4C. Polynomy a racionální lomené funkce

Polynomy a racionální funkce mají zvláštní význam zejména v numerické a aplikované matematice. Patří mezi tzv. algebraické funkce, ke kterým patří také funkce s odmocninami. Polynomy a racionální funkce jsou totiž jediné funkce, které dovedeme vyčíslit pomocí operací sčítání, násobení a dělení. Pokud potřebujeme vyčíslit tzv. transcendentní funkci (exponenciální, logaritmická, sinus, kosinus, atd.) v konkrétním bodě, použijeme vhodný polynom, který nám dá s požadovanou přesností hodnotu funkce.

Polynomy

Polynomy (mnohočleny) jsou nejjednodušší funkce, vzniknou lineární kombinací mocnin proměnné x. Stupeň polynomu je nejvyšší mocnina proměnné x. Podle koeficientů rozlišujeme polynomy reálné a komplexní a podle proměnné na polynomy v reálném oboru, kdy definičním oborem je množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a polynomy v komplexním oboru, kdy definičním oborem je množina komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Definice 4.34. (Polynomy) Polynom (česky mnohočlen) stupně n je funkce tvaru

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0\,,$$

kde čísla $a_n, \ldots, a_1, a_0$ nazýváme koeficienty, koeficient při nejvyšší mocnině však musí být nenulový: $a_n \neq 0$. Koeficient a_0 se nazývá absolutní člen polynomu a n je stupeň polynomu, píšeme $\mathrm{St}(P(x)) = n$. Když chceme zdůraznit, že polynom je stupně n, píšeme $P_n(x)$.

Polynom, který má za koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ reálná čísla, nazýváme reálným polynomem, pokud koeficienty mohou být i komplexní čísla, mluvíme o komplexním polynomu.

Pokud za x bereme jenom reálná čísla, tj. $x \in \mathbb{R}$, mluvíme o polynomu v reálném oboru, připouštíme-li x z komplexního oboru, tj. $x \in \mathbb{C}$, mluvíme polynomu v komplexním oboru.

Poznámky 4.35.

(a) Každý reálný polynom je také komplexní, neboť každé reálné číslo je i komplexní.

(b) Budeme se zabývat hlavně reálnými polynomy v reálném oboru, které každému reálnému číslu x přiřazují reálné číslo $P(x)$. Důležité budou i reálné polynomy v komplexním oboru a také obecné komplexní polynomy v komplexním oboru.

(c) Polynom druhého stupně nazýváme kvadratickým polynomem, třetího stupně kubickým polynomem. Polynom $P(x) = a_0 \neq 0$ je polynomem nultého stupně, polynom $P(x) = 0$ nazýváme nulový polynom; jeho stupeň se někdy definuje jako -1. Obvykle předpokládáme, že stupeň polynomu je alespoň jedna.

(d) Příkladem polynomu prvního stupně je $P_1(x) = x-2$, druhého stupně $P_2(x) = x^2-5x+6$, třetího stupně $P_3(x) = x^3 - 3x$, atd. Polynom n-tého stupně je tak jednoznačně určen $n+1$ koeficienty $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

(e) Polynom s prvním koeficientem $a_n = 1$, tj.

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,,$$

nazýváme normovaný polynom nebo polynom v normovaném tvaru. Každý polynom stupně n vydělením prvním koeficientem a_n lze převést na normovaný, protože $a_n \neq 0$.

Operace s polynomy

Připomeňme vlastnosti operací s polynomy, které platí pro reálné i pro komplexní polynomy, v reálném i komplexním oboru. Polynom lze násobit číslem, sčítat (a odčítat) a násobit:

Věta 4.36. (Operace s polynomy) Buď $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polynom stupně n a $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ polynom stupně m. Potom platí:

(a) Polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ jsou si rovny, pokud jsou stejného stupně a mají stejné koeficienty, tj. jejich rozdíl $P(x) - Q(x)$ je nulový polynom.

(b) Pro číslo $c \neq 0$ je násobek $cP(x)$ polynomem stejného stupně s koeficienty ca_i.

(c) Součet $P(x)+Q(x)$ je polynomem stupně $\max(n,m)$ s koeficienty $a_i + b_i$, pokud $n > m$, potom pro $i > m$ je bereme $b_i = 0$.

(d) Součin $P(x) \cdot Q(x)$ je polynom stupně $n+m$ s koeficienty c_k rovnými součtu $\sum a_i b_j$ přes $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ splňujícím $i + j = k$, tj. $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, …, $c_{n+m-1} = a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1}$, a $c_{n+m} = a_n b_m$.

Sčítání i násobení polynomů má stejné vlastnosti jako sčítání a násobení čísel:

Věta 4.37. Sčítání a násobení polynomů je komutativní a asociativní

$$Q(x) + P(x) = P(x) + Q(x)\,, \qquad Q(x) \cdot P(x) = P(x) \cdot Q(x)\,,$$

$$(P(x)+Q(x))+R(x) = P(x)+(Q(x)+R(x))\,, \quad (P(x)\cdot Q(x))\cdot R(x) = P(x)\cdot(Q(x)\cdot R(x))$$

a obě operace jsou spojeny distributivním zákonem:

$$(P(x) + Q(x)) \cdot R(x) = P(x) \cdot R(x) + Q(x) \cdot R(x)\,.$$

Tak jako celá nesoudělná čísla, také polynomy nelze vždy dělit. Pokud je dělitel nenulový, lze je však dělit se zbytkem:

Věta 4.38. (Dělení polynomů se zbytkem) Buď $P(x)$ polynom stupně m a $Q(x)$ nenulový polynom stupně n, $n \leq m$. Potom existuje právě jeden polynom $P_p(x)$ stupně $m - n$ zvaný podíl a polynom $P_r(x)$ stupně r, $r < n$ zvaný zbytek takový, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_p(x) + \frac{P_r(x)}{Q(x)}\,, \quad \text{neboli} \quad P(x) = P_p(x) \cdot Q(x) + P_r(x)\,.$$

Kořeny polynomu

Definice 4.39. (Kořen) Každé číslo α takové, že platí $P(\alpha) = 0$ se nazývá **kořen** polynomu $P(x)$. Číslo α může být reálné nebo komplexní podle oboru, ve kterém pracujeme.

Poznámka. Každý kořen α polynomu $P(x)$ je tedy řešením rovnice $P(x) = 0$, tj. platí

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0\,.$$

Graf funkce $P(x)$ protíná osu x v bodech, které jsou reálnými kořeny polynomu $P(x)$. Toho lze využít při řešení nerovnic grafickou cestou.

Příklady 4.40.

(a) Funkce $P(x) = x^2 + 4x - 5$ je reálný polynom druhého stupně a $x^2 + 4x - 5 = 0$ příslušná algebraická rovnice druhého stupně, tzv. kvadratická rovnice. Známým vzorcem pro řešení kvadratické rovnice nebo rozkladem $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$ lze zjistit, že jak polynom tak rovnice mají stejné kořeny $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = -5$.

Grafem polynomu je parabola, která protíná osu x v bodech -5 a 1. Z grafu je vidět, že řešením nerovnice $x^2 + 4x - 5 < 0$ je interval $(-5, 1)$. Polynom v reálném i komplexním oboru má dva reálné kořeny $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = -5$, které jsou i komplexní.

(b) Funkce $P(x) = x^4 - 1$ je reálný polynom 4. stupně. Úpravou na tvar $P(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ je vidět, že polynom v reálném oboru má dva kořeny $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = -1$. Rozkladem $x^2 + 1 = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$ zjistíme, že polynom má v komplexním oboru další dva ryze imaginární kořeny $\alpha_3 = \mathrm{i}$ a $\alpha_4 = -\mathrm{i}$, tj. celkem čtyři komplexní kořeny. Lze jej tedy zapsat ve tvaru $P(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$.

(c) Funkce $P(x) = x^3 + 1$ je reálný polynom třetího stupně. Rozklad pomocí vzorce $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$ dává $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Vidíme, že polynom má jeden reálný kořen $\alpha_1 = 1$. Řešením kvadratické rovnice $x^2 - x + 1 = 0$ dostáváme další dva komplexní kořeny $\alpha_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})$ a $\alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i})$, celkem tři komplexní kořeny. Polynom tak lze zapsat ve tvaru

$$P(x) = x^3 + 1 = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})\right)\left(x - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i})\right).$$

Kořeny polynomu v komplexním oboru

Základním problémem teorie polynomů je, zda daný polynom má kořen a kolik jich je. Víme, že polynom prvního stupně $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$ má jeden kořen $\alpha = -b/a$, reálný polynom druhého stupně $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ podle teorie kvadratických rovnic má buď dva reálné kořeny pokud diskriminant $D = b^2 - 4ac$ je kladný, jeden reálný dvojnásobný pokud $D = 0$ a dvojici komplexně sdružených kořenů, pokud je diskriminant záporný, tj. v každém případě dva kořeny v komplexním oboru. Jak to vypadá u polynomů vyššího stupně? V předchozích příkladech měl polynom čtvrtého stupně 4 kořeny a polynom třetího stupně 3 kořeny.

Z grafu reálného polynomu $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ lichého stupně v reálném oboru je vidět, že má alespoň jeden reálný kořen, protože nejvyšší mocnina x^n (která „přemůže“ pro velká x nižší mocniny) je lichá a jde od „minus nekonečna“ do „plus nekonečna“. Musí proto protnout osu x v nějakém bodě, který je kořenem polynomu. Reálný polynom sudého stupně však osu x protnout nemusí, protože jeho graf „jde“ od „plus nekonečna“ do „plus nekonečna“.

Na otázku, zda každý polynom má kořen, odpovídá důležitá tzv. základní věta algebry:

Věta 4.41. **(Základní věta algebry)** Každý polynom stupně $n \geq 1$ má v komplexním oboru alespoň jeden komplexní kořen. Platí to pro každý reálný i komplexní polynom.

Poznámky 4.42.

(a) Existuje několik důkazů této slavné věty. Důkaz však vynecháme, protože k jeho provedení nám zatím chybí prostředky.

(b) Víme už, že každý polynom alespoň prvního stupně má kořen. Druhou otázkou je: „Kolik těch kořenů je?“ Nejdřív si musíme ujasnit, jakým způsobem budeme počet kořenů počítat. Uvažujme reálný kvadratický polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$. Pokud diskriminant $D = b^2 - 4ac$ je kladný, polynom má dva reálné kořeny $\alpha_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/(2a)$ a lze ho zapsat ve tvaru tzv. kořenového součinu $P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. Pokud diskriminant je záporný, máme dva kořeny komplexně sdružené $\alpha_{1,2} = (-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-D})/(2a)$ a polynom lze zapsat ve stejném tvaru. V případě nulového diskriminantu však existuje jenom jeden kořen $\alpha = -b/(2a)$. Také v tomto případě lze polynom zapsat ve tvaru tzv. kořenového součinu $P(x) = a(x - \alpha)^2$, říkáme proto, že tento kořen je dvojnásobný.

(c) Kořeny počítáme s jejich „násobností“, tj. podle rozkladu polynomu do kořenového součinu

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)\,.$$

Existuje takový rozklad? Pomocí následujícího tvrzení existenci snadno dokážeme.

Věta 4.43. Buď $P_n(x)$ polynom stupně $n > 1$ a α jeho kořen. Potom existuje polynom $P_{n-1}(x)$ stupně $n - 1$ takový, že $P_n(x) = (x - \alpha)\, P_{n-1}(x)\,.$

Důkaz tvrzení je jednoduchý, proto ho uvedeme. Buď $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ a α jeho kořen, tj. $P_n(\alpha) = 0$. Potom

$$P_n(x) = P_n(x) - P_n(\alpha) = (x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_2(x^2 - \alpha^2) + a_1(x - \alpha) + a_0(1 - 1).$$

Pomocí vzorce $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$ lze každý výraz $x^k - \alpha^k$ rozložit do tvaru $(x - \alpha)(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + \cdots + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1})$ a ze všech členů vytknout výraz $(x - \alpha)$. Tím je tvrzení dokázáno. □

Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně $n \geq 1$. Ze Základní věty algebry plyne, že $P_n(x)$ má alespoň jeden kořen α_1. Podle předchozího tvrzení existuje polynom $P_{n-1}(x)$ takový, že platí $P_n(x) = (x - \alpha_1)P_{n-1}(x)$. Polynom $P_{n-1}(x)$ stupně $n - 1$ má podle Základní věty algebry opět kořen α_2 a podle předchozího tvrzení existuje polynom $P_{n-2}(x)$ stupně $n - 2$, že $P_{n-1}(x) = (x - \alpha_2)P_{n-2}(x)$. Takto postupujeme, dokud stupeň polynomu $P_k(x)$ je větší než 1. □

Následující věta měla pro celou algebru opravdu základní význam v dobách, kdy se algebra zabývala studiem číselných struktur. Platnost věty tušili již italští matematikové v 16. století, ale první její správný a úplný důkaz nalezl teprve C. F. Gauss v roce 1799.

Věta 4.44. Každý polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ stupně $n \geq 1$ **má právě n kořenů** v komplexním oboru v následujícím smyslu:

Existují (ne nutně různá) **komplexní čísla** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ taková, že

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)\,.$$

Pokud se v n-tici kořenů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vyskytují dvě stejná čísla α, číslo α nazveme **dvojnásobným kořenem**, pokud se v součinu vyskytují tři stejná čísla α, je to **trojnásobný kořen**. Polynom tak s násobnostmi m_i lze zapsat ve tvaru

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{m_1}\,(x - \alpha_2)^{m_2}\,\cdots\,(x - \alpha_k)^{m_k}\,,$$

přičemž pro násobnosti kořenů platí $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

Kořeny reálného polynomu v komplexním oboru

Uvažujme polynom $P(x)$ stupně n s reálnými koeficienty a_i. Pokud komplexní číslo $\beta = \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2$ $(\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R})$ je kořenem polynomu $P(x)$, potom komplexně sdružené číslo $\overline{\beta} = \beta_1 - \mathrm{i}\beta_2$ je také kořenem polynomu $P(x)$. Skutečně, ze vztahu $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha \cdot \beta}$ plyne $(\overline{\beta})^k = \overline{(\beta^k)}$, a tedy pro jejich lineární kombinaci s reálnými a_i platí $P(\overline{\beta}) = \overline{P(\beta)} = 0$. Proto je-li číslo β kořenem $P(x)$, je kořenem i číslo $\overline{\beta}$ a oba kořeny mají stejnou násobnost. Důsledkem je následující věta:

Věta 4.45. Každý reálný polynom stupně $n \geq 1$ v komplexním oboru má buď reálné kořeny α nebo dvojice komplexně sdružených kořenů $\beta, \overline{\beta}$.

Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s reálnými koeficienty a_i má kořenový součin ve tvaru součinu mocnin dvojčlenů $(x - \alpha)$ a nerozložitelných trojčlenů $(x^2 + qx + r)$, tedy

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_k)^{m_k}\,(x^2 + q_1 x + r_1)^{n_1} \cdots (x^2 + q_\ell x + r_\ell)^{n_\ell}\,,$$

přičemž $m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell) = n$ a $q_j^2 - 4r_j < 0$.

Trojčleny $(x^2 + qx + r)$ nelze v reálném oboru rozložit, protože jejich diskriminant $q^2 - 4r$ je záporný. V komplexním oboru však mají rozklad $(x^2 + qx + r) = (x - \beta)(x - \overline{\beta})$.

Příklady 4.46.

(a) Polynom $P_2(x) = x^2 - 2x + 1$ má jeden dvojnásobný kořen 1 (v reálném i komplexním oboru), protože $P_2(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

(b) Polynom $P_4(x) = x^4 + x^3$ trojnásobný kořen 0 a jednoduchý kořen 1, protože ho lze zapsat ve tvaru $P_4(x) = x^4 + x^3 = x^3(x - 1)$.

(c) Reálný polynom $P_2(x) = x^2 + 1$ nemá kořeny v reálném oboru, v komplexním má dva jednoduché kořeny $-\mathrm{i}$ a i, protože $P_2(x) = x^2 + 1 = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})$.

(d) Polynom $P_4(x) = x^4 - 16$ je reálný polynom. Má dva reálné kořeny $2, -2$ a jednu dvojici komplexně sdružených kořenů $\pm 2\,\mathrm{i}$; v komplexním oboru má tedy 4 kořeny $2, -2, 2\,\mathrm{i}, -2\,\mathrm{i}$:

$$P_4(x) = x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x - 2\,\mathrm{i})(x + 2\,\mathrm{i})\ .$$

(e) Polynom $P_3(x) = x^3 + 12x^2 + 6x + 8$ má trojnásobný reálný kořen -2. Lze jej rozložit:

$$P_3(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3\ .$$

(f) Polynom $P_4(x) = x^4 + 4$ má čtyři komplexní kořeny, které tvoří dvě dvojice komplexně sdružených kořenů $1 \pm \mathrm{i}$ a $-1 \pm \mathrm{i}$, protože

$$P_4(x) = x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = (x - 1 - \mathrm{i})(x - 1 + \mathrm{i})(x + 1 - \mathrm{i})(x + 1 + \mathrm{i})\,.$$

(g) Polynom $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ má jednu dvojici dvojnásobných komplexně sdružených kořenů $\pm\,\mathrm{i}$, protože

$$P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 = (x - \mathrm{i})^2\,(x + \mathrm{i})^2\ .$$

Problém určování kořenů

Máme-li polynom stupně n, víme, že má v komplexním oboru s násobnostmi n kořenů. Otázkou je, zda existuje nějaký univerzální algoritmus na hledání kořenů polynomu. Pro polynomy prvního a druhého stupně jsou to kořeny lineární a kvadratické rovnice, jejichž řešení bylo známo již ve starověku.

Poznámka 4.47. Již v 16. století byly známy vzorce také pro řešení rovnice třetího stupně (kubické) a čtvrtého stupně. Tyto tzv. Cardanovy vzorce (viz např. Rektorys: Přehled užité matematiky 1, § 1.20), pro praktický výpočet však vhodné nejsou, protože obsahují třetí odmocniny z komplexních čísel, které je možno vyčíslit jen pomocí hodnot funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

Dlouhou dobu se matematikové snažili nalézt podobné vzorce pro kořeny polynomů stupně 5 a 6. Za vzorec se přitom považuje postup obsahující konečně mnoho aritmetických operací (sčítání, násobení a dělení) a odmocnin. Teprve v polovině 19. století dokázal francouzský matematik Évariste Galois (1811-1832), že takové obecné vzorce pro polynomy stupně pátého a vyššího neexistují.

Poznámky 4.48. V řadě případů lze zjistit i kořeny polynomu vyššího stupně. Je to v případě, kdy reálný polynom s celočíselnými koeficienty má celočíselné nebo racionální kořeny, což ve školních příkladech lze očekávat — v praxi je to však spíše výjimečné.

(a) Pokud absolutní člen chybí, tj. $a_0 = 0$, kořenem je nula. Pokud navíc $a_i = 0$ pro $i < k$ a $a_k \neq 0$), lze z polynomu vytknout mocninu x^k. V tomto případě je 0 k-násobným kořenem. V dalším budeme proto předpokládat, že $a_0 \neq 0$.

(b) Roznásobme rozklad polynomu $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\,.$$

Porovnáním absolutních členů zjistíme

$$a_0 = (-1)^n\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\,.$$

Pokud polynom má jenom celočíselné kořeny, potom tyto kořeny dělí beze zbytku absolutní člen a_0. Dělitelů a_0 je konečně mnoho. Rozkladem na prvočísla zjistíme všechny dělitele a_0. Pozor, s každým přirozeným číslem α je dělitelem také číslo $-\alpha$ a vždy čísla 1 a -1. Dosazením dělitelů do polynomu zjistíme, které z nich jsou kořeny.

(c) Porovnáním koeficientů u x^{n-1} dostáváme součet všech kořenů

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\ a_{n-1}\ ,$$

což může pomoci při kontrole, nebo při dopočítávání posledních kořenů.

(d) Když zjistíme, že polynom $P(x)$ stupně n má kořen α, potom polynom $P(x)$ vydělíme dvojčlenem $(x-\alpha)$, čímž získáme polynom stupně o jedničku nižší, tj. stupně $n-1$.

(e) Polynom $P_n(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ s celočíselnými koeficienty začínající a_n různým od $\pm 1, 0$, nesoudělnými koeficienty a_i a $a_0 \neq 0$ může mít za kořeny racionální čísla. Jestliže takovýto polynom má jenom racionální kořeny $\alpha_i = p_i/q_i$ s nesoudělnými $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}$, potom jeho kořenový součin se skládá ze součinu celočíselných dvojčlenů $(q_ix - p_i)$. Jeho kořenový rozklad lze napsat v celočíselném tvaru $P_n(x) = (q_1x-p_1)(q_2x-p_2)\cdots(q_nx-p_n)$. Roznásobením tohoto rozkladu dostaneme

$$P_n(x) = q_1\,q_2\cdots q_n\,x^n + \cdots + (-1)^n p_1\,p_2\cdots p_n\,.$$

Porovnáním koeficientů u x^n zjistíme $a_n = q_1\,q_2\cdots q_n$ a porovnání absolutních členů dává $a_0 = (-1)^n p_1\,p_2\cdots p_n$, odkud plyne tvrzení pro polynomy s celočíselnými koeficienty:

Je-li $\alpha_i = p_i/q_i$ kořen polynomu, potom p_i dělí koeficient a_0 a q_i dělí koeficient a_n.

Tvrzení dává kandidáty na kořeny polynomu, které nutno ověřit dosazením do polynomu. Pokud však polynom nemá racionální kořeny, kořeny takto nedostaneme.

(f) Porovnáním členů u mocniny x^{n-1} v předchozím případě dostáváme rovnost
$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -a_{n-1}/a_n$.

Vyčíslení hodnoty polynomu nám urychlí tzv. Hornerovo schéma.

Definice 4.49. (Hornerovo schéma)
Polynom $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ lze přepsat ve tvaru

$$P(x) = ((\cdots(((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0\ ,$$

který umožní výpočet hodnoty polynomu n-tého stupně pomocí $2n$ operací bez ukládání mezivýsledků.

Například hodnotu $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ v bodě x spočítáme v 8 krocích:
Vezmi a_4, násob x, přičti a_3, násob x, přičti a_2, násob x, přičti a_1, násob x a přičti a_0.

Výpočet lze zapsat v tabulce, C označuje hodnotu v buňce vlevo:

x	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	$P(x)$
x	a_4	$C\cdot x + a_3$	$C\cdot x + a_2$	$C\cdot x + a_1$	$C\cdot x + a_0$	$P(x) = C$

Spočítejme hodnotu polynomu $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3$ v bodech $x = 1$ a $x = 3$

x	2	-3	2	-1	3	$P(x)$
1	2	-1	1	0	3	$P(1) = 3$
3	2	3	11	32	99	$P(3) = 99$

Příklad 4.50. Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$.

Řešení: Podle předchozí Poznámky (e) vytipujeme čísla p a q racionálního kořene $\alpha = p/q$:

$$p \text{ dělí } -3 \quad\Longrightarrow\quad p = 1,\,-1,\,3,\,-3\,;\qquad q \text{ dělí } 4 \;\Longrightarrow\; q = 1,\,2,\,4.$$

Vypíšeme všechny možné hodnoty p/q:

$$\frac{p}{q}:\quad 1,\,-1,\,\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2},\,\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4},\,3,\,-3,\,\frac{3}{2},\,-\frac{3}{2},\,\frac{3}{4},\,-\frac{3}{4}\,.$$

Ověření, který z uvedených kandidátů je kořenem polynomu $P(x)$, provedeme Hornerovým schématem, podle něhož zjistíme, že $-\frac{1}{2}$ a 3 jsou kořeny. Protože se jedná o polynom třetího stupně, jeden kořen nám chybí, nebo jeden z kořenů je dvojnásobný. Třetí kořen zjistíme buď dělením polynomů: $P(x) : Q(x)$, kde $Q(x) = (x-3)(2x+1)$, nebo dosazením již známých kořenů do vztahů $a_3 = q_1\, q_2\, q_3$ a $a_0 = (-1)^n p_1\, p_2\, p_3$ z předchozí poznámky. Rovnost $4 = 2 \cdot 1 \cdot p_3$ dává $p_3 = 2$ a $3 = -1 \cdot 3 \cdot q_3 = 1$ dává $p_3 = -1$. Kořen $\alpha_3 = p_3/q_3 = -\frac{1}{2}$ je tedy dvojnásobný.

Příklad 4.51. Určete polynom nejnižšího stupně tak, aby $\alpha_1 = 0$ byl jednoduchý kořen, $\alpha_2 = -1$ byl dvojnásobný kořen, $\alpha_3 = \mathrm{i}$ a $\alpha_4 = -\mathrm{i}$.

Řešení: $P(x) = \big(x-0\big)\big(x-(-1)\big)^2\big(x-\mathrm{i}\big)\big(x-(-\mathrm{i})\big) = x(x+1)^2(x^2+1) = x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x.$

Příklady 4.52. Rozložte polynomy v reálném oboru:

(a) $P(x) = x^4 - 1;$

(b) $P(x) = 16x^4 - 9;$

(c) $P(x) = x^2 + 2x + 5;$

(d) $P(x) = x^3 + 1;$

(e) $P(x) = x^4 + 1;$

(f) $P(x) = x^8 - 16;$

(g) $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1.$

Řešení:

(a) $P(x) = x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1).$

(b) $P(x) = 16x^4 - 9 = 16\left(x^4 - \frac{9}{16}\right) = 16\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 16\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

(c) $P(x) = x^2 + 2x + 5$ nelze v reálném oboru rozložit, protože diskriminant $D < 0$.

(d) $P(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$

(e) Použijeme trik: přičteme a odečteme výraz $2x^2$ a využijeme vzorec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: $P(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1).$

(f) S využitím postupu v příkladu (e) máme: $P(x) = x^8 - 16 = \left(x^4\right)^2 - 4^2 = (x^4+4)(x^4-4) = $ $= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\,.$

(g) $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+1) = $ $= (x-1)(x^2+x+1)^2.$

Racionální lomené funkce

Kromě polynomů mají v praxi velký význam také racionální lomené funkce, které vzniknou jako podíl dvou polynomů, protože vedle polynomů i jejich hodnoty umíme přímo vyčíslit.

Definice 4.53. Nechť $P(x)$ je reálný polynom stupně m a $Q(x)$ nenulový reálný polynom stupně n. Potom funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá reálná **racionální lomená funkce** nebo jen **racionální funkce**.
Je-li $m < n$, mluvíme o **ryze lomené racionální funkci**.
Je-li $m \geq n$, pak mluvíme o **neryze lomené racionální funkci**.

Věta 4.54. Definičním oborem racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ jsou všechna reálná (komplexní) čísla kromě kořenů polynomu $Q(x)$, kterých je konečně mnoho.

Poznámky. V případě, že polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ v racionální funkci $P(x)/Q(x)$ lze částečně „zkrátit“, definiční obor funkce se může zvětšit o „vykrácený“ kořen. Například zkrácením racionální funkce $\frac{x-1}{x^2-1} \equiv \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$, která je definovaná pro $x \neq \pm 1$, dostaneme racionální funkci $\frac{1}{x+1}$, která je definovaná pro $x \neq -1$. Pro $x \neq \pm 1$ obě funkce dávají stejné hodnoty.

Příklady 4.55.

(a) Funkce $\dfrac{x^2+1}{x^3-2x-1}$ je ryze lomená racionální funkce.

(b) Funkce $\dfrac{x^4+x-2}{x^2-x-1}$ je neryze lomená racionální funkce.

Podle Věty o dělení polynomů se zbytkem lze každou neryze lomenou racionální funkci vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze racionální:

Věta 4.56. Nechť $P(x)$ je polynom stupně m vyššího než polynom $Q(x)$ stupně n, $(m \geq n)$. Potom existují polynom $P_p(x)$ stupně $m-n$ a polynom $P_r(x)$ stupně menšího než n takové, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_p(x) + \frac{P_r(x)}{Q(x)}.$$

Tedy každou neryze lomenou racionální funkci $P(x)/Q(x)$ lze rozložit na součet polynomu $P_p(x)$ a ryze lomené racionální funkce $P_r(x)/Q(x)$.

Příklad 4.57. Vyjádřete racionální funkce jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce:

(a) $R(x) = \dfrac{-4x^2+10x-1}{x^2-3x+6}$, (b) $R(x) = \dfrac{2x^5-x^4+3x^2-x+1}{x^2-2x+4}$.

Řešení: Polynomy vydělíme tak, jak jsme zvyklí ze střední školy. Výsledek dělení zapíšeme:

(a) $R(x) = -4 + \dfrac{-2x+23}{x^2-3x+6}$, (b) $R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \dfrac{-19x+53}{x^2-2x+4}$.

Rozklad na parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky budeme potřebovat při integraci racionálních funkcí: parciální zlomky budeme „umět“ integrovat. Pokud ukážeme, že každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků, budeme umět integrovat všechny racionální funkce, protože každou neryze lomenou racionální funkce už umíme rozložit na součet ryze racionální funkce a polynomu, který také budeme umět integrovat.

Definice 4.58. Zlomky tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \qquad \text{a} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\ell}, \quad \text{kde} \ \ p^2-4q<0 \ , \quad A,B,C \in \mathbb{R} \ \ \text{a} \ \ k,\ell \in \mathbb{N} \ ,$$

nazýváme **parciální zlomky**.

Hlavním výsledkem je skutečnost, že každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků.

Věta 4.59. (Rozklad ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky)
Nechť $P(x)$ je polynom stupně m a $Q(x)$ polynom vyššího stupně n s kořenovým rozkladem

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}\,(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\,(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}\cdots(x^2+p_jx+q_j)^{n_\ell},$$

přičemž $m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell) = n$.

Potom existují reálná čísla A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} taková, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{A_{1i}}{(x-\alpha_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{ki}}{(x-\alpha_i)^i} + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{B_{1j}x + C_{1j}}{(x^2+p_1x+q_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{B_{n_\ell j}x + C_{n_\ell j}}{(x^2+p_jx+q_j)^j} \ .$$

Předchozí vzorec je trochu nepřehledný, jako kontrolu lze uvést skutečnost, že počet všech koeficientů A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} je roven stupni polynomu $Q(x)$ ve jmenovateli.

Postup při rozkladu racionální funkce $R(x) = P(x)/Q(x)$ na parciální zlomky.

(1) Pokud stupeň čitatele $P(x)$ je větší nebo roven stupni jmenovatele $Q(x)$, dělením se zbytkem „odštěpíme“ z funkce $R(x)$ polynom $P_p(x)$, abychom dostali ryze lomenou racionální funkci $P_r(x)/Q(x)$, tedy

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_r(x)}{Q(x)} \, .$$

(2) Jmenovatel $Q(x)$ rozložíme na kořenový součin v reálném oboru:

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}\,(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdots(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{n_\ell} \ .$$

(3) Napíšeme tvar rozkladu $P_r(x)/Q(x)$ na parciální zlomky s neurčitými koeficienty. Na levou stranu dáme ryze lomenou racionální funkci $P_r(x)/Q(x)$. Na pravou stranu pak součet následujících tzv. parciálních zlomků:

(a) Za každý člen $(x - \alpha_i)$ v kořenovém součinu jmenovatele $Q(x)$ na pravou stranu rozkladu přičteme zlomek s neznámým koeficientem A_i

$$\frac{A_i}{x - \alpha_i}\,.$$

Pokud kořen α_i je vícenásobný, tj. v kořenovém součinu $Q(x)$ je mocnina $(x - \alpha_i)^{m_i}$, na pravou stranu rozkladu přičteme m_i zlomků s neznámými koeficienty A_{ij}

$$\frac{A_{i1}}{x - \alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x - \alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{im_i}}{(x - \alpha_i)^{m_i}}\,.$$

(b) Pokud v kořenovém rozkladu $Q(x)$ je člen $(x^2 + p_i x + q_i)$, kde $x^2 + p_i x + q_i$ je nerozložitelný trojčlen, tj. diskriminant $D = p_i^2 - 4q_i < 0$, potom na pravou stranu rovnosti přidáme zlomek s neurčitými koeficienty B_i, C_i

$$\frac{B_i x + C_i}{x^2 + p_i x + q_i}\,.$$

Pokud v kořenovém rozkladu $Q(x)$ je mocnina $(x^2 + p_i x + q_i)^{n_i}$ nerozložitelného trojčlenu, potom na pravou stranu rozkladu přičteme n_i zlomků

$$\frac{B_{i1} x + C_{i1}}{x^2 + p_i x + q_i} + \frac{B_{i2} x + C_{i2}}{(x^2 + p_i x + q_i)^2} + \cdots + \frac{B_{in_i} x + C_{in_i}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{n_i}}.$$

(4) V tomto kroku určíme neurčité koeficienty A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}. Rozklad na parciální zlomky s neurčitými koeficienty vynásobíme jmenovatelem $Q(x)$. Na obou stranách takto získané rovnosti dostaneme polynomy stupně nejvýše $n - 1$. Na levé straně je to polynom $P_r(x)$ stupně menšího než n, na pravé straně součet členů s neurčitými koeficienty A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} násobených částmi kořenového rozkladu polynomu $Q(x)$ stupně nejvýše $n - 1$.

(5) Využijeme skutečnosti, že dva polynomy jsou si rovny, pokud se rovnají odpovídající koeficienty stejných mocnin proměnné x. Proto porovnáme koeficienty při stejných mocninách x^i, tj. při x^{n-1}, x^{n-2}, $\dots x^1 = x$ a $x^0 = 1$. Dostaneme tak soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých koeficientů A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, která má vždy právě jedno řešení.

Pokud by nám vyšlo, že soustava rovnic nemá řešení, potom racionální lomená funkce nebyla ryzí, nebo ve výpočtech je chyba. Také výsledek typu koeficient roven násobku x poukazuje na chybu.

Pokud polynom má reálný kořen α_i, je velmi výhodné při určování konstant A_i využít následujícího triku: Do rovnosti polynomů dosadíme za x kořen α_i. Na levé straně dostaneme číslo. Na pravé straně se nám všechny členy s $(x - \alpha_i)$ nulují až na jeden s A_{m_i}, čímž dostáváme lineární rovnici pro A_{m_i}, odkud přímo plyne hodnota A_{m_i}.

Pokud $Q(x)$ má jenom jednoduché reálné kořeny, můžeme tak zjistit všechny koeficienty a nemusíme soustavu lineárních rovnic vůbec sestavovat. Pokud polynom $Q(x)$ má kořeny násobné nebo komplexně sdružené, zbývající konstanty nutno dopočítat ze soustavy lineárních rovnic.

(6) Vypočítané hodnoty koeficientů dosadíme do rozkladu výsledného rozkladu racionální funkce.

Na třech příkladech si ukážeme, jakým způsobem provést rozklad a spočítat příslušné koeficienty A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}.

Příklad 4.60. Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \dfrac{2x^4 - 4x^3 + 7x + 4}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Řešení: Stupeň polynomu v čitateli není nižší než ve jmenovateli, funkce $R(x)$ proto není ryze lomená. Nutno z ní nejdřív „odštěpit“ polynom, aby vznikla ryze racionální funkce.

(1) Dělením polynomu $P(x)$ v čitateli polynomem $Q(x)$ ve jmenovateli dostáváme:

$$(2x^4 - 4x^3 + 7x + 4) : (x^3 - x^2 - 2x) = 2x - 2 \qquad \text{zbytek} \;\; 2x^2 + 3x + 4\,.$$

Funkce $R(x)$ jsme tak rozložili na součet polynomu a ryze racionální funkce

$$R(x) = 2x - 2 + \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^3 - x^2 - 2x}\,.$$

(2) Rozložíme jmenovatel

$$Q(x) = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)\,,$$

využili jsme přitom kořeny $-1, 2$ kvadratické rovnice $x^2 - x - 2 = 0$.

(3) Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar:

$$\frac{2x^2 + 3x + 4}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2}.$$

(4) Určíme konstanty A_1, A_2, A_3. Rovnost vynásobíme polynomem $Q(x) = x(x+1)(x-2)$:

$$2x^2 + 3x + 4 = A_1(x+1)(x-2) + A_2\,x(x-2) + A_3\,x(x+1)$$

(5) Protože jmenovatel má tři jednoduché reálné kořeny 0, -1 a 2, k určení konstant použijeme uvedený „trik“. Dosazení $x = 0$ dává $4 = -2\,A_1$, odkud plyne $A_1 = -2$; dosazení $x = -1$ dává $3 = 3\,A_2$, odkud $A_2 = 1$ a dosazení $x = 2$ dává $18 = 6\,A_3$, odkud máme $A_3 = 3$.

Pro kontrolu uvedeme i soustavu lineárních rovnic, kterou bychom dostali porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně:

$$\begin{array}{lrcl} x^2: & 2 & = & A_1 + A_2 + A_3 \\ x^1 = x: & 3 & = & -A_1 - 2A_2 + A_3 \\ x^0 = 1: & 4 & = & -2A_1 \end{array}$$

a která dává stejné řešení.

(6) Získali jsme rozklad racionální funkce $R(x)$ na parciální zlomky:

$$R(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + 7x + 4}{x^3 - x^2 - 2x} = 2x - 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-2}.$$

Příklad 4.61. Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \dfrac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}$.

Řešení: Funkce $R(x)$ je ryze lomená racionální funkce.

(1) Rozložíme jmenovatel v reálném oboru: $Q(x) = x^4-2x^3+2x^2 = x^2(x^2-2x+2)$, kvadratický výraz x^2-2x+2 nerozkládáme, protože má záporný diskriminant.

(2) Kořen 0 je dvojnásobný, proto rozklad na parciální zlomky má tvar:

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}.$$

(3) Určíme konstanty A_1, A_2, B, C. Rovnost vynásobíme polynomem $Q(x) = x^2(x^2-2x+2)$:

$$x^2-2 = A_1x(x^2-2x+2) + A_2(x^2-2x+2) + (Bx+C)x^2.$$

Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin proměnné x na levé a pravé straně dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{lrcl} x^3: & 0 & = & A_1+B \\ x^2: & 1 & = & -2A_1+A_2+C \\ x: & 0 & = & 2A_1-2A_2 \\ 1: & -2 & = & 2A_2 \end{array}$$

ze které postupně určíme $A_2=-1,\ A_1=A_2=-1,\ B=-A_1=1,\ C=1+2A_1-A_2=0$.

(4) Získali jsme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2-2x+2}.$$

Příklad 4.62. Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \dfrac{x^3-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$.

Řešení: Funkce je ryze racionální lomená funkce.

(1) Rozložíme jmenovatel $Q(x)$. Součet koeficientů polynomu v jmenovateli $1-4+1-2$ je nula, první kořen je proto $\alpha_1 = 1$. Dělení $Q(x):(x-\alpha_1)$ dává výraz x^3-x^2+x-1, který snadno rozložíme na $(x-1)(x^2+1)$. Výraz x^2+1 nerozkládáme, protože má záporný diskriminant. Získali jsme tak: $Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)$.

(2) Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru:

$$\frac{x^3-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

(3) Spočítáme koeficienty. Rovnost vynásobíme jmenovatelem:

$$x^3 - 4x^2 + x - 2 = A_1(x-1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)^2 \,.$$

Použití „triku“, tj. dosazením $x = 1$ do rovnosti získáme $-4 = 2A_2$, odkud plyne $A_2 = -2$. Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin proměnné x na levé a pravé straně dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{lrcl}
x^3: & 1 & = & A_1 + B \\
x^2: & -4 & = & -A_1 + A_2 - 2B + C \\
x: & 1 & = & A_1 - B - 2C \\
1: & -2 & = & -A_1 + A_2 + C \,,
\end{array}$$

ze které postupně určíme zbývající koeficienty $A_1 = \frac{1}{2}$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Poznamenejme, že když už jsme měli spočítanou hodnotu A_2, v soustavě lineárních rovnic jsme poslední rovnici psát nemuseli, byla závislá na předchozích.

(4) Získáváme tak rozklad na parciální zlomky

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} \,.$$