V n-rozměrném prostoru lze definovat různá n-rozměrná tělesa, například n-rozměrný kvádr je kartézský součin intervalů

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

lze „nakreslit“ i jeho průmět do libovolné roviny. Zajímavé jsou roviny, které nejsou rovnoběžné se žádnou souřadnicovou osou. Problém je však vyznačit „viditelnost“, tj. určit, které body jsou vidět a které jsou zakryté. To je neřešitelný problém analogický problému vyznačení viditelnosti trojrozměrného tělesa promítnutého na přímku.

3B. Lineární množiny v rovině

Nejprve se budeme zabývat „rovnými“ útvary zvanými lineární množiny, protože je lze popsat lineárními rovnicemi. Útvary lze popsat různými způsoby. Implicitní popis obsahuje rovnici pro souřadnice x, y jednotlivých bodů množiny, bod patří do útvaru, pokud jeho souřadnice rovnici splňují. Proti tomu parametrický popis se skládá ze vzorců pro souřadnice bodů množiny. Vzorce obsahují parametry, dosazením konkrétních čísel z množiny parametrů za parametry dostaneme jednotlivé body množiny.

Opět je zde problém s různými označeními bodů a vektorů. V dvojrozměrném prostoru osy značíme x, y. Body budeme označovat velkými písmeny a jejich souřadnice x, y v hranatých závorkách rozlišíme indexem bodu. Obecný bod se souřadnicemi budeme značit $P = [x, y]$, souřadnice konkrétního bodu rozlišíme indexy, např. $A = [x_A, y_A]$, někdy se znak „rovná se“ vynechává. Vektory budeme značit tučnými malými písmeny a jejich souřadnice písmeny s číselnými indexy v kulatých závorkách, například $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Toto značení je nejčastější, i když logičtější by bylo psát $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$, nebo $\mathbf{u} = (x_\mathbf{u}, y_\mathbf{u})$.

Přímka v rovině

Body $P = [x, y]$ přímky v rovině lze popsat několika způsoby, některé nejsou jednoznačné, tj. různé zápisy určují stejnou přímku, jiné zase nedokáží popsat všechny přímky:

Definice 3.14. Přímka v rovině je množina bodů $P = [x, y]$ daná jedním z následujících způsobů:

(a) **(obecná rovnice přímky)** $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$,
kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly,

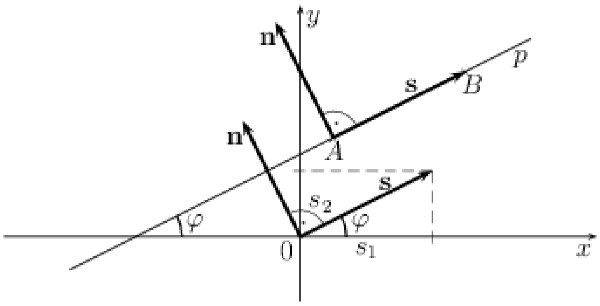
(b) **(směrnicová rovnice přímky)** $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx + q\}$,
kde $k, q \in \mathbb{R}$. Číslo q je souřadnice průsečíku přímky s osou y, k je tzv. **směrnice**,

(c) **(úseková rovnice přímky)** $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1\}$,
kde $p, q \neq 0$ jsou úseky, které přímka „vytíná“ na osách x, y, tj. průsečíky s osami jsou $[p, 0]$ a $[0, q]$,

(d) **(parametrické rovnice přímky)** $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_A + s_1 t,\ y = y_A + s_2 t \quad t \in \mathbb{R}\}$,
kde $A = [x_A, y_A]$ je bod, kterým přímka prochází, a $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ je její (nenulový) směrový vektor.

Tyto rovnice lze zapsat také **vektorově**: $\{P \in \mathbb{R}^2 \ :\ P = A + t\,\mathbf{s},\ t \in \mathbb{R}\}$.

Přímky označujeme obvykle malými latinskými písmeny, např. p, q, r, s, t.



$\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ – směrový vektor přímky p

$\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – normálový vektor přímky p

φ – směrový úhel přímky p

$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{s_2}{s_1}$ – směrnice přímky p

Obr. 3.9: K definici přímky.

Věta 3.15. (Vlastnosti jednotlivých zápisů přímky)

(a) Obecná rovnice přímky (a) dovede popsat všechny přímky v rovině. Rovnice není jednoznačná, každý nenulový násobek rovnice popisuje stejnou přímku. Popis přímky bude jednoznačný, přidáme-li například podmínku $a^2 + b^2 = 1$ a $a > 0$, nebo $b > 0$ v případě, kdy $a = 0$.

Koeficienty a, b určují normálový vektor $\mathbf{n} = (a, b)$ a tím i směrový vektor $\mathbf{s} = (-b, a)$.

V případě $a = 0$ je přímka rovnoběžná s osou x, pokud $b = 0$, je přímka rovnoběžná s osou y, pokud $c = 0$, přímka prochází počátkem $O = [0, 0]$.

Pokud $a \neq 0$ přímka protíná osu x v bodě $[-\frac{c}{a}, 0]$, v případě $b \neq 0$ přímka protíná osu y v bodě $[0, -\frac{c}{b}]$.

(b) Směrnicová rovnice dovede popsat všechny přímky kromě přímek rovnoběžných s osou y, zápis je jednoznačný, tj. různé k, q určují různé přímky.

Vektor $\mathbf{s} = (1, k)$ je směrový a $\mathbf{n} = (-k, 1)$ normálový vektor přímky.

Číslo q určuje průsečík $[0, q]$ přímky s osou y.

Případ $k = 0$ určuje přímku rovnoběžnou s osou x. Pro $k \neq 0$ přímka protíná osu x v bodě $[-\frac{q}{k}, 0]$.

(c) Úseková rovnice dovede popsat všechny přímky kromě přímek procházejících počátkem. Protože průsečíky s osami dávají parametry p, q, zápis je jednoznačný. Převedeme-li jedničku z pravé strany na levou, máme tvar obecné rovnice.

(d) Parametrické rovnice dovedou popsat všechny přímky, přímka však má mnoho zápisů: může začínat z libovolného bodu přímky a také nenulový násobek směrového vektoru přímku nemění.

Rovnice obsahují směrový vektor $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, normálový vektor je $\mathbf{n} = \pm(-s_2, s_1)$.

Poznámky. Naučte se převádět jeden druh rovnice přímky na ostatní!

Dva různé body $A = [x_A, y_A]$, $B = [x_B, y_B]$ určují přímku. Jaké jsou její rovnice? Body A, B určují její směrový vektor: $\mathbf{s} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ odkud můžeme přímo napsat její parametrické rovnice:

$$x = x_A + t(x_B - x_A), \qquad y = y_A + t(y_B - y_A) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

V případě $x_A \neq x_B$ je směrnice přímky číslo $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ a rovnice přímky je

$$y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,(x - x_A)\,. \tag{3.3}$$

Roznásobením lze rovnici snadno upravit na směrnicovou i obecnou rovnici přímky.

Normálový vektor je $(-y_B + y_A, x_B - x_A)$. Vydělením obecné rovnice absolutním členem (pokud je nenulový) po převedení jedničky na pravou stranu dostaneme úsekovou rovnici přímky.

Příklad 3.16. Přímka p je určena obecnou rovnicí $3\,x - y - 6 = 0$. Určete směrový a normálový vektor a ostatní druhy rovnice této přímky.

Řešení: Koeficienty obecné rovnice dávají normálový vektor $\mathbf{n} = (a, b) = (3, -1)$. Z rovnice lze hned určit směrnicový tvar $y = 3\,x - 6$, odkud máme směrový vektor $\mathbf{s} = (1, k) = (1, 3)$. Dělení obecné rovnice číslem 6 dává $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} - 1 = 0$, odkud máme úsekový tvar $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1$ s průsečíky $[2, 0]$ a $[0, -6]$ na osách x a y.

Volbou například $x = 1$ dostáváme bod $[1, -3]$ a tím i parametrické rovnice $x = 1 + t$, $y = -3 + 3\,t$. Pokud za bod vezmeme průsečík $[2, 0]$, parametrické rovnice jsou $x = 2 + t$, $y = 3\,t$.

Vzájemné polohy bodů a přímek v rovině

Vzdálenost dvou (různých) bodů $A = [x_A, y_A]$ a $B = [x_B, y_B]$ je rovna velikosti vektoru $\overrightarrow{AB}$, tj. $|B - A| = \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Jaká je vzájemná poloha bodu a přímky? Pokud souřadnice bodu splňují rovnice přímky (kterékoliv, kromě parametrických), bod leží na přímce. V opačném případě na přímce neleží. **Vzdálenost bodu A od přímky p** je minimum jeho vzdálenosti od všech bodů přímky. Minimum je dosaženo v kolmém průmětu P bodu na přímku p, tj. průsečíku přímky p s přímkou q, která prochází bodem A a je kolmá na přímku p. Tuto vzdálenost lze spočítat pomocí následujícího vzorce, zkuste ho odvodit!

Věta 3.17. Vzdálenost bodu od přímky v rovině. Mějme přímku $p: \; ax + by + c = 0$ a bod $A = [x_A, y_A]$. Potom jejich vzdálenost d je

$$d = \frac{|a\,x_A + b\,y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Jaká je vzájemná poloha dvou přímek v rovině? Dvě přímky mohou být

(a) různoběžné, tj. mají jediný společný bod, tzv. průsečík,

(b) rovnoběžné, tj. nemají žádný společný bod a

(c) totožné.

Jak zjistit vzájemnou polohu dvou přímek p, q v rovině? Pokud jejich směrové (nebo normálové) vektory jsou nezávislé, přímky jsou různoběžné. Pokud jsou závislé, přímky jsou rovnoběžné nebo totožné. Závislost lze nejsnadněji zjistit pomocí vektorového součinu: vektory $\mathbf{s}_p = (s_1^p, s_2^p)$ a $\mathbf{s}_q = (s_1^q, s_2^q)$ jsou závislé, právě když

$$\mathbf{s}_p \times \mathbf{s}_p = s_1^p\, s_2^q - s_2^p\, s_1^q = 0.$$

Vzdálenost dvou (různých) rovnoběžných přímek lze počítat podobně jako vzdálenost bodu od přímky: stačí zvolit na jedné přímce jeden bod a měřit jeho vzdálenost od druhé přímky. Zkuste odvodit následující vzorec:

Věta 3.18. Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek. Mějme dvě rovnoběžné přímky p a q, které zapíšeme se stejnými koeficienty a, b: přímka p má rovnici $a\,x + b\,y + c_p = 0$ a přímka q rovnici $a\,x + b\,y + c_q = 0$.

Potom jejich vzdálenost d je

$$d = \frac{|c_p - c_q|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Pokud jsou dvě přímky různoběžné, jejich **průsečík** má souřadnice x, y, který je řešením soustavy rovnic složené například z obecných rovnic obou přímek.

Odchylkou dvou různoběžných přímek p a q rozumíme úhel, který je dán jako úhel α, který svírají směrové vektory $\mathbf{s}_p$ a $\mathbf{s}_q$ těchto přímek, pokud je tento úhel větší než pravý, vezmeme ostrý úhel mezi vektory $\mathbf{s}_p$ a $-\mathbf{s}_q$. Tento **úhel** lze určit pomocí skalárního nebo vektorového součinu z rovnic

$$\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_q|}{|\mathbf{s}_p|\,|\mathbf{s}_q|}\,, \qquad \sin(\alpha) = \frac{|\mathbf{s}_p \times \mathbf{s}_q|}{|\mathbf{s}_p|\,|\mathbf{s}_q|}\,.$$

Řekneme, že **přímky jsou navzájem kolmé**, pokud jejich směrové vektory svírají pravý úhel, tj. $\mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_q = 0$.

Podmnožiny přímky a množiny s „rovnými“ okraji

Přímku už popsat umíme. Jak popsat polopřímku, úsečku, poloroviny, úhel a trojúhelník? Na to se nejlépe hodí parametrický popis přímky dané dvěma body:

Věta 3.19. Mějme dva různé body $A = [x_A, y_A]$ a $B = [x_B, y_B]$. Potom parametrické rovnice

$$x = x_A + t(x_B - x_A) \equiv (1-t)x_A + t\,x_B \qquad y = y_A + t(y_B - y_A) \equiv (1-t)y_A + t\,y_B$$

určují následující body a podmnožiny přímky pro různé hodnoty parametru t:

(a) bod A pro $t = 0$, bod B pro $t = 1$, střed úsečky AB pro $t = \frac{1}{2}$,
(b) otevřenou úsečku AB pro $t \in (0, 1)$, úsečku AB s koncovými body pro $t \in \langle 0, 1\rangle$,
(c) polopřímku $\overrightarrow{AB}$ pro $t \in \langle 0, \infty)$, polopřímku $\overrightarrow{BA}$ pro $t \in (-\infty, 1\rangle$ a celou přímku p pro $t \in \mathbb{R}$.

V případě ostatních popisů přímky lze její podmnožinu vyjádřit omezením proměnné x nebo y, například zápis $a\,x + b\,y + c = 0$ s nerovností $x_A < x < x_B$ určuje otevřenou úsečku.

Přímka v rovině rozděluje tuto rovinu na dvě poloroviny, které dostaneme tak, že v rovnici přímky (obecné, směrnicové i úsekové) změníme rovnost na nerovnost. Kterou z dvou polorovin oddělených přímkou p dostaneme? Je-li hraniční přímka ve tvaru $y = k\,x + q$, potom zřejmě nerovnice popisuje:

$y > k\,x + q$ polorovinu „nad“ přímkou, v případě $y \geq k\,x + q$ včetně hraniční přímky,

$y < k\,x + q$ polorovinu „pod“ přímkou, v případě $y \leq k\,x + q$ včetně hraniční přímky.

Je-li hraniční přímka zapsaná ve tvaru $x = q$, případně $x = p\,y + q$, potom zřejmě:

$x > p\,y + q$ je polorovina „vpravo" od přímky, v případě $x \geq p\,y + q$ včetně hraniční přímky,

$x < p\,y + q$ je polorovina „vlevo" od přímky, v případě $x \leq p\,y + q$ včetně hraniční přímky.

V případě parametrického popisu přímky $x = x_A + u_1\,t,\ \ y = y_A + u_2\,t,\ \ t \in \mathbb{R}$, se směrovým vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, vezmeme vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ směřující do dané poloroviny (například jeden ze dvou normálových vektorů) a polorovinu (bez hraniční přímky) popisují rovnice

$$x = x_A + u_1\,t + v_1\,s, \qquad y = y_A + u_2\,t + v_2\,s\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ \ s > 0,$$

v případě $s \geq 0$ včetně hraniční přímky.

Příklad 3.20. Trojúhelník ΔABC je určen vrcholy $A = [1, -1]$, $B = [5, 0]$ a $C = [3, 4]$. Určete jeho obsah, těžiště, středy a délky stran a popište trojúhelník parametricky a nerovnostmi.

Řešení: Těžiště $T = [x_T, y_T]$ trojúhelníka ΔABC má souřadnice, které jsou průměrem souřadnic jeho vrcholů: $x_T = \frac{1}{3}(1 + 5 + 3) = 3\,,\quad y_T = \frac{1}{3}(-1 + 0 + 4) = 1\,,$ těžiště je tedy $T = [3, 1]$.

Středy stran jsou opět průměry souřadnic koncových bodů jednotlivých stran, proto střed strany $c = AB$ je $S_c = [\frac{1}{2}(1+5), \frac{1}{2}(-1+0)] = [3, -\frac{1}{2}]$, střed strany $b = AC$ je $S_b = [2, \frac{3}{2}]$ a střed strany $a = BC$ je $S_a = [4, 2]$.

Délka strany c je $|AB| = |(4, 1)| = \sqrt{17}$, podobně $|AC| = |(2, 5)| = \sqrt{29}$ a $|BC| = |(-2, 4)| = \sqrt{20}$.

Obsah trojúhelníka spočítáme pomocí vektorového součinu vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$

$$|\Delta ABC| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\,|(4, 1) \times (2, 5)| = \frac{1}{2}\,|20 - 2| = 9\,.$$

Trojúhelník parametricky popíšeme pomocí bodu A a vektorů jeho stran $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (4, 1)$ a $\mathbf{v} = (2, 5)$:

$$x = x_A + u_1\,s + v_1\,t = 1 + 4\,s + 2\,t\,, \quad y = y_A + u_2\,s + v_2\,t = -1 + 1\,s + 5\,t \quad s \geq 0\,,\ t \geq 0\,,\ s + t \leq 1\,.$$

Trojúhelník lze popsat také jako průnik tří polorovin určených přímkami $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BC}$. Pomocí (3.3) a předchozích úvah po úpravě dostáváme

$$4\,y \geq x - 5\,, \qquad 2\,y \leq 5\,x - 7\,, \qquad y \leq 10 - 2\,x\,.$$

Jako kontrolu stačí dosadit souřadnice vrcholů A, B, C do daných nerovnic. Pokud ve dvou případech vyjdou rovnosti a ve třetí platí ostrá nerovnost, jsou nerovnice správně.

3C. Lineární množiny v prostoru

Po „rovných“ útvarech v rovině přejdeme na „rovné“ tzv. lineární útvary v prostoru $\mathbb{R}^3$. Útvary lze popsat různými způsoby. I zde je problém s označením bodů a vektorů. Podobně jako v rovině v našem trojrozměrném prostoru osy budeme značit x, y, z. Body budeme označovat velkými písmeny a jejich souřadnice x, y, z v hranatých závorkách rozlišíme indexem bodu. Obecný bod se souřadnicemi budeme značit $P = [x, y, z]$, souřadnice konkrétního bodu rozlišíme indexy např. $A = [x_A, y_A, z_A]$, někteří autoři znak „rovná se“ vynechávají. Vektory budeme značit tučnými malými písmeny a jejich souřadnice písmeny s číselnými indexy v kulatých závorkách, například $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Toto značení je nejčastější, i když logičtější by bylo psát $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, nebo $\mathbf{u} = (x_\mathbf{u}, y_\mathbf{u}, z_\mathbf{u})$.

Rovina v prostoru

Body P v prostoru budeme určovat souřadnicemi $P = [x, y, z]$. Podobně jako přímku v rovině i rovinu v prostoru můžeme určit různými způsoby:

Definice 3.21. Rovina v prostoru je množina bodů $P = [x, y, z]$ daná jedním z následujících způsobů:

(a) **(obecná rovnice roviny)**

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\}\,,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly,

(b) **(směrnicová rovnice roviny)**

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid z = k\,x + l\,y + q\}\,,$$

kde $k, l, q \in \mathbb{R}$. Číslo q je souřadnice průsečíku přímky s osou z a k, l jsou tzv. **směrnice**,

(c) **(úseková rovnice roviny)**

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1\},$$

kde $p, q, r \neq 0$ jsou úseky, které rovina „vytíná“ na osách x, y, z, tj. průsečíky s osami x, y, z jsou po řadě body $[p, 0, 0]$, $[0, q, 0]$ a $[0, 0, r]$,

(d) **(parametrické rovnice roviny)**

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_A + u_1\,s + v_1\,t,\ y = y_A + u_2\,s + v_2\,t,\ z = z_A + u_3\,s + v_3\,t \quad s, t \in \mathbb{R}\},$$

kde $A = [x_A, y_A, z_A]$ je bod, kterým rovina prochází, a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou dva nezávislé vektory ležící v dané rovině. Tyto rovnice lze jednoduše zapsat **vektorově**:

$$\{P \in \mathbb{R}^3 \ :\ P = A + s\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} \quad s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Roviny označujeme obvykle malými řeckými písmeny, např. α, β, γ.

Z definic je snadné odvodit následující tvrzení:

Věta 3.22. (Vlastnosti jednotlivých zápisů roviny)

(a) Obecná rovnice roviny (a) dovede popsat všechny roviny v prostoru. Rovnice není jednoznačná, každý nenulový násobek rovnice popisuje stejnou rovinu. Popis roviny bude jednoznačný, přidáme-li například podmínku $a^2+b^2+c^2=1$ a $a>0$, nebo $b>0$ pro $a=0$, nebo $c>0$ pro $a=b=0$.

Koeficienty a,b,c určují normálový vektor $\mathbf{n}=(a,b,c)$, směrový vektor není určen jednoznačně, v rovině existují vždy dva nezávislé směrové vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

V případě $a=b=0$ je rovina kolmá na osu z a rovnoběžná s osami x,y. Pokud $a=c=0$, rovina je kolmá na osu y a rovnoběžná s osami x,z. Jestliže $b=c=0$, rovina je kolmá na osu x a rovnoběžná s osami y,z. Pokud $d=0$, přímka prochází počátkem $O=[0,0,0]$.

Pokud $a\neq 0$, rovina protíná osu x v bodě $[-\frac{d}{a},0,0]$, v případě $b\neq 0$ rovina protíná osu y v bodě $[0,-\frac{d}{b},0]$ a jestliže $c\neq 0$, rovina protíná osu z v bodě $[0,0,-\frac{d}{c}]$.

(b) Směrnicová rovnice dovede popsat všechny roviny kromě rovin rovnoběžných s osou z. Zápis roviny je jednoznačný, tj. různé k,l,q určují různé roviny.

Směrové vektory nejsou určeny jednoznačně, jsou to například vektory $\mathbf{u}=(1,0,k)$, $\mathbf{v}=(0,1,l)$. Vektor $\mathbf{n}=(-k,-l,1)$ je normálový vektor roviny.

Případ $k=l=0$ určuje rovinu rovnoběžnou s rovinou $z=0$.

(c) Úseková rovnice dovede popsat jen ty roviny, které protínají všechny tři osy. Protože průsečíky s osami dávají parametry p,q,r, zápis je jednoznačný. Převedeme-li jedničku z pravé strany na levou, máme tvar obecné rovnice.

(d) Parametrické rovnice dovedou popsat všechny roviny, roviny však mají nekonečně mnoho zápisů: mohou začínat z libovolného bodu roviny a mohou obsahovat libovolnou dvojici nezávislých vektorů v rovině.

Jsou-li $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ nezávislé směrové vektory roviny, potom vektor $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ je normálovým vektorem roviny. Máme-li normálový vektor, jeho složky jsou koeficienty a,b,c v obecné rovnici roviny, pomocí souřadnic bodu roviny stačí dopočítat koeficient d.

Poznámky. Naučte se převádět jeden druh zápisu roviny na ostatní!

Podobně jako v případě přímky v rovině jsme z parametrických rovnic určovali části přímky omezením množiny parametrů, i zde v prostoru omezením množiny parametrů s,t můžeme určit poloroviny, úhly, trojúhelníky, rovnoběžníky atd.

Zaměníme-li v obecné, směrnicové i úsekové rovnici rovnost nerovnicí, dostáváme poloprostor. Například $x+y+z+1\geq 0$ je poloprostor „nad“ rovinou $x+y+z+1=0$ obsahující počátek.

Příklad 3.23. Ověřte, že body $A=[1,1,3]$, $B=[5,4,1]$, $C=[2,1,6]$ neleží na přímce. Tyto body určují rovinu, napište všechna její vyjádření! Vyjádřete analyticky i trojúhelník ΔABC a jeho těžiště.

Řešení: Body A,B,C neleží na přímce, pokud vektory $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}=(4,3,-2)$ a $\mathbf{v}=\overrightarrow{AC}=(1,0,3)$ jsou lineárně nezávislé. Jejich vektorový součin $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(4,3,-2)\times(1,0,3)=(9,-14,-3)$

je nenulový, proto vektory jsou nezávislé. Navíc je to normálový vektor $\mathbf{n} = (9, -14, -3)$ roviny určené body A, B, C. Její rovnice je tedy $9\,x - 14\,y - 3\,z + d = 0$, koeficient d dopočítáme dosazením souřadnic např. bodu A, odkud plyne $d = 14$. Obecná rovnice hledané roviny je tedy $9\,x - 14\,y - 3\,z + 14 = 0$. Jako kontrolu dosazením souřadnic bodů do rovnice roviny lze ověřit, že i body B, C leží v hledané rovině.

Z obecné rovnice plyne směrnicová rovnice i úseková rovnice

$$z = 3\,x - \frac{14}{3}\,y + \frac{14}{3}\,, \qquad\qquad \frac{x}{-\frac{14}{9}} + \frac{y}{1} + \frac{z}{\frac{14}{3}} = 1\,.$$

Parametrický popis můžeme získat pomocí bodu A a vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$:

$$x = 1 + 4\,s + 1\,t\,, \quad y = 1 + 3\,s\,, \quad z = 3 - 2\,s + 3\,t \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Pokud v parametrickém vyjádření omezíme parametry $s \geq 0$, $t \geq 0$ a $s + t \leq 1$, dostaneme trojúhelník ΔABC. Jeho těžiště je opět průměr souřadnic vrcholů, tj. $T = [\frac{8}{3}, 2, \frac{10}{3}]$.

Přímka v prostoru

Přímku v prostoru nelze zapsat jednou rovnicí. Lze ji napsat buď parametricky s jedním parametrem, nebo jako průsečnici dvou rovin.

Definice 3.24. Přímka v prostoru je množina bodů $P = [x, y, z]$ daná jedním z následujících způsobů:

(a) **(parametrické rovnice přímky)**

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_A + s_1\,t,\ y = y_A + s_2\,t,\ z = z_A + s_3\,t,\ t \in \mathbb{R}\}, \tag{3.4}$$

kde $A = [x_A, y_A, z_A]$ je bod, který leží na zadané přímce a $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je její směrový vektor.

Parametrické rovnice lze zapsat také **vektorově**:

$$\{P \in \mathbb{R}^3 \ :\ P = A + t\,\mathbf{s}\,, \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) **(kanonický tvar rovnic přímky)**

$$\left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x - x_A}{s_1} = \frac{y - y_A}{s_2} = \frac{z - z_A}{s_3}\right\}, \tag{3.5}$$

kde $A = [x_A, y_A, z_A]$ je bod přímky a $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ její směrový vektor s nenulovými složkami.

(c) **(průnik dvou různoběžných rovin)**

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0\,, \quad a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0\}\,, \tag{3.6}$$

kde $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ a vektory (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) jsou lineárně nezávislé.

Z definic lze snadno odvodit následující tvrzení:

Věta 3.25. (Vlastnosti jednotlivých zápisů přímek)

(a) Parametrické rovnice přímky (a) dovedou popsat každou přímku. Rovnice nejsou jednoznačné, bodem A může být libovolný bod přímky, také každý nenulový násobek směrového vektoru určuje stejnou přímku.

(b) Kanonický tvar (b) rovnic přímky obsahuje vlastně tři rovnice, jen dvě z nich jsou však nezávislé. Zápis dovede popsat jen ty přímky, jejíchž směrový vektor má všechny složky nenulové, tj. není rovnoběžný s žádnou z rovin $x = 0$, $y = 0$ ani $z = 0$. Zápis není jednoznačný, každý nenulový násobek rovnic popisuje stejnou přímku.

Položíme-li každou „stranu“ rovnic (3.5) rovnu parametru t

$$\frac{x - x_A}{s_1} = t\,, \quad \frac{y - y_A}{s_2} = t\,, \quad \frac{z - z_A}{s_3} = t\,,$$

jednoduchou úpravou získáme parametrické rovnice přímky (3.4).

(c) Každou přímku lze zadat jako průsečnici dvou rovin, zápis ovšem není jednoznačný, každou přímkou prochází nekonečně mnoho rovin, lze z nich zvolit libovolnou dvojici různých rovin. Koeficienty a_i, b_i, c_i obecných rovnic těchto rovin tvoří souřadnice normál těchto rovin, jejich vektorový součin $(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)$ dává směrový vektor přímky.

Příklad 3.26. Zapište přímku procházející body $A = [1, 2, 3]$, $B = [4, -2, 5]$ všemi uvedenými způsoby.

Řešení: Body určují směrový vektor $\mathbf{s} = (3, -4, 2)$, který s bodem A dává parametrické rovnice

$$x = 1 + 3\,t\,, \quad y = 2 - 4\,t\,, \quad z = 3 + 2\,t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Protože směrový vektor $\mathbf{s}$ má všechny složky nenulové, vyjádřením parametru t dostaneme kanonický tvar

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 3}{2}\,.$$

Pro určení dvojice rovin, jejichž průsečnice je naše přímka, máme mnoho možností. Například úpravou „první“ a „druhé“ rovnosti v předchozím kanonickém tvaru dostaneme roviny:
$4\,x + 3\,y - 10 = 0$ a $y + 2\,z - 8 = 0$.

Vzájemná poloha bodu, přímky a roviny v prostoru

Vzdálenost dvou bodů $A = [x_A, y_A, z_A]$ a $B = [x_B, y_B, z_B]$ je velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$, tj.

$$v = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \tag{3.7}$$

Zda bod leží na přímce nebo v rovině lze ověřit dosazením jeho souřadnic do příslušných rovnic.

Příklad 3.27. Určete vzdálenost bodu $A = [x_A, y_A, z_A]$ od roviny α dané rovnicí $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.

Řešení: Vzdálenost bodu A od roviny α je jeho vzdálenost od průsečíku P roviny α a přímky p procházející bodem A, která je kolmá k rovině α. Protože (a, b, c) je vektor kolmý k rovině α, souřadnice bodu přímky p jsou $x = x_A + a\,t,\ \ y = y_A + b\,t,\ \ z = z_A + c\,t.$ Dosazení do rovnice roviny dává rovnici pro parametr t průsečíku P:

$$a(x_A + a\,t) + b(y_A + b\,t) + c(z_A + c\,t) + d = 0\,, \qquad \text{řešením je} \qquad t = -\frac{a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Vektor $\overrightarrow{AP}$ má souřadnice (at, bt, ct). Hledaná vzdálenost podle (3.7) je $v = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)t^2}$. Protože $\sqrt{t^2} = |t|$, dosazením za t dostáváme

$$v = \frac{|a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,. \tag{3.8}$$

Příklad 3.28. Určete vzdálenost bodu A od přímky p dané bodem B a směrovým vektorem $\mathbf{s}$.

Vzdálenost v lze spočítat podobně jako v předchozím příkladě. Napíšeme rovnici roviny α procházející bodem A a kolmé k přímce p a určíme průsečík P roviny α a přímky p. Hledaná vzdálenost je vzdálenost bodů A a P. Ukážeme si jiné řešení, které využívá vlastnosti vektorového součinu vektorů.

Řešení: Plocha S rovnoběžníku určeného vektorem $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ a vektorem $\mathbf{s}$ je rovna součinu délky jeho strany, kterou je vektor $\mathbf{s}$ a výšky na tuto stranu v, která je rovna vzdálenosti bodu A od přímky p. Plocha S je však také rovna velikosti vektorového součinu vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{s}$. Dostáváme tak rovnost $S = |\mathbf{s}| \cdot v = |\mathbf{u} \times \mathbf{s}|$ odkud plyne

$$v = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}\,. \tag{3.9}$$

Definice 3.29. Dvě roviny v prostoru mohou být

(a) **různoběžné**, pokud se protínají v jedné přímce. Jejich normálové vektory jsou nezávislé.

(b) **rovnoběžné**, pokud nemají žádný společný bod. Jejich normálové vektory jsou závislé.

(c) **totožné**, pokud mají všechny body společné.

O vzájemné poloze dvou rovin vypovídá následující tvrzení:

Věta 3.30. **(Vzájemná poloha dvou rovin)** Uvažujme dvě roviny $\alpha_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ a $\alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ s normálovými vektory $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ a $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

(a) Pokud vektory $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$ jsou nezávislé, tj. $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \neq \mathbf{0}$, roviny jsou různoběžné. Roviny svírají úhel φ, který je roven úhlu jejich normál $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$ (pokud by úhel φ byl tupý, vezmeme úhel vektorů $\mathbf{n}_1$ a $-\mathbf{n}_2$). Tento úhel lze určit z rovností:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}\,, \qquad \text{nebo} \qquad \sin(\varphi) = \frac{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}\,.$$

Průsečnice $p = \alpha_1 \cap \alpha_2$ má směrový vektor $\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.

(b) Nechť vektory $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$ jsou závislé, tj. existuje $k \neq 0$, že $\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2$. Potom rovnice můžeme přepsat ve tvaru se stejnými koeficienty a, b, c: $\alpha_1 : a\,x + b\,y + c\,z + d_1 = 0$ a $\alpha_2 : a\,x + b\,y + c\,z + d_2 = 0$. Pokud navíc $d_1 = d_2$, roviny jsou totožné.

(b) Nechť vektory $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$ jsou závislé a roviny jsou zapsány ve tvaru $\alpha_i : a\,x + b\,y + c\,z + d_i = 0$. Pokud navíc $d_1 \neq d_2$, roviny jsou rovnoběžné a jejich vzdálenost v je

$$v = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

Věta 3.31. (Vzájemná poloha roviny a přímky) Buď α rovina daná rovnicí $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ s normálou $\mathbf{n} = (a, b, c)$ a přímka p daná bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{s}$. Potom nastane jedna ze situací:

(a) Přímka protíná rovinu v jednom bodě. Tato situace nastane, pokud $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \neq 0$. Odchylka přímky p a roviny α je velikost úhlu φ, který svírá směrový vektor přímky $\mathbf{s}$ a jeho kolmý průmět do roviny α. Je to doplněk úhlu směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny do pravého úhlu. Lze ho určit z rovnosti $\sin(\varphi) = |\mathbf{n} \times \mathbf{s}|/(|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{s}|)$.

(b) Přímka je rovnoběžná s rovinou, tj. nemají žádný společný bod. Tato situace nastane, pokud $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$ a bod A neleží v rovině α. V tomto případě je vzdálenost přímky p od roviny α rovna vzdálenosti kteréhokoliv bodu přímky (také bodu A) od roviny α a je proto dána vztahem (3.8).

(c) Přímka leží v rovině. Situace nastane, pokud $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$ a bod A leží v rovině α.

Poznámky. Ve fyzice, zvláště v optice, se zavádí úhel dopadu paprsku (přímky) na rovinu. Je to úhel mezi směrovým vektorem $\mathbf{s}$ přímky a normálovým vektorem $\mathbf{n}$ roviny (bereme úhel mezi 0 a pravým úhlem. Speciálně přímka kolmá na rovinu „dopadá“ pod úhlem 0, její odchylka od roviny je ale pravý úhel.

Definice 3.32. Dvě přímky v prostoru mohou být:

(a) **různoběžné**, pokud mají společný právě jeden bod (jejich směrové vektory jsou nezávislé),

(b) **mimoběžné**, pokud nemají žádný společný bod a jejich směrové vektory jsou nezávislé,

(c) **rovnoběžné**, pokud nemají žádný společný bod a jejich směrové vektory jsou závislé.

(d) **totožné** (**splývající**), pokud mají všechny body společné.

Věta 3.33. **(Vzájemná poloha dvou přímek)** Uvažujme přímku p určenou bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u}$ a přímku q určenou bodem B a směrovým vektorem $\mathbf{v}$. Označme navíc $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$. Potom platí:

(a) Přímky jsou různoběžné, pokud vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou nezávislé, tj. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, a vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou lineárně závislé, tj. smíšený součin $(\mathbf{uvw}) = 0$.

(b) Přímky jsou mimoběžné, pokud vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé.

(c) Přímky jsou rovnoběžné, pokud vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou závislé, $tj.\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, bod A neleží na přímce q, nebo vektor $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Poznámky. Úhel rovnoběžných nebo mimoběžných přímek je úhel, který svírají jejich směrové vektory (pokud by tento úhel byl tupý, tj. větší než pravý úhel, bereme jeho doplněk do přímého úhlu, který už je ostrý). Lze jej spočítat pomocí vzorce (3.2).

Věta 3.34. **(Vzdálenost mimoběžek)** Uvažujme přímky p, q určené nezávislými směrovými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a body A, B. Označme $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$ jako v předchozí Větě 3.33. Potom vzdálenost d mimoběžek je rovna

$$d = \frac{|(\mathbf{uvw})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}, \tag{3.10}$$

kde $(\mathbf{uvw}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ je smíšený součin, viz Definici 3.12.

Vzorec lze odvodit pomocí osy mimoběžek, tj. kolmice na obě přímky p a q protínající je v průsečících P a Q. Směrový vektor osy je $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Uvedeme však jednodušší odvození pomocí smíšeného součinu.

Důkaz. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ určují rovnoběžnostěn, jehož objem V dává právě smíšený součin: $V = |(\mathbf{uvw})|$.

Objem rovnoběžnostěnu je však roven $V = S \cdot d$, kde S je velikost plochy základny, kterou je rovnoběžník určený vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, a d výška rovnoběžnostěnu, která je rovna hledané vzdálenosti mimoběžek. Vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ má velikost plochy základny rovnoběžnostěnu, tj. $S = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Platí tedy $V = S \cdot d = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \cdot d$.

Porovnáním obou vyjádření objemu V dostáváme rovnost $|(\mathbf{uvw})| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \cdot d$, odkud plyne vzorec (3.10).

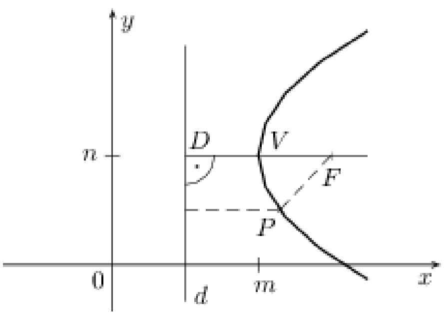
3D. Kvadratické křivky

Dosud jsme se zabývali množinami, které byly dány lineárními rovnicemi, případně nerovnicemi. Nyní se budeme zabývat křivkami v rovině, které jsou dány rovnicemi pro souřadnice x, y obsahující mimo lineární členy x a y i některé z kvadratických členů x^2, xy a y^2. Většina kvadratických křivek se nazývá kuželosečky, protože vznikají při „řezech“ („sekání“) kuželové plochy rovinou. Nejprve probereme jednotlivé kuželosečky a odvodíme jejich rovnice. Potom si ukážeme, jak tyto křivky vznikají při „sekání“ kuželové plochy a nakonec probereme všechny kvadratické křivky.

Definice a analytický popis kuželoseček

Mezi základní kuželosečky patří kružnice, elipsa, parabola a hyperbola. Odvodíme jejich rovnice v tzv. základním tvaru, kdy střed (pokud existuje) je v počátku a osa symetrie je rovnoběžná se souřadnou osou. Posunutím a otočením bychom dostali obecnou kuželosečku.

Definice 3.35. (Parabola) Buď d přímka a F bod v rovině, který na přímce d neleží. Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímky d a od bodu F se nazývá **parabola** určená **řídicí přímkou** d a **ohniskem** F. Přímka kolmá na řídicí přímku d procházející ohniskem F je **osa** o paraboly. Průsečík V paraboly a její osy o se nazývá **vrchol** paraboly a vzdálenost p ohniska F od přímky d je tzv. **parametr** paraboly, viz Obr. 3.10.



F	– ohnisko paraboly
d	– řídicí přímka paraboly
$V = [m, n]$	– vrchol paraboly
$\lvert DF \rvert = p$	– parametr paraboly
$P = [x, y]$	– bod paraboly.

Obr. 3.10: K definici paraboly.

Odvoďme rovnici paraboly otevřené vpravo s vrcholem v počátku, osou symetrie x a parametrem p. Potom vrchol $V = [0, 0]$, ohnisko $F = [\frac{p}{2}, 0]$ a řídící přímka d je dána rovnicí $x = -\frac{p}{2}$. Vzdálenost bodu $P = [x, y]$ od řídicí přímky je $x + \frac{p}{2}$, jeho vzdálenost od ohniska je $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$. Umocnění rovnosti obou vzdáleností dává rovnici

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 + y^2$$

odkud plyne rovnice paraboly $2px = y^2$.

Nahradíme-li v rovnici x výrazem $x - m$ a y výrazem $y - n$, dostáváme parabolu s vrcholem $V = [m, n]$, tj. parabolu na Obr. 3.10 s rovnicí $2p(x - m) = (y - n)^2$. Změnou znaménka u x dostaneme parabolu otevřenou vlevo. Záměnou souřadnic x a y pak paraboly otevřené nahoru nebo dolů.

Věta 3.36. (Rovnice paraboly)
Paraboly s „vodorovnou“ osou symetrie mají rovnice

$$2px = y^2\,, \qquad 2px = -y^2\,, \qquad 2p(x-m) = (y-n)^2\,, \qquad 2p(x-m) = -(y-n)^2\,.$$

První dvě mají vrchol v počátku, další v bodě $[m, n]$, liché jsou otevřeny vpravo, sudé vlevo.
Paraboly se „svislou“ osou symetrie a parametrem p mají rovnice

$$2py = x^2\,, \qquad 2py = -x^2\,, \qquad 2p(y-n) = (x-m)^2\,, \qquad 2p(y-n) = -(x-m)^2\,.$$

První dvě mají vrchol v počátku, další dvě v bodě $[m, n]$, liché jsou otevřeny nahoru, sudé dolů.

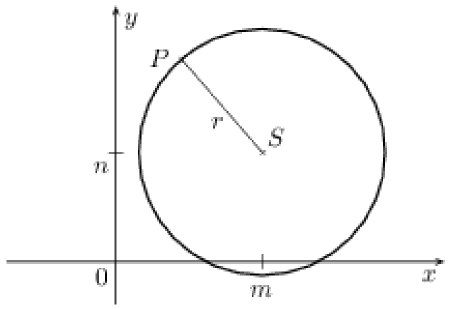
Mezi kuželosečky patří i kružnice, jejíž rovnici jistě znáte již ze střední školy:

Definice 3.37. (Kružnice) Buď $S = [m, n]$ bod v rovině a $r > 0$. Množina všech bodů, jejichž vzdálenost od středu S je rovna r, se nazývá **kružnice** se **středem** S a **poloměrem** r, viz Obr. 3.11. Rovnice

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2\,.$$

se nazývá středová rovnice kružnice. Parametrické rovnice této kružnice jsou například

$$x = m + r\cos(t)\,, \qquad y = n + r\cos(t) \qquad t \in \langle 0, 2\,\pi)\,.$$



$S = [m, n]$ – střed kružnice
r – poloměr kružnice
$P = [x, y]$ – bod kružnice.

Obr. 3.11: K definici kružnice.

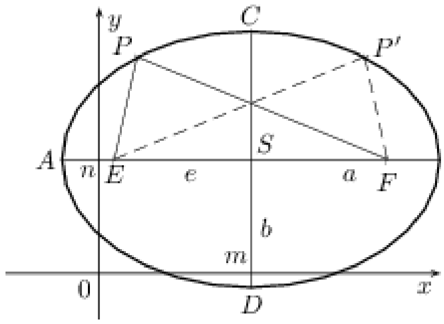
Definice 3.38. (Elipsa) Buďte E a F body v rovině vzdálené od sebe $2e$ a a parametr $a > e$. Množina všech bodů P, jejichž součet vzdáleností od bodů E a F je roven $2a$, tj.

$$|EP| + |FP| = 2a\,,$$

se nazývá **elipsa** a body E a F ohniska. Střed S úsečky EF je střed elipsy. Průsečíky elipsy a tzv. hlavní osy elipsy, tj. přímky určené ohnisky E a F, označme A, B. Průsečíky elipsy a vedlejší osy, tj. přímky procházející středem S kolmé na hlavní osu označme C, D, viz Obr. 3.12. Délky $|AS| = |BS| = a$, $|CS| = |DS| = b$ a $|ES| = |FS| = e$ se nazývají po řadě hlavní poloosa, vedlejší poloosa a excentricita elipsy.

Poznámky.

(a) Zřejmě platí $|EC| = |FC| = |ED| = |FD| = a$.
(b) Podle Pythagorovy věty platí $b^2 + e^2 = a^2$.
(c) V případě, kdy $a = b$, tj. $e = 0$ a $E = F$, se z elipsy stává kružnice.



A, B, C, D	– vrcholy elipsy
E, F	– ohniska elipsy
$S = [m, n]$	– střed elipsy
$a, b, \quad a > b$	– hlavní a vedlejší poloosa elipsy
$e = \sqrt{a^2 - b^2}$	– excentricita elipsy
$P = [x, y]$	– bod elipsy

Obr. 3.12: K definici elipsy.

Odvození rovnice elipsy sice dá trochu práce, je však zajímavé.

Příklad 3.39. Odvoďte rovnici elipsy se středem v počátku, ohnisky na ose x a poloosami a, b.

Řešení: Excentricita $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ a ohniska $E = [-e, 0]$ a $F = [e, 0]$. Elipsa je množina bodů $P = [x, y]$ splňujících podmínku $|EP| + |FP| = 2a$. Vyjádříme-li vzdálenosti pomocí souřadnic, dostáváme rovnici:

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Abychom odstranili odmocniny, obě strany rovnic, které jsou kladné, umocníme:

$$(x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2\,.$$

Na levé straně využijeme rovnosti $(x+e)^2 + (x-e)^2 = 2(x^2 + e^2)$ a rovnici vydělíme 2. Součin odmocnin necháme na levé straně, ostatní členy převedeme na pravou stranu, kde využijeme rovnosti $e^2 = a^2 - b^2$, a obě strany opět umocníme

$$[(x+e)^2 + y^2][(x-e)^2 + y^2] = [(a^2 + b^2) - (x^2 + y^2)]^2\,.$$

Součiny na obou stranách roznásobíme

$$(x+e)^2(x-e)^2 + [(x+e)^2 + (x-e)^2]y^2 + y^4 = (a^2+b^2)^2 + (x^2+y^2)^2 - 2(a^2+b^2)(x^2+y^2)\,.$$

Upravíme levou stranu. První člen $(x+e)^2(x-e)^2 = (x^2 - e^2)^2 = x^4 - 2x^2e^2 + e^4 = x^4 + (a^2 - b^2)^2 - 2(a^2 - b^2)x^2$, druhý člen $[(x+e)^2 + (x-e)^2]y^2 = 2(2x^2 + 2e^2)y^2 = 2x^2y^2 + 2(a^2 - b^2)y^2$. Členy $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ dávají čtverec $(x^2 + y^2)^2$, který je i na pravé straně. Všechny členy bez x, y dáme na pravou stranu, ostatní na levou:

$$-2(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^2 - b^2)y^2 + 2(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$$

Roznásobením dostáváme $4b^2x^2 + 4a^2y^2 = 4a^2b^2$, odkud vydělením $4a^2b^2$ plyne známá rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Všimněte si, že rovnice je symetrická: prohozením poloos a, b a proměnných x, y se rovnice nemění. Elipsa s poloosami $a < b$, která má ohniska E, F na ose y a součet vzdáleností $|EP| + |FP| = 2b$ vede na stejnou rovnici. Jestliže x nahradíme $x - m$ a místo y dáme $y - n$ dostaneme elipsu se středem $S = [m, n]$:

Věta 3.40. (Rovnice elipsy) Elipsa se středem $S = [m, n]$ a poloosami a, b s osami symetrie rovnoběžnými se souřadnicovými osami je popsána tzv. středovou rovnicí elipsy

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \,. \tag{3.11}$$

V případě $a > b$ je elipsa „protáhlá“ ve „vodorovném“ směru osy x a má ohniska $[m-e, n]$, $[m+e, n]$, kde pro parametry a, b, e platí $e^2 = a^2 - b^2$.
V případě $a < b$ je elipsa „protáhlá“ ve „svislém“ směru x a má ohniska $[m, n-e]$, $[m, n+e]$, přičemž opět platí $e^2 = b^2 - a^2$. V případě rovnosti $a = b$ dostáváme kružnici.

Parametrické rovnice elipsy mají tvar

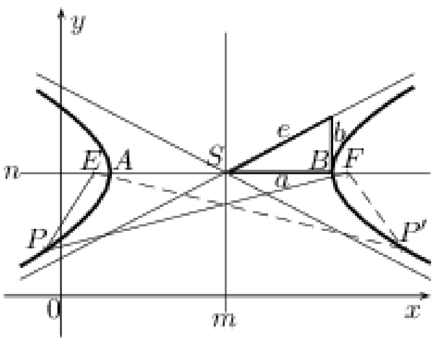
$$x = m + a\,\cos t\,, \qquad y = n + b\,\sin t \quad t \in \langle 0, 2\,\pi)\,.$$

Poznámky. Dosazením x, y z parametrických rovnic do rovnice (3.11) dostáváme rovnost $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1\,.$

Definice 3.41. (Hyperbola) Buďte E, F dva různé body v rovině a a kladné číslo menší než polovina vzdálenosti bodů E, F. Množina všech bodů jejichž rozdíl vzdáleností od bodů E a F je 2a, tj.

$$|\,|EP| - |FP|\,| = 2a\,,$$

se nazývá **hyperbola** a body E, F ohniska hyperboly. Střed úsečky EF je střed hyperboly, přímka určená ohnisky je hlavní osa symetrie a její průsečíky A, B s hyperbolou jsou vrcholy. Přímka kolmá na hlavní osu a procházející středem S je vedlejší osa symetrie. Vzdálenost $|AS| = |BS| = a$ se nazývá hlavní poloosa, vzdálenost $|ES| = |FS| = e$ excentricita a číslo $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ vedlejší poloosa hyperboly, viz Obr. 3.13.



E, F	– ohniska hyperboly
$S = [m, n]$	– střed hyperboly
a, b	– hlavní a vedlejší poloosa
P, P'	– body hyperboly
$e = \sqrt{a^2 + b^2}$	– excentricita hyperboly

Obr. 3.13: K definici hyperboly.

Poznámky.

(a) Naproti elipse, která je souvislá a omezená, hyperbola se skládá ze dvou částí a obě jsou neomezené, při vzdalování od vrcholů se větve blíží k přímkám, tzv. asymptotám.
(b) Obě poloosy a, b jsou menší než excentricita e, pro $a > b$ je hyperbola „užší“, leží v ostrém úhlu asymptot, pro $a < b$ je víc „rozevřená“, leží v tupém úhlu asymptot.
(c) Pokud hlavní osa symetrie je rovnoběžná s osou x, směrnice asymptot je $\pm\frac{b}{a}$.
(d) Pokud $a = 0$, tj. $|EP| - |FP| = 0$, dostáváme přímku, osu úsečky EF.

Odvození rovnice hyperboly dá také trochu práce, ale je podobné odvození elipsy.

Příklad 3.42. Odvoďte rovnici hyperboly se středem v počátku, ohnisky na ose x a poloosami a, b.

Řešení: Excentricita je $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ a ohniska $E = [-e, 0]$ a $F = [e, 0]$. Podle definice $\big||EP| - |FP|\big| = 2a$, což dává rovnici:

$$\left|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right| = 2a\,.$$

Abychom odstranili odmocniny, obě strany rovnic, které jsou kladné, umocníme:

$$(x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2\,.$$

Využijeme rovnost $(x+e)^2 + (x-e)^2 = 2(x^2 + e^2)$ a rovnici vydělíme 2. Součin odmocnin dáme na pravou stranu, člen $2a^2$ převedeme na levou stranu využijeme rovnosti $e^2 = a^2 + b^2$ a opět obě strany umocníme

$$[(x^2 + y^2) - (a^2 - b^2)]^2 = [(x+e)^2 + y^2][(x-e)^2 + y^2]\,.$$

Součiny na obou stranách roznásobíme a pravou stranu upravíme podobně jako v případě elipsy. Jestliže členy bez x, y dáme na pravou stranu, ostatní na levou, po úpravě dostaneme $4b^2x^2 - 4a^2y^2 = 4a^2b^2$ odkud plyne rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Prohozením poloos a, b a proměnných x, y dostaneme hyperbolu rovnici $-x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Jestliže x nahradíme $x - m$ a místo y dáme $y - n$ dostaneme hyperbolu se středem $S = [m, n]$.

Věta 3.43. (Rovnice hyperboly) Hyperbola se středem $S = [m, n]$, poloosami $a, b > 0$, ohnisky $[m - e, n]$ a $[m + e, n]$, kde $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ a „vodorovnou“ hlavní osou $y = n$, tj. větvemi „otevřenými“ vlevo a vpravo, je popsána tzv. středovou rovnicí hyperboly

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1\,. \tag{3.12}$$

V případě hlavní osy $x = m$ a ohnisky $[m, n - e]$ a $[m, n + e]$, tj. větvemi „otevřenými“ dolů a nahoru je hyperbola popsána rovnicí

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = -1\,. \tag{3.13}$$

V obou případech asymptoty hyperboly jsou dány rovnicí

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 0\,. \tag{3.14}$$

Poznámky. Parametrické rovnice hyperboly obsahují tzv. hyperbolické funkce hyperbolický kosinus cosh a hyperbolický sinus sinh definovaný pomocí exponenciální funkce $\exp(x) = e^x$

$$\cosh(t) = \frac{1}{2}(\exp(t) + \exp(-t))\,, \qquad \sinh(t)\frac{1}{2}(\exp(t) + \exp(-t))\,,$$

v případě první hyperboly s hlavní osou $y = n$ parametrická rovnice levé větve je

$$x = m - a\,\cosh(t)\,, \quad y = n + b\,\sinh(t)\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,,$$

a pravé větve

$$x = m + a\,\cosh(t)\,, \quad y = n + b\,\sinh(t)\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Parametrický popis plyne z rovnosti $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, kterou lze snadno ověřit výpočtem.

Věta 3.44. Rovnice $xy = c^2$ popisuje „pootočenou" **hyperbolu s asymptotami** $x = 0$ a $y = 0$, která má větve v prvním a třetím kvadrantu a vrcholy $[c, c]$ a $[-c, -c]$. Rovnice $xy = -c^2$ popisuje hyperbolu s větvemi ve druhém a čtvrtém kvadrantu, vrcholy $[-c, c]$, $[c, -c]$ a stejnými asymptotami $x = 0$ a $y = 0$.

Jsou sečny kuželové plochy kuželosečky?

Tento problém jako cvičení vyřešíme pomocí analytické geometrie. Uvažujme kuželovou plochu danou rovnicí $c^2(x^2 + y^2) = z^2$, $(c > 0)$. Je to rotační plocha, která vznikne rotací přímky $z = cy, x = 0$ kolem osy z. Proto bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat jenom roviny rovnoběžné s osou x, tj. $z = ky + q$ případně $y = q$.

Dosazením rovnice roviny do rovnice kuželové plochy dostaneme rovnice kuželosečky, případně jejího průmětu do roviny x, y nebo x, z.

(a) Rovina $z = q$ kolmá na osu z. Dostáváme $c^2(x^2 + y^2) = q^2$, což je rovnice **kružnice**, v případě $q = 0$ kružnice degenerovaná v **bod** $[0, 0]$.

(b) Rovina $z = ky + q$, kde k splňuje $0 < |k| < c$. Dostáváme rovnici $c^2x^2 + (c^2 - k^2)y^2 - 2kqy = q^2$, což je **elipsa** s poloosami c a $\sqrt{c^2 - k^2}$ a v případě $q = 0$ **bod**.

(c) Rovina $z = ky + q$, kde k splňuje $|k| = c$. Dostáváme rovnici $c^2x^2 - 2kqy = q^2$, což je **parabola**, v případě $q = 0$ **přímka**.

(d) Rovina $z = ky + q$, kde k splňuje $|k| > c$, případně $y = q$. Dostáváme rovnici

$$c^2x^2 - (k^2 - c^2)y^2 - 2kqy = q^2, \qquad \text{případně} \qquad c^2x^2 - z^2 = -c^2q^2$$

což je v obou případech **hyperbola**, v případě $q = 0$ **dvojice různoběžek**.

Křivky dané kvadratickým polynomem

V předchozí části jsme hledali analytické vyjádření kuželoseček v základním tvaru, tj. s osou rovnoběžnou se souřadnou osou. V této části přistoupíme k problému opačně. Budeme zkoumat jakou křivku určuje rovnice s obecným kvadratickým polynomem

$$R(x, y) \equiv A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + a\,x + b\,y = q\,, \tag{3.15}$$

kde koeficienty jsou reálná čísla, přičemž alespoň jeden z koeficientů A, B, C je nenulový, jinak by polynom nebyl kvadratický.

Protože rovnice může určovat kuželosečku „pootočenou", podíváme se, jak se mění rovnice útvaru při jeho rotaci nebo posunutí. Tyto transformace zachovávají shodnost množiny, tj.

tvar ani velikost množiny bodů se nemění. Pokud chceme množinu danou rovnicí $R(x,y)=0$ posunout o vektor (m,n), do rovnice dosadíme souřadnice o tento vektor „odečtené“, tj. položíme $R(x-m,y-n)=0$.

Například, je-li $R(x,y):=x=0$, potom $R(x-m,y-n)=x-m=0$, odkud plyne $x=0$. Podobně, chceme-li útvar otočit o úhel α, do rovnice $R(x,y)=0$ musíme dosadit souřadnice bodu otočeného o úhel $-\alpha$.

Věta 3.45. **(Posunutí a otočení množiny)** Buď M množina v rovině popsána jednou (nebo několika rovnicemi, případně nerovnicemi) typu $R(x,y)=0$ s proměnnými x,y.

(a) Nahradíme-li v rovnicích $R(x,y)=0$ každé x výrazem $x-m$ a každé y výrazem $y-n$, rovnice

$$R'(x,y):=R(x-m,y-n)=0 \tag{3.16}$$

popisuje množinu M', která vznikne posunutím množiny M o vektor (m,n).

(b) Nahradíme-li v rovnicích $R(x,y)=0$ každé x výrazem $x\cos(\varphi)+y\sin(\varphi)$ a každé y výrazem $-x\sin(\varphi)+y\cos(\varphi)$, potom rovnice

$$R'(x,y):=R(x\cos(\varphi)+y\sin(\varphi),-x\sin(\varphi)+y\cos(\varphi))=0 \tag{3.17}$$

popisuje množinu M', která vznikne otočením množiny M kolem počátku $O=[0,0]$ o úhel φ v kladném směru, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček.

(c) Každý „pohyb“ geometrické množiny v rovině lze získat vhodným otočení a posunutím.

Uvažujeme-li dvě shodné množiny M a M', potom jednu lze převést na druhou otočením, posunutím a případně „převrácením“, tj. osovou symetrií, například zobrazením $[x,y]\mapsto[-x,y]$.

Příklad. Otočení množiny o úhel $\varphi=\frac{\pi}{6}=30^\circ$ provedeme transformací $x\mapsto\frac{\sqrt3}{2}x-\frac12y$ a $y\mapsto\frac12x+\frac{\sqrt3}{2}y$. Elipsa $4x^2+y^2=8$ po otočení bude mít rovnici

$$4\left(\frac{\sqrt3}{2}x-\frac12y\right)^2+\left(\frac12x+\frac{\sqrt3}{2}y\right)^2\equiv\frac{13}{4}x^2-\frac{3\sqrt3}{2}xy+\frac74y^2=8\,.$$

Uvažujme opět rovnici (3.15). Vhodným otočením o úhel φ se lze zbavit členu $B\,xy$. Skutečně, nechť $B\neq0$. Nahradíme-li ve výrazu $Ax^2+Bxy+Cy^2$ proměnné x,y podle (b) Věty 3.45, po roznásobení dostáváme výraz $A'x^2+B'xy+C'y^2$, kde nás zajímá jedině koeficient

$$B'=2(A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi)+\big(\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)\big)\,.$$

Pomocí vzorců pro dvojnásobné úhly $\sin(2\varphi)=2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$ a $\cos(2\varphi)=\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)$ koeficient B' přepíšeme $B'=(A-C)\sin(2\varphi)+B\cos(2\varphi)$. Protože $B\neq0$, podmínka $B'=0$ dává rovnici

$$\frac{\cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)}=\operatorname{cotg}(2\varphi)=-\frac{A-C}{B}\,,$$

která má vždy řešení φ. Otočením o tento úhel vypadne $B'xy$ a získáme rovnici $A'x^2+C'y^2+a'x+b'y=q'$.

Dále, pokud v rovnici je člen s x^2 a x, lze se vhodným posunutím zbavit členu s x. Skutečně, posunutím $x \mapsto x - m$ výraz $A'x^2 + a'x$ přejde na

$$A'(x-m)^2 + a'(x-m) = A'x^2 + (a' - 2A'm)x + (A' - a')m^2$$

a pro $m = a'/(2A')$ člen s x vypadne. Podobně, pokud v rovnici je člen s y^2 i člen s y, vhodným posunutím se lze zbavit členů y.

Dostáváme tak následující případy:

(a) Rovnice obsahuje oba kladné kvadratické členy, tj. $A\,x^2 + C\,y^2 = q$, ($A > 0$ a $C > 0$). Potom

   (i) množina M je **elipsa**, pokud $q > 0$, nebo **kružnice** jestliže navíc $A = C$,
   (ii) množina M je jednobodová, pokud $q = 0$,
   (iii) množina M je prázdná, pokud $q < 0$.

(b) Rovnice obsahuje oba kvadratické členy s různými znaménkem $A\,x^2 - C\,y^2 = q$, ($A > 0$ a $C > 0$). Potom

   (i) množina M je **hyperbola** s větvemi otevřenými vlevo a vpravo, pokud $q > 0$,
   (ii) množinu M tvoří dvojice různoběžných přímek, pokud $q = 0$,
   (iii) množina M je **hyperbola** s větvemi otevřenými nahoru a dolů, pokud $q < 0$.

(c) Rovnice obsahuje jenom kvadratický člen x^2. Potom lze položit $A = 1$ a máme případy

   (i) množina M je **parabola** otevřená nahoru v případě $x^2 = by$, pokud $b > 0$,
   (ii) množina M je **parabola** otevřená dolů v případě $x^2 = by$, pokud $b < 0$,
   (iii) v případě $x^2 = q$ množina M je dvojice přímek $x = \pm\sqrt{q}$, pokud $q > 0$, přímka $x = 0$ pokud $q = 0$ a prázdná množina pokud $q < 0$.

(d) Rovnice obsahuje jenom kvadratický člen y^2. Lze položit $C = 1$ a máme případy analogické případu (c):

   (i) množina M je **parabola** otevřená vpravo v případě $y^2 = ax$ pokud $a > 0$,
   (ii) množina M je **parabola** otevřená vlevo v případě $y^2 = ax$ pokud $a < 0$,
   (iii) v případě $y^2 = q$ množina M je dvojice přímek $y = \pm\sqrt{q}$ pokud $q > 0$, přímka $y = 0$ pokud $q = 0$ a prázdná množina pokud $q < 0$.

V obecném případě z kvadratických členů lze snadno (tj. bez transformací) určit typ křivky, může však být degenerovaná nebo i prázdná, k tomu je nutná další analýza členů ax, by, q:

Tvrzení Uvažujme rovnici (3.15). Pokud pro koeficienty A, B, C platí

(a) $B^2 - 4AC > 0$, potom rovnice popisuje hyperbolu (případně různoběžky),

(b) $B^2 - 4AC < 0$, potom rovnice popisuje elipsu (případně kružnici, bod nebo prázdnou množinu),

(c) $B^2 - 4AC = 0$, potom rovnice popisuje parabolu (případně rovnoběžky, přímku, prázdnou množinu).

3E. Kvadratické plochy

Kvadratické plochy zvané kvadriky jsou množiny bodů splňujících rovnici s kvadratickým polynomem ve třech proměnných x, y, z.

Regulární kvadriky

Nedegenerované, tj. regulární, kvadratické plochy uvedeme v základním tvaru, kdy hlavní osy symetrie splývají se souřadnými osami. Začneme plochami, které mají všechny tři kvadratické členy. První je sféra:

Definice 3.46. **Sféra, kulová plocha** s poloměrem $r > 0$ a středem v počátku má rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Poznámky.

(a) Pozor, sféra je plocha, na rozdíl od koule, která je tělesem, koule (včetně povrchu) je určena nerovnicí $x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$. Sféra je jenom povrch koule, podobně jako kružnice je jenom hranice kruhu.

(b) Sféra je množina všech bodů, jejichž vzdálenost od středu je rovna konstantě $r > 0$.

(c) Sféra má nekonečně mnoho os symetrie, jsou to všechny přímky procházející jejím středem. Sféra má také nekonečně mnoho rovin symetrie, jsou to všechny roviny procházející jejím středem.

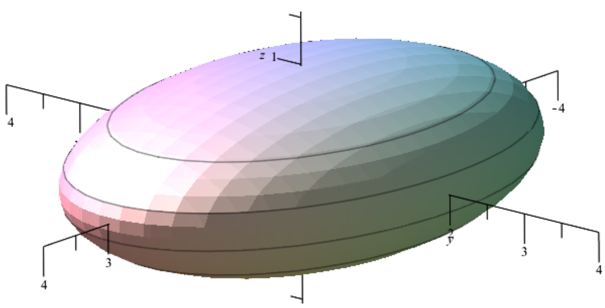
(d) Každý řez sférou je kružnice, případně bod nebo prázdná množina.

(e) Sféra se středem $S = [x_S, y_S, z_S]$ má rovnici $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2 = r^2$.

Definice 3.47. **Elipsoid** se středem v počátku, s osami x, y, z a poloosami $a, b, c > 0$ po řadě v osách x, y, z je dán rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kde kladná čísla a, b, c se nazývají poloosy.



Obr. 3.14: Elipsoid

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1.$$

s poloosami $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$.

Poznámky.

(a) Pod pojmem elipsoid budeme brát plochu, pro těleso omezené elipsoidem se často užívá stejný název. Elipsoid je množina omezená.

(b) Speciálním případem $a = b = c$ elipsoidu je sféra. V případě $a = b$ dostáváme rotační elipsoid s osou rotace z, vznikne rotací elipsy $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1, y = 0$ okolo osy z. Podobně pro $a = c$ dostáváme rotační elipsoid s osou rotace y, který vznikne rotací elipsy s osou rotace y a $b = c$ dává rotační elipsoid s osou rotace x, který vznikne rotací elipsy s osou rotace x.

(c) Jestliže $a = b < c$ jde o elipsoid protáhlý, v případě $a = b > c$ je elipsoid zploštělý.

(d) V případě $a = b < c$ máme rotační elipsoid, který vznikne rotací elipsy $x^2/a^2+z^2/c^2 = 1$ v rovině $y = 0$ podle hlavní osy z, a proto ho lze definovat jako množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od ohnisek $[0, 0, e]$ a $[0, 0, -e]$ je roven $2c$, kde $e = \sqrt{c^2 - a^2}$ je excentricita (výstřednost) elipsy. Analogická situace nastane v případech $a = c < b$, $b = c < a$.

(e) Elipsoid s různými poloosami a, b, c má tři osy symetrie x, y, z a tři roviny symetrie $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$. Rotační elipsoid má nekonečně mnoho os symetrie i nekonečně mnoho rovin symetrie.

(f) Řez elipsoidem je elipsa, případně kružnice, bod nebo prázdná množina.

(g) Posunutý elipsoid s poloosami a, b, c a středem $S = [x_S, y_S, z_S]$ má rovnici

$$\frac{(x - x_S)^2}{a^2} + \frac{(y - y_S)^2}{b^2} + \frac{(z - z_S)^2}{c^2} = 1.$$

Další kvadratické plochy mají tři kvadratické členy, ale nestejných znamének:

Definice 3.48. **Jednodílný hyperboloid** se středem v počátku s hlavní osou symetrie z a poloosami a, b, c je dán rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Dvojdílný hyperboloid se středem v počátku s hlavní osou symetrie z a poloosami a, b, c je dán rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\,.$$

Oba hyperboloidy se pro $z \to \pm\infty$ „blíží“ ke kuželové ploše, která je odděluje. Její rovnice je

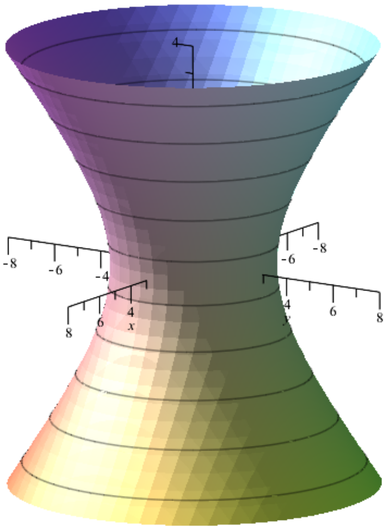
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,.$$

Poznámky.

(a) Oba hyperboloidy jsou plochy neomezené. Jednodílný hyperboloid je množina souvislá, dvoudílný se skládá ze dvou oddělených částí: „horní“ a „dolní“ plochy.

(b) Jak poznáme, zde je hyperboloid jednodílný nebo dvoudílný? Upravme rovnici hyperboloidu tak, aby dva kladné kvadratické členy byly na jedné straně a třetí na druhé straně rovnice, např. $x^2+z^2 = y^2+q$. V případě, kdy $y^2+q > 0$, výraz na x^2+z^2 na levé straně dává kružnici (v případně různých koeficientů u x^2 a z^2 elipsu), v opačném případě bod nebo prázdnou množinu.

Pokud na pravé straně je $q > 0$, pro každé y je pravá strana kladná a každý řez hyperboloidu rovinou $y = k$ je neprázdný. Útvar je tedy jednodílný. Pokud $q < 0$, pro $|y| < \sqrt{|q|}$

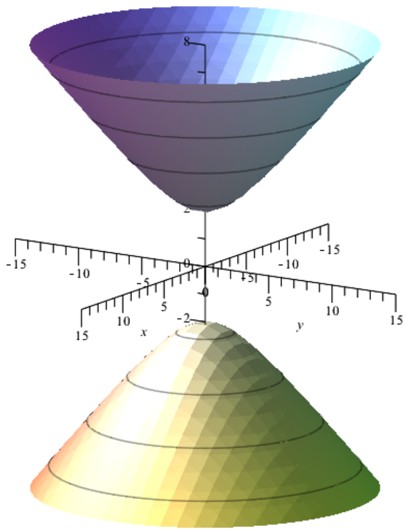


Obr. 3.15: Vlevo je hyperboloid jednodílný

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{2^2}=1$$

a vpravo hyperboloid dvoudílný

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{2^2}=-1.$$



je pravá strana záporná a řezem je prázdná množina: útvar je tedy dvoudílný. V případě $q=0$ jde o kuželovou plochu.

(c) Pokud $a=b$ dostáváme plochu rotačně symetrickou, kterou dostaneme rotací hyperboly v rovině $y=0$ podél osy z. V případě hyperboly s hlavní osou x, tj. $x^2/a^2-z^2/c^2=1$, je to hyperboloid jednodílný, v případě hyperboly s hlavní osou z, tj. $x^2/a^2-z^2/c^2=-1$, je to hyperboloid dvoudílný.

(d) Dvoudílný rotační hyperboloid s osou z je množina všech bodů, jejichž rozdíl vzdáleností od ohnisek $[0,0,-e]$ a $[0,0,e]$ je roven konstantě $2a$, kde $e=\sqrt{a^2+b^2}$.

(e) Jednodílný hyperboloid vznikne nejen rotací hyperboly kolem její vedlejší osy z, ale také rotací okolo osy z přímky, která je mimoběžná s osou z. Je to tedy plocha přímková, která obsahuje dva systémy mimoběžných přímek. Toho se využívá ve stavebnictví, typickým tvarem chladicích věží elektráren a tepláren je jednodílný hyperboloid.

(f) Řezy hyperboloidy jsou kružnice, elipsy, paraboly, hyperboly. V případě jednodílného hyperboloidu jsou to navíc rovnoběžné a různoběžné přímky, v případě dvoudílného hyperboloidu prázdná množina.

(g) Jestliže $a=b<c$, oba hyperboloidy jsou „protáhlé“, „úzké“. V případě $a=b>c$, oba hyperboloidy jsou „zploštělé“, „rozevřené“.

(h) Hyperboloid s různými poloosami a,b,c má tři osy symetrie x,y,z a tři roviny symetrie $x=0$, $y=0$ a $z=0$. V případě dvou stejných vedlejších poloos je hyperboloid rotační s osou rotace z a má nekonečně mnoho os i rovin symetrie.

(i) Vedle zmíněných hyperboloidů s hlavní osou z existuje i jednodílný a dvoudílný hyperboloid s hlavní osou y, jejich rovnice jsou

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1\,.$$

Jednodílný a dvoudílný hyperboloid s hlavní osou x, je určen rovnicemi

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1\,.$$

(j) Posunutý hyperboloid s hlavní osou z, poloosami a, b, c a středem $S = [x_S, y_S, z_S]$ má rovnici

$$\frac{(x - x_S)^2}{a^2} + \frac{(y - y_S)^2}{b^2} - \frac{(z - z_S)^2}{c^2} = 1.$$

(k) Analogicky lze napsat posunuté hyperboloidy s hlavní osou rovnoběžnou s osou x a y.

Další plochy mají už jenom dva kvadratické členy. Nazývají se paraboloidy a jsou dvou druhů:

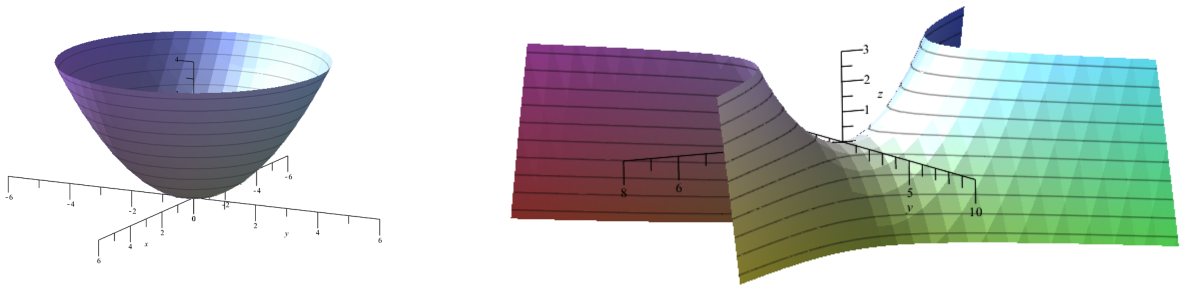
Definice 3.49. **Eliptický paraboloid** se středem v počátku s hlavní osou symetrie z a parametry p, q, kde jsou oba kladné nebo oba záporné, je dán rovnicí

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\,.$$

v případě $p = q$ se plocha nazývá rotační paraboloid. Pro $p > 0$, $q > 0$ je paraboloid otevřen „nahoru“, pro $p < 0$, $q < 0$ je „otevřen“ dolů.

Hyperbolický paraboloid se středem v počátku s hlavní osou symetrie z a parametry p, q, kde p a q jsou oba kladné nebo oba záporné, je dán rovnicí

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}\,.$$



Obr. 3.16: Paraboloid rotační $z = \dfrac{x^2}{2 \cdot 2} + \dfrac{y^2}{2 \cdot 2}$ a paraboloid hyperbolický $z = \dfrac{x^2}{2 \cdot 2} - \dfrac{y^2}{2 \cdot 2}$.

Poznámky.

(a) Oba paraboloidy jsou plochy neomezené, rotační je omezen zdola nebo shora.

(b) Pokud $p = q$, dostáváme plochu rotační, kterou dostaneme rotací paraboly $2pz = x^2$ podél osy z.

(c) Rotační paraboloid s osou z je množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od ohniska $F = [0, 0, \frac{p}{2}]$ a řídicí roviny $z = -\frac{p}{2}$. Astronomická zrcadla mají odrazovou plochu ve tvaru rotačního paraboloidu, protože paprsky rovnoběžné s osou z se odrážejí do ohniska F. Podobně reflektory mají za zdrojem světla zrcadlo tvaru rotačního paraboloidu, aby paprsky z ohniska po odrazu byly rovnoběžné a dosvítily co nejdál.

(d) Hyperbolický paraboloid má tvar sedla (horského i koňského): v jednom směru na obě strany plocha stoupá a ve směru kolmém na první směr plocha na obě strany klesá.

(e) Řezy rotačního paraboloidu jsou kružnice, elipsy, paraboly a prázdná množina. Řezy hyperbolického paraboloidu jsou paraboly, hyperboly a různoběžky.

(f) Parametry p, q určují pouze „velikost“ paraboloidů, při stejném poměru parametrů p, q jsou oba paraboloidy podobné.

(g) Eliptický paraboloid s různými parametry p, q má jenom jednu osu symetrie z a dvě roviny symetrie $x = 0$, $y = 0$. V případě rotačního paraboloidu je z také osou rotace a roviny procházející osou z jsou také rovinami symetrie.

(h) Vedle zmíněných hyperboloidů s hlavní osou z existují eliptické a hyperbolické paraboloidy s hlavní osou y a parametry p, q stejného znaménka. Jejich rovnice jsou

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{z^2}{2q}\,, \qquad y = \frac{x^2}{2p} - \frac{z^2}{2q}\,.$$

Eliptické a hyperbolické paraboloidy s hlavní osou x a parametry p, q jsou určeny rovnicemi

$$x = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q}\,, \qquad x = \frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q}\,.$$

(i) Posunutý eliptický a hyperbolický paraboloid s hlavní osou z parametry p, q a středem $S = [x_S, y_S, z_S]$ má rovnici

$$z = z_S + \frac{(x - x_S)^2}{2p} + \frac{(y - y_S)^2}{2q} \quad \text{a} \quad z = z_S + \frac{(x - x_S)^2}{2p} - \frac{(y - y_S)^2}{2q}$$

Analogicky lze napsat posunuté paraboloidy s hlavní osou rovnoběžnou s osou x a y.

(j) Rovnice $z = cxy$ pro $c \neq 0$ určuje hyperbolický paraboloid s hlavní osou z pootočený o úhel $\frac{\pi}{4}$ ($45°$).

Obecná kvadratická plocha

Dosud jsme uvedli regulární (nedegenerované) kvadratické plochy a odvodili jejich rovnice. V tomto odstavci vezmeme obecnou rovnici s kvadratickým polynomem ve třech proměnných

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D\,xy + E\,xz + F\,yz + a\,x + b\,y + c\,z + q = 0 \tag{3.18}$$

a budeme zkoumat, jakou množinu popisuje. Jak se posunutí a otočení množiny projeví v rovnicích pro jejich souřadnice? Posunutí a otočení jsou transformace, které zachovávají shodnost množiny. Proti rovinnému případu, kdy stačil jeden druh rotace, zde potřebujeme tři druhy rotace.

Věta 3.50. Nechť rovnice $R(x, y, z) = 0$ určuje množinu M. Potom platí:

(a) Množina M posunutá o vektor $[m, n, o]$ je dána rovnicí

$$R'(x, y, z) := R(x - m, y - n, z - o) = 0.$$

(b) Množina M otočená kolem osy z o úhel α v kladném směru je dána rovnicí

$$R'(x, y, z) := R(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha), -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha), z) = 0,$$

(c) Množina M otočená kolem osy y o úhel β je dána rovnicí

$$R'(x, y, z) := R(x \cos(\beta) + z \sin(\beta), y, -x \sin(\beta) + z \cos(\beta)) = 0\,.$$

(d) Množina M otočená kolem osy x o úhel γ je dána rovnicí

$$R'(x, y, z) := R(x, y \cos(\gamma) + z \sin(\gamma), -y \sin(\gamma) + z \cos(\gamma)) = 0\,.$$

Podobně jako v případě kvadratické křivky, pootočením o vhodný úhel, tj. transformacemi typu (d), (c) a (b), se postupně zbavíme členů s yz, xz a xy. Dostáváme tak rovnici (koeficienty budeme dále značit bez $'$):

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = a\,x + b\,y + c\,z + q\,.$$

Dále transformací (a) se postupně zbavíme členů s x, y a z (pokud v rovnici je odpovídající kvadratický člen x^2, y^2 a z^2). Nyní můžeme přistoupit k analýze jednotlivých případů, (konstanty A, B, C budou kladná čísla):

(a) Rovnice obsahuje tři kvadratické členy se stejnými znaménky, tj. rovnici lze napsat ve tvaru $A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = q$, což dává v případě

  (i) $q > 0$ – elipsoid (případně sféru),
  (ii) $q = 0$ – jeden bod (počátek) a
  (iii) $q < 0$ – prázdnou množinu.

(b) Rovnice obsahuje tři kvadratické členy s nestejnými znaménky, tj. rovnici lze přepsat ve tvaru $A\,x^2 + B\,y^2 - C\,z^2 = q$, což dává v případě

  (i) $q > 0$ – hyperboloid jednodílný,
  (ii) $q = 0$ – kužel a
  (iii) $q < 0$ – dvoudílný hyperboloid.

(c) Rovnice obsahuje jenom dva kvadratické členy se stejným znaménkem, např. $A\,x^2 + B\,y^2 = cz + q$, odkud plyne v případě

  (i) $c \neq 0$ – paraboloid eliptický, případně rotační,
  (ii) $c = 0$ a $q > 0$ – válec eliptický, případně rotační,
  (iii) $c = 0$ a $q = 0$ – přímku (osu z) a
  (iv) $c = 0$ a $q < 0$ – prázdnou množinu.

(d) Rovnice obsahuje jenom dva kvadratické členy ale s různými znaménky, např. $A\,x^2 - B\,y^2 = cz + q$, odkud plyne v případě

(i) $c \neq 0$ – paraboloid hyperbolický, případně rotační,
(ii) $c = 0$ a $q \neq 0$ – válec hyperbolický a
(iii) $c = 0$ a $q = 0$ – různoběžné roviny protínající se v ose z.

(e) Rovnice obsahuje jenom jeden kvadratický členy, např. $A\,x^2 = by + cz + q$, odkud plyne v případě

(i) $b \neq 0$ nebo $c \neq 0$ – parabolický válec,
(ii) $b = c = 0$ a $q > 0$ – dvě rovnoběžné roviny,
(iii) $b = c = q = 0$ – rovina $x = 0$ a
(iv) $b = c = 0$ a $q < 0$ – prázdnou množinu.

Tím jsme probrali všechny možnosti.

Poznámky.

Počet a znaménka kvadratických členů lze zjistit přímo bez transformací tím, že polynom

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D\,xy + E\,xz + F\,yz$$

doplníme na tvar s nezávislými „čtverci“, například

$$x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy - 2xz = (x + 2y - z)^2 - y^2 + 4yz = (x + 2y = z)^2 + (y - 2z)^2 - (2z)^2\,,$$

odkud plyne případ tří „čtverců“ s různými znaménky, tj. případ (b).