Místo předmluvy

Metoda konečných prvků byla ve své nejjednodušší podobě stručně načrtnuta Courantem [Cr] v roce 1943. Jeho práce nenašla odezvu ani mezi matematiky, ani mezi inženýry, protože v tehdejší době neexistovaly výpočtové prostředky k realizaci této metody. V roce 1956 byla poprvé uveřejněna tato metoda Turnerem, Cloughem, Martinem a Toppem [TCMT].

Původně byla metoda konečných prvků koncipována v termínech stavebně mechanických a aplikována inženýry zejména na statické problémy leteckého a raketového průmyslu. Stavebně mechanická koncepce je sice v jednoduchých případech fyzikálně názorná, je však omezená ve svém dosahu. Podstatně širší dosah má koncepce, která metodu konečných prvků formuluje jako variační metodu.

Prvním inženýrem na kontinentu, který začal metodu konečných prvků užívat byl Prof. Ing. Jiří Kratochvíl, DrSc. (tehdy odborný asistent FAST VUT), který se v roce 1965 o této metodě dozvěděl z amerických inženýrských časopisů a během dvou let vytvořil efektivní program pro statické výpočty přehrad. Své první výsledky [KL] publikoval v roce 1968. Koncem roku 1967 seznámil s koncepcí metody konečných prvků Prof. RNDr. Miloše Zlámala, DrSc., ředitele tehdejší Laboratoře počítacích strojů VUT. Ten v krátké době tří měsíců napsal článek [Zl], první matematickou práci o této metodě. Měl jsem to štěstí, že jsem jej četl v rukopise a mohl dlouhé hodiny s prof. Zlámalem diskutovat o všem, co se metody konečných prvků týkalo. V době jednoho roku jsme získali řadu závažných výsledků a brzy se LPS VUT stala významným vědeckým centrem, jak matematickým, tak inženýrským, protože velké zkušenosti prof. Kratochvíla byly znásobeny programátorskou zručností Ing. Holuši a všechny teoretické výsledky byly vždy v krátké době ověřovány na počítači.

Toto skriptum obsahuje kromě výkladu nejnutnějšího matematického aparátu matematické výsledky získané v období 1968 – 72, které se již staly klasickými a tvoří dobrý teoretický základ metody konečných prvků. Kapitoly 17 a 19 obsahují navíc výsledky podstatně mladší. Při práci na skriptu jsem použil tuto literaturu:

[AFS] Argyris J.H., Fried I., Scharpf D.W.: The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. Aeronaut. J. R. Aeronaut. Soc. 72 (1968), 514 – 517.

[Be] Bell K.: A refined triangular plate bending element. Int. J. Numer. Meth. Engng. 1 (1969), 101 – 122.

[Bo] Bosshard W.: Ein neues, vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung. Abh. Int. Verein. Brückenbau Hochbau 28/I (1968), 27 – 40.

[BZ] Bramble J.H., Zlámal M.: Triangular elements in the finite element method. Math. Comp. 24 (1970), 809 – 820.

[Cr] Courant R.: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 1 – 23.

[Ho] Holand I.: Higher order finite element for plane stress. Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 94 (1968), 698 – 702.

[Fi] Fichtengolc G.M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija, tom I, Gostechizdat, Moskva 1951.

[KJF] Kufner A., John O., Fučík S.: Function Spaces. Academia, Praha 1977.

[KKLŽ] Kolář V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. SNTL, Praha 1979.

[KL] Kratochvíl J., Leitner F.: Metoda konečných prvků a její aplikace v rovinné pružnosti. Stavebnícky časopis 16 (1968), 63 – 82; 201 – 218.

[Ne] Nečas J.: Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques. Academia, Praha 1967.

[OR] Oganesjan L.A., Ruchovec L.A.: Variacionno-raznostnyje metody dlja rešenija elliptičeskich problem. Izd. Akad. Nauk ArSSR, Jerevan 1979.

[Re] Rektorys K.: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL, Praha 1974.

[St] Stroud A.H.: Approximate Calculation of Multiple Integrals. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1971.

[TCMT] Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J.: Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aero Sci. 23 (1956), 805 – 823.

[Vi] Visser M.: The finite element method in deformation and heat conduction. Delft 1968.

[Zl] Zlámal M.: On the finite element method. Numer. Math. 12 (1968), 394 – 409.
[Že1] Ženíšek A.: Interpolation polynomials on the triangle. Numer. Math. 15 (1970), 283 – 296.
[Že2] Ženíšek A.: Nonlinear elliptic and evolution problems and their finite element approximations. Academic Press, London 1990.
[Že3] Ženíšek A.:

Brno, listopad 1999 Alexander Ženíšek

Obsah

$\mathcal{P}$. Úvod

$\mathcal{P}$.A. Některé poznatky z analýzy a funkcionální analýzy

$\mathcal{P}$.1. Definice. Říkáme, že ohraničená oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$, jestliže v téměř všech bodech $\partial\Omega$ existuje *vnější* normála k Ω a jestliže se $\partial\Omega$ skládá z konečného počtu hladkých částí.

Poznámka. V případě hranice $\partial\Omega$ z definice $\mathcal{P}$.1 jsou vyloučeny řezy (viz Obr. $\mathcal{P}$.1 pro $\dim\Omega = 2$); nejsou však vyloučeny body vratu (viz Obr. $\mathcal{P}$.2 opět pro $\dim\Omega = 2$). Oblast Ω může také být vícenásobně souvislá.

Obr. $\mathcal{P}$.1 a Obr. $\mathcal{P}$.2a a $\mathcal{P}$.2b

$\mathcal{P}$.2. Věta (Green). *Nechť ohraničená dvojrozměrná oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Nechť P, Q jsou funkce spojité v $\overline{\Omega}$, které mají spojité a ohraničené první derivace v Ω. Nechť hranice $\partial\Omega$ je orientována tak, že při jejím probíhání ve směru orientace máme oblast Ω po levé ruce. Potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \tag{$\mathcal{P}$.1}$$

kde integrály jsou brány v Riemannově smyslu.

$\mathcal{P}$.3. Věta (divergenční tvar Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty $\mathcal{P}$.2. Položíme-li $P = -P_2$, $Q = P_1$, potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (P_1 n_1 + P_2 n_2)\,\mathrm{d}s, \tag{$\mathcal{P}$.2}$$

kde (n_1, n_2) je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

Náčrt důkazu. Platí (zhruba řečeno v první rovnosti)

$$\int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (P_1 \sin\alpha - P_2\cos\alpha)\,\mathrm{d}s, \tag{$\mathcal{P}$.3}$$

kde α je úhel, který svírá tečna k $\partial\Omega$ (orientovaná shodně s $\partial\Omega$) s kladným směrem osy x. Nechť ω je úhel, který svírá vnější normála k $\partial\Omega$ s kladným směrem osy x. Potom v bodě $[x, y]$ platí (viz Obr. $\mathcal{P}$.3)

$$\alpha = \omega + \frac{\pi}{2},$$

takže

$$\cos\alpha = -\sin\omega, \quad \sin\alpha = \cos\omega\,. \tag{$\mathcal{P}$.4}$$

Dosazením ($\mathcal{P}$.4) do ($\mathcal{P}$.3) a kombinací získaného vztahu s ($\mathcal{P}$.1), kde v levé straně užijeme značení $P = -P_2$, $Q = P_1$, dostaneme vztah ($\mathcal{P}$.2). $\square$

Obr. $\mathcal{P}$.3

$\mathcal{P}$.4. Označení. V dalším budeme též značit

$$x_1 := x, \quad x_2 := y \quad (\text{resp. } x_3 = z).$$

Místo $\iint_\Omega$ budeme psát $\int_\Omega$ a místo $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jenom $\mathrm{d}x\,(\equiv \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)$. Vztah ($\mathcal{P}$.2) má potom tvar

$$\sum_{k=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial P_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{2}\int_{\partial\Omega} P_k n_k\,\mathrm{d}s\,. \tag{$\mathcal{P}$.5}$$

$\mathcal{P}$.5. Věta (důsledek Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty $\mathcal{P}$.2. Potom platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\varphi n_j\,\mathrm{d}s - \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,. \tag{$\mathcal{P}$.6}$$

Důkaz. Položme v ($\mathcal{P}$.5) $P_j = u\varphi$ a $P_i = 0$, kde $i \neq j$, a užijme pravidlo pro derivování součinu. $\square$

$\mathcal{P}$.6. Poznámka. Vztah ($\mathcal{P}$.6) se dá také dokázat v případě trojrozměrné oblasti Ω. V tomto případě pak symbol $\int_{\partial\Omega} u\varphi n_j\,\mathrm{d}s$ znamená plošný integrál přes plošnou hranici $\partial\Omega$.

$\mathcal{P}$.7. Definice (reálného lineárního prostoru). Množina S prvků $x, y, z, \dots$ se nazývá *reálným lineárním prostorem* – stručně *RLP*, jsou-li splněny následující podmínky:

I. K libovolným dvěma prvkům $x, y \in S$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek $x + y \in S$, který se nazývá jejich součtem, přičemž

1) $x + y = y + x$ (*komutativní zákon*),

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*asociativní zákon*),

3) existuje takový prvek $\theta \in S$, že $x + \theta = x$ pro všechny prvky $x \in S$ (*existence nulového prvku*);

4) ke každému $x \in S$ existuje takový prvek $-x \in S$, že $x + (-x) = \theta$ (*existence opačného prvku*).

II. Ke každému reálnému číslu $\alpha \in R^1$ a každému prvku $x \in S$ je definován prvek $\alpha x \in S$ (tzv. *násobek prvku* $x \in S$ *reálným číslem* $\alpha \in R^1$), přičemž
1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad (\alpha, \beta \in R^1)$,
2) $1 \cdot x = x$.

III. Obě operace (tj. sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem) jsou spojeny těmito dvěma distribučními zákony:
1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

RLP budeme stručně nazývat *lineál*.

$\mathcal{P}$.8. Definice (normy). Nechť M je lineál. Je-li každému prvku $u \in M$ přiřazeno číslo $\|u\|$ s vlastnostmi

$$\|u\| \geq 0, \text{ přičemž } \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta \text{ v } M, \tag{$\mathcal{P}$.7}$$

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| \quad \text{pro každé reálné } \alpha, \tag{$\mathcal{P}$.8}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in M, \tag{$\mathcal{P}$.9}$$

potom $\|u\|$ nazýváme *normou* prvku $u \in M$. Lineál M, na němž je definována norma, nazýváme *lineární normovaný prostor* – stručně LNP.

$\mathcal{P}$.9. Definice (B–prostoru). Úplný lineární normovaný prostor nazýváme Banachovým prostorem.

$\mathcal{P}$.10. Definice (skalárního součinu). Říkáme,že na lineálu M je definován skalární součin, je-li ke každé dvojici $u, v \in M$ přiřazeno reálné číslo (u, v) s těmito vlastnostmi:

$$(u, v) = (v, u)\,, \tag{$\mathcal{P}$.10}$$

$$(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) = c_1(u_1, v) + c_2(u_2, v), \quad c_1, c_2 \in R^1, \tag{$\mathcal{P}$.11}$$

$$(u, u) \geq 0\,, \tag{$\mathcal{P}$.12}$$

$$(u, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \theta \text{ v } M\,. \tag{$\mathcal{P}$.13}$$

Lineál M, na němž je definován skalární součin, se nazývá *unitární prostor*.

$\mathcal{P}$.11. Definice (H–prostoru). Úplný unitární prostor se nazývá *Hilbertovým prostorem*.

$\mathcal{P}$.12. Poznámka. Příkladem Banachova prostoru je prostor $L_2(\Omega)$; obecněji každý Hilbertův prostor s normou $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

$\mathcal{P}$.13. Definice ($C^\infty(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} u$, $C_0^\infty(\Omega)$). Nechť Ω je ohraničená oblast s po částech hladkou hranicí. Nechť $N = \dim \Omega$ a nechť $C^\infty(R^N)$ je lineál funkcí $u(x)$, kde $x = [x_1, \ldots, x_N]$, které jsou spojité včetně derivací všech řádů v celém prostoru R^N. Symbolem $C^\infty(\overline{\Omega})$ budeme značit lineál, který dostaneme restrikcí funkcí z $C^\infty(R^N)$ na uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$. Uzávěr množiny těch bodů oblasti Ω, v nichž je $u(x) \neq 0$, nazýváme *nosičem* funkce $u(x)$ a značíme $\operatorname{supp} u$. Označme dále symbolem $C_0^\infty(\Omega)$ lineál všech funkcí s kompaktním nosičem v oblasti Ω, tj. množinu těch funkcí z $C^\infty(\overline{\Omega})$, pro něž platí $u(x) \equiv 0$ v určitém okolí hranice $\partial\Omega$ (v obecném případě různém pro různé funkce z $C_0^\infty(\Omega)$). Pro každé $u \in C_0^\infty(\Omega)$ je $\operatorname{supp} u$ uzavřená množina a $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, takže $\operatorname{supp} u$ má od hranice $\partial\Omega$ určitou kladnou vzdálenost.

$\mathcal{P}$**.14. Příklad (funkce z $C_0^\infty(\Omega)$).** Je-li $N = 2$ a je-li Ω čtverec definovaný nerovnostmi $-2 < x_1 < 2$, $-2 < x_2 < 2$, je příkladem funkce s kompaktním nosičem v Ω funkce

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x_1^2-x_2^2)} & \text{pro } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ 0 & \text{jinde v } \overline{\Omega}. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}.14)$$

Přímým výpočtem se snadno dokáže, že funkce ($\mathcal{P}$.14) má v Ω derivace všech řádů, takže je předně $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. (Pro názornost je na Obr. $\mathcal{P}$.4 nakreslen řez plochy ($\mathcal{P}$.14) rovinou $x_2 = 0$.) Dále $\operatorname{supp} u$ je uzavřený kruh se středem v počátku souřadnic a poloměrem rovným jedné; jeho vzdálenost od hranice $\partial\Omega$ čtverce $\overline{\Omega}$ je zřejmě kladná (rovná jedné; viz Obr. $\mathcal{P}$.5).

Obr. $\mathcal{P}$.4 a Obr. $\mathcal{P}$.5

$\mathcal{P}$**.15. Věta (Schwarzova nerovnost).** *Nechť M je unitární prostor. Potom pro libovolné prvky $u, v \in M$ platí*

$$|(u, v)| \le \|u\| \cdot \|v\| .$$

$\mathcal{P}$**.16. Definice (husté množiny v LNP).** Nechť S je lineární normovaný prostor. Říkáme, že množina $M \subset S$ je hustá v S, jestliže pro každý prvek $u \in S$ lze najít posloupnost $\{u_n\} \subset M$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$.

$\mathcal{P}$**.17. Věta.** *Nechť ohraničená oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Potom lineál $C_0^\infty(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$, tj., podle definice $\mathcal{P}$.16, pro každý prvek $u \in L_2(\Omega)$ lze najít posloupnost $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ takovou, že*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0 .$$

Místo důkazu je na Obr. $\mathcal{P}$.6 uveden příklad v jedné dimensi ($\Omega = (a, b)$, kde plnou čarou je nakreslena po částech konstantní funkce u a čárkovaně jedna z funkcí u_n).

$\mathcal{P}$**.18. Věta.** *Nechť $u_n \to u$ v $L_2(\Omega)$ a $v \in L_2(\Omega)$. Potom $(u_n, v) \to (u, v)$.*

Důkaz. Z ($\mathcal{P}$.11) a ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$|(u_n, v) - (u, v)| = |(u_n - u, v)| \le \|u_n - u\| \cdot \|v\|.$$

Protože podle předpokladu věty $\|u_n - u\| \to 0$, jde pravá strana získané nerovnosti k nule. $\square$

Obr. $\mathcal{P}$.6

$\mathcal{P}$**.19. Věta.** *Nechť množina M je hustá v $L_2(\Omega)$ a nechť $(u, v) = 0\ \forall v \in M$, kde $u \in L_2(\Omega)$ je pevný prvek. Potom $u = 0$ v $L_2(\Omega)$.*

Důkaz. Podle definice husté množiny (viz definici $\mathcal{P}$.16) lze najít posloupnost $\{u_n\} \subset M$ takovou, že $\lim u_n = u$ v $L_2(\Omega)$. Podle předpokladu vět je $(u_n, u) = 0$. Odtud a z věty $\mathcal{P}$.18 plyne, že $\lim(u_n, u) = (u, u) = 0$. Tento výsledek a vztah ($\mathcal{P}$.13) implikují, že $u = 0$ v $L_2(\Omega)$. $\square$

$\mathcal{P}$.B. Přechod od okrajového problému eliptické PDR k variační formulaci

Uvažujme tento okrajový problém Poissonovy rovnice:

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega\,, \tag{$\mathcal{P}$.15}$$

$$u = \mathring{u} \quad \text{na } \Gamma_1\,, \tag{$\mathcal{P}$.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{na } \Gamma_2\,, \tag{$\mathcal{P}$.17}$$

kde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega \quad (\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset)$$

a $f\,, \mathring{u}\,, q$ jsou dané funkce. Přitom

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \tag{$\mathcal{P}$.18}$$

je derivace funkce u podle jednotkové vnější normály $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2)$.

Násobme ($\mathcal{P}$.15) libovolnou hladkou funkcí v, pro kterou platí

$$v = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{$\mathcal{P}$.19}$$

a integrujme přes Ω:

$$-\int_\Omega v \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x\,. \tag{$\mathcal{P}$.20}$$

Upravme integrál na levé straně ($\mathcal{P}$.20) pomocí Greenovy věty $\mathcal{P}$.3:

$$-\int_\Omega v\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_\Omega \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{\partial\Omega} v\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}n_2\Big)\,\mathrm{d}s + \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Podle ($\mathcal{P}$.18), ($\mathcal{P}$.19) a ($\mathcal{P}$.17) platí

$$\int_{\partial\Omega} v\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}n_2\Big)\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_2} vq\,\mathrm{d}s\,.$$

Tedy vztah ($\mathcal{P}$.20) může být psán ve tvaru

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega vf\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} vq\,\mathrm{d}s\,. \qquad (\mathcal{P}.21)$$

Dospíváme tak k problému: Najít funkci u, která splňuje ($\mathcal{P}$.16) a vyhovuje integrálnímu vztahu ($\mathcal{P}$.21) pro každou "dostatečně hladkou" funkci v splňující ($\mathcal{P}$.19).

Tato formulace problému má velké slabiny: Nevíme, jak má být funkce u hladká; podobně to nevíme o funkci v. Jedno je jisté: Vztah ($\mathcal{P}$.21) klade menší požadavky na hladkost funkce u než okrajový problém ($\mathcal{P}$.15) – ($\mathcal{P}$.17), protože v ($\mathcal{P}$.21) vystupují nejvýše první derivace funkce u, a to ještě v integrandu.

Vysvětleme ještě jinak naše nesnáze: Později dokážeme, že řešení u problému ($\mathcal{P}$.21) minimalizuje na jisté množině funkcí kvadratický funkcionál

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{\Big(\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big)^2\Big\}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega wf\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} wq\,\mathrm{d}s\,.$$

Problém je, jaká to má být množina. Zřejmě to bude podmnožina nějakého úplného prostoru (jinak totiž nemáme zaručeno, že minimalizující prvek existuje – je to analogie minima kvadratické funkce na množině reálných čísel, tj. na úplném prostoru). Tento úplný prostor nyní zkonstruujeme.

1. Prostor $W_2^k(\Omega)$

1.1. Definice (multiindexové značení derivací). Nechť $N = \dim\Omega$. Multiindexem rozumíme N-rozměrný vektor, jehož složky jsou nezáporná celá čísla,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad \alpha_1 \ge 0, \dots, \alpha_N \ge 0\,. \qquad (1.1)$$

Celé číslo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$$

nazýváme délkou multiindexu. Symbol $D^\alpha u$ definovaný vztahem

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \qquad (1.2)$$

pak nazýváme derivací v multiindexovém značení.

Příklad. Pro $N = 2,\ \alpha = (3, 0)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \quad \Big(\text{a ne zbytečně komplikovaně } \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^0}\Big);$$

pro $N = 2,\ \alpha = (2, 1)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2}\,.$$

1.2. Definice. Nechť k je celé nezáporné číslo. Každé dvojici $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ přiřazujeme číslo $(u, v)_{k,\Omega}$ dané vztahem

$$(u, v)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}x\,, \tag{1.3}$$

kde sumace přes $|\alpha| \le k$ znamená, že je třeba vyčerpat všechny navzájem různé vektory tvaru (1.1), pro něž platí $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \le k$.

Příklad. V případě $N = 2,\ k = 2$ je třeba vyčerpat všechny dvojrozměrné multiindexy

$$\begin{gathered}(0,0),\\ (1,0), (0,1),\\ (2,0), (1,1), (0,2),\end{gathered}$$

takže z (1.2) a (1.3) dostaneme

$$\begin{aligned}(u, v)_{2,\Omega} = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x \,+ \\ + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

1.3. Lemma. *Vztah* (1.3) *definuje na lineálu* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *skalární součin.*

Důkaz. První dvě vlastnosti ($\mathcal{P}$.10) a ($\mathcal{P}$.11) skalárního součinu plynou z vlastností integrálů a derivací:

$$\int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha u \,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_\Omega D^\alpha (a u_1 + b u_2) D^\alpha v \,\mathrm{d}x = a \int_\Omega D^\alpha u_1 D^\alpha v \,\mathrm{d}x + b \int_\Omega D^\alpha u_2 D^\alpha v \,\mathrm{d}x\,.$$

Co se týče třetí vlastnosti ($\mathcal{P}$.12), je podle (1.3)

$$(u, u)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \,\mathrm{d}x\,. \tag{1.4}$$

Zároveň je vidět, že vztah $(u, u)_{k,\Omega} = 0$ platí právě tehdy, když každý ze sčítanců v (1.4) je roven nule; odtud zejména plyne

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

čili $u(x) \equiv 0$ v Ω (protože $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$), takže i čtvrtá vlastnost ($\mathcal{P}$.13) je splněna. $\square$

1.4. Definice. Zavedeme-li v lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$ skalární součin $(u,v)_{k,\Omega}$ daný vztahem (1.3), dostaneme unitární prostor, který označíme $S_2^k(\Omega)$. Normu v $S_2^k(\Omega)$ zavedeme obvyklým způsobem

$$\|u\|_{k,\Omega} := \sqrt{(u,u)_{k,\Omega}} \quad \forall u \in S_2^k(\Omega) \tag{1.5}$$

a vzdálenost (metriku) vztahem

$$\varrho(u,v) := \|u-v\|_{k,\Omega} \quad \forall u,v \in S_2^k(\Omega)\,. \tag{1.6}$$

Poznámka. Unitární prostor $S_2^k(\Omega)$ je také lineárním normovaným prostorem a metrickým prostorem.

Poznámka. Pro $k=0$ dostáváme skalární součin, normu a metriku prostoru $L_2(\Omega)$, tj.

$$(u,v)_{0,\Omega} = (u,v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall u,v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{atd.} \tag{1.7}$$

1.5. Věta. a) *Posloupnost $\{u_n\}$ konverguje v prostoru $S_2^k(\Omega)$ k prvku u právě tehdy, konverguje-li posloupnost $\{u_n\}$ a posloupnosti derivací $\{D^\alpha u_n\}$, kde $|\alpha| \le k$, k funkci u a k jejím derivacím $D^\alpha u$ v prostoru $L_2(\Omega)$.*

b) *Posloupnost $\{u_n\}$ je v prostoru $S_2^k(\Omega)$ cauchyovská právě tehdy, jsou-li všechny posloupnosti $\{D^\alpha u_n\}$, $|\alpha| \le k$, cauchyovské v prostoru $L_2(\Omega)$.*

Důkaz. a) Z (1.5) a (1.3) plyne, že pro $u \in S_2^k(\Omega)$ je

$$\|u\|_{k,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2\,. \tag{1.8}$$

Konvergence v prostoru $S_2^k(\Omega)$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{v } S_2^k(\Omega),$$

tedy znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,\Omega}^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0.$$

Odtud plyne první tvrzení věty.

b) Je-li posloupnost $\{u_n\}$ cauchyovská v $S_2^k(\Omega)$, potom podle (1.8) platí

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\|_{k,\Omega}^2 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0.$$

Odtud plyne druhé tvrzení věty. $\square$

Dá se ukázat příkladem, že prostor $S_2^k(\Omega)$ není úplný. S pomocí věty 1.5b a faktu, že prostor $L_2(\Omega)$ je úplný (tj. každá cauchyovská posloupnost má v $L_2(\Omega)$

limitu), lze však prostor $S_2^k(\Omega)$ "zúplnit". Získaný úplný prostor označíme $W_2^k(\Omega)$ a ukážeme, že má vlastnosti požadované v sekci $\mathcal{P}$.B.

Uvažujme libovolnou posloupnost $\{u_n\}$ cauchyovskou v $S_2^k(\Omega)$. Jsou možné tyto dva případy:

a) Posloupnost $\{u_n\}$ je v prostoru $S_2^k(\Omega)$ konvergentní,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{v } S_2^k(\Omega),$$

tj. existuje $u \in S_2^k(\Omega)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,\Omega} = 0\,.$$

Podle věty 1.5a konverguje v $L_2(\Omega)$ posloupnost $\{u_n\}$ a posloupnosti $\{D^\alpha u_n\}$ příslušných derivací k funkci u a k jejím derivacím $D^\alpha u$.

b) Posloupnost $\{u_n\}$ není v prostoru $S_2^k(\Omega)$ konvergentní. Podle věty 1.5b je však každá z posloupností $\{D^\alpha u_n\}$ ($|\alpha| \le k$) cauchyovská v $L_2(\Omega)$, a protože $L_2(\Omega)$ je úplný prostor, má v něm každá z těchto posloupností určitou limitu, kterou označíme $u^{(\alpha)}$,

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n = u^{(\alpha)} \quad \text{v } L_2(\Omega), \quad |\alpha| \le k\,. \tag{1.9}$$

Pro $|\alpha| = 0$ označíme příslušnou limitu symbolem u:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{v } L_2(\Omega)\,. \tag{1.10}$$

O funkcích $u^{(\alpha)}$, $1 \le |\alpha| \le k$, nemůžeme tvrdit že jsou derivacemi limitní funkce u, protože o funkci u zatím víme jen to, že patří do $L_2(\Omega)$. O funkcích $u^{(\alpha)}$ však ukážeme, že mají všechny vlastnosti derivací $D^\alpha u$ funkce $u \in S_2^k(\Omega)$, které se projeví, když tyto derivace vystupují v integrálních vztazích.

1.6. Lemma. *Nechť $u \in S_2^k(\Omega)$. Potom pro $1 \le |\alpha| \le k$ platí*

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1.11}$$

Důkaz. Podle věty $\mathcal{P}$.5 (důsledek Greenovy věty) pro každé j, kde $1 \le j \le N$, platí (zde $N = 2$)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\varphi n_j \,\mathrm{d}s - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x\,,$$

protože $\varphi = 0$ na $\partial\Omega$. Tím je vztah (1.11) dokázán v případě $|\alpha| = 1$.

Protože $D^\alpha \varphi = 0$ na $\partial\Omega$ pro $|\alpha| \ge 0$, dostaneme vztah (1.11) v obecném případě opakováním užitého postupu. Např., pro $\alpha = (1,1)$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi n_2 \,\mathrm{d}s - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_1 \,\mathrm{d}s + \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \,\mathrm{d}x\,,$$

což je vztah (1.11) pro $\alpha = (1,1)$. Jak se postupuje v obecném případě, je již zřejmé. $\square$

1.7. Věta. *Limitní funkce $u \in L_2(\Omega)$, $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$, které vystupují ve vztazích* (1.9) a (1.10) *splňují vztahy*

$$\int_\Omega \varphi u^{(\alpha)} \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \le |\alpha| \le k. \tag{1.12}$$

Důkaz. Protože $u_n \in S_2^k(\Omega)$ pro každé $n = 1, 2, \dots$, platí podle lemmatu 1.6 pro $1 \le |\alpha| \le k$

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_n \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Přejděme v tomto vztahu k limitě

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi D^\alpha u_n \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x. \tag{1.13}$$

Podle (1.9), (1.10) a věty $\mathcal{P}$.18 implikuje (1.13) vztah (1.12). $\square$

1.8. Věta. *Funkce $u^{(\alpha)}$ jsou jednoznačně určeny funkcí u (ve smyslu prostoru $L_2(\Omega)$).*

Důkaz. Předpokládejme, že dvě posloupnosti $\{u_n\}$, $\{\widetilde{u}_n\}$ cauchyovské v $S_2^k(\Omega)$ mají tutéž limitu v $L_2(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{u}_n = u \quad \text{v } L_2(\Omega). \tag{1.14}$$

Označme

$$\widetilde{u}^{(\alpha)} := \lim_{n\to\infty} D^\alpha \widetilde{u}_n \quad \text{v } L_2(\Omega), \quad 1 \le |\alpha| \le k \tag{1.15}$$

a zjistěme, jaký je vztah mezi $\widetilde{u}^{(\alpha)}$ a $u^{(\alpha)}$ (viz (1.9)).

Stejným postupem jako jsme získali (1.12) dostaneme ze vztahů (1.14) a (1.15)

$$\int_\Omega \varphi \widetilde{u}^{(\alpha)} \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \le |\alpha| \le k. \tag{1.16}$$

Odečtěme (1.16) od (1.12) (pro libovolný multiindex α, $1 \le |\alpha| \le k$). Dostaneme

$$\int_\Omega (u^{(\alpha)} - \widetilde{u}^{(\alpha)}) \varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.17}$$

Protože lineál $C_0^\infty(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$ (viz větu $\mathcal{P}$.17), plyne z (1.17) podle věty $\mathcal{P}$.19

$$\widetilde{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)} \quad \text{v } L_2(\Omega)$$

pro každý multiindex α $(1 \le |\alpha| \le k)$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

1.9. Definice. Funkce $u^{(\alpha)}$ nazveme *zobecněnými derivacemi funkce* u a budeme je značit (stejně jako klasické derivace) symbolem $D^\alpha u$ (viz (1.2)).

Nahradíme-li $u^{(\alpha)}$ v (1.12) symbolem $D^\alpha u$, dostaneme vztah, který je formálně totožný se vztahem (1.11). (Vztah (1.12) ovšem platí pro širší množinu funkcí.) To je hlavní důvod zavedení definice 1.9. Že tato definice má dobrý smysl, plyne z věty 1.8, kterou nyní můžeme vyslovit takto: *Zobecněné derivace funkce u jsou touto funkcí jednoznačně určeny.*

Přidáme-li k prvkům prostoru $S_2^k(\Omega)$ (tj. k prvkům lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$) všechny limitní prvky, dostaneme množinu, kterou označíme U_k a o které lze snadno dokázat, že je to lineál.

Dále lze bez obtíží dokázat, že vztahem

$$(u,v)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}x \qquad u \in U_k,\ v \in U_k \tag{1.18}$$

je na lineálu U_k definován skalární součin, který je rozšířením skalárního součinu z definice 1.2 na prvky z lineálu U_k, a že příslušný unitární prostor je *úplný*, tj. že je Hilbertovým prostorem.

1.10. Definice. Hilbertův prostor, jehož prvky jsou prvky lineálu U_k a v němž je skalární součin definován vztahem (1.18), budeme nazývat *Sobolevovým prostorem* $W_2^k(\Omega)$. Norma je v tomto prostoru definována standardně vztahem

$$\|u\|_{k,\Omega} := \sqrt{(u,u)_{k,\Omega}} \quad \forall u \in W_2^k(\Omega)\,. \tag{1.19}$$

1.11. Věta. *Lineál $C^\infty(\overline{\Omega})$ je v prostoru $W_2^k(\Omega)$ hustý.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z konstrukce prostoru $W_2^k(\Omega)$. $\square$

Lze ukázat, že *prostor $W_2^k(\Omega)$ je separabilní.* Příkladem spočetné množiny husté v $W_2^k(\Omega)$ je množina všech polynomů v N proměnných s racionálními koeficienty.

Často potřebujeme vědět, zdali daná funkce náleží do $W_2^k(\Omega)$. K odpovězení takové otázky dobře poslouží následující kritérium:

1.12. Věta. *Nechť Ω je ohraničená N-rozměrná oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$, která nemá body vratu. Nechť funkce $u \in L_2(\Omega)$ má zobecněné derivace $D^\alpha u$ pro všechna $|\alpha| \le k$, které náležejí do $L_2(\Omega)$. Potom $u \in W_2^k(\Omega)$.*

Důkaz spočívá v konstrukci posloupnosti funkcí $\{u_n\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,\Omega} = 0\,.$$

Tato konstrukce je velmi komplikovaná a přesahuje rámec tohoto kursu. Proto ji nebudeme provádět a odkazujeme na [KJF, důkaz věty 5.5.9].

S pomocí věty 1.12 nyní dokážeme několik důležitých výsledků.

1.13. Definice. Říkáme, že funkce $f(x_1, \dots, x_N)$ je po částech spojitá v ohraničené oblasti Ω, jestliže existuje konečný počet oblastí $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ s vlastnostmi

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\Omega}_j\,, \quad \Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset \quad (r \neq s;\ r, s = 1, \dots, m), \tag{1.20}$$

ve kterých je funkce $f(x_1, \dots, x_N)$ spojitá.

1.14. Lemma. *Nechť Ω je ohraničená N-rozměrná oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$, která nemá body vratu. Nechť funkce $w \in C^0(\overline{\Omega})$ má po částech spojité a ohraničené první derivace v Ω. Nechť podoblasti $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, ve kterých jsou derivace $\partial w/\partial x_r$ $(r = 1, \dots, N)$ spojité, mají po částech hladké hranice $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_m$, které nemají body vratu. Potom $w \in W_2^1(\Omega)$, přičemž zobecněné první derivace $\partial w/\partial x_r$, které náležejí do $L_2(\Omega)$, jsou v každé podoblasti Ω_j $(j = 1, \dots, m)$ rovny klasickým derivacím $\partial w/\partial x_r$ $(r = 1, \dots, N)$.*

Důkaz. Nechť $\overrightarrow{n}(\Omega_j)$ je jednotková vnější normála podoblasti Ω_j $(j = 1, \dots, m)$ a $n(\Omega_j)_1, \dots, n(\Omega_j)_N$ její složky. Protože

$$\overrightarrow{n}(\Omega_p) = -\overrightarrow{n}(\Omega_q) \tag{1.21}$$

na společné části hranic uzavřených oblastí $\overline{\Omega}_p$, $\overline{\Omega}_q$ (viz Obr. 1.1), dostaneme pomocí věty $\mathcal{P}$.5 (tj. důsledku Greenovy věty) pro funkci

$$g_r(x) = \frac{\partial w}{\partial x_r}(x), \quad x \in \Omega_j \quad (j = 1, \dots, m),$$

kde $\partial w/\partial x_r$ je klasická derivace, postupně tyto vztahy:

$$\int_\Omega g_r \varphi \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} \frac{\partial w}{\partial x_r} \varphi \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{\partial\Omega_j} w\varphi n(\Omega_j)_r \,\mathrm{d}s - \int_{\Omega_j} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \,\mathrm{d}x \right) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} w\varphi n_r \,\mathrm{d}s - \int_\Omega w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

kde n_r označuje r-tou složku jednotkové vnější normály k $\partial\Omega$. (Třetí rovnost plyne z toho, že ve vnitřku Ω se podle (1.21) křivkové integrály na společných částech hranic $\partial\Omega_p$, $\partial\Omega_q$ ruší - viz Obr. 1.1.) Tedy $g_1, \dots, g_N$ jsou první zobecněné derivace funkce w.

Protože počet m podoblastí $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ je konečný, plyne z ohraničenosti a spojitosti derivací $\partial w/\partial x_r$ v Ω_j $(j = 1, \dots, m)$

$$\int_\Omega g_r^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial w}{\partial x_r} \right)^2 \mathrm{d}x < \infty \quad (r = 1, \dots, N).$$

Tedy $g_r \in L_2(\Omega)$. $\square$

Obr. 1.1 a Obr. 1.2

V Důsledku 1.16 uvedeme funkce, které vyhovují podmínkám Lemmatu 1.14 a které se užívají v metodě konečných prvků. Tím se ukáže význam věty 1.12 a lemmatu 1.14 pro náš kurs. Nejprve však musíme zavést v definici 1.15 pojem triangulace oblasti.

1.15. Definice. Nechť ohraničená oblast $\Omega \subset R^2$ má polygonální hranici. Množina

$$\mathcal{T} = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \dots, \overline{T}_p\}$$

sestávající z konečného počtu uzavřených trojúhelníků $\overline{T}_j$ se nazývá triangulací oblasti $\overline{\Omega}$, jestliže splňuje tyto dvě podmínky:

a) platí

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{p} \overline{T}_j \ :$$

b) libovolné dva trojúhelníky $\overline{T}_i, \overline{T}_j \in \mathcal{T}$ jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu (viz Obr. 1.2).

1.16. Důsledek. *Nechť $\mathcal{T}$ je triangulace ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť funkce $w \in C^0(\overline{\Omega})$ je polynomem na každém trojúhelníku triangulace $\mathcal{T}$. Potom $w \in W_2^1(\Omega)$. Kromě toho, ve vnitřku T_j každého trojúhelníka $\overline{T}_j \in \mathcal{T}$ je zobecněná derivace $\partial w/\partial x_i$ rovna klasické derivaci $\partial w/\partial x_i$ $(i = 1, 2)$.*

1.17. Poznámka. Konstrukce polynomů generujících funkce z $C^0(\overline{\Omega})$ budou uvedeny v kapitolách 8, 9 a 13.

Zobecněním Důsledku 1.16 je tato věta:

1.18. Věta. *Nechť $\mathcal{T}$ je triangulace ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť funkce $w \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$, kde $k \geq 1$, je polynomem na každém trojúhelníku triangulace $\mathcal{T}$. Potom $w \in W_2^k(\Omega)$. Kromě toho, ve vnitřku T_j každého trojúhelníka $\overline{T}_j \in \mathcal{T}$ jsou zobecněné derivace $D^\alpha w$, kde $|\alpha| = k$, rovny klasickým derivacím $D^\alpha w$ $(|\alpha| = k)$. Zobecněné derivace $D^\alpha w$, kde $|\alpha| \leq k-1$ jsou rovny klasickým derivacím na celé oblasti $\overline{\Omega}$.*

1.19. Poznámka. Konstrukce polynomů generujících funkce z $C^{k-1}(\overline{\Omega})$, kde $k \geq 2$, budou uvedeny v kapitole 18.

1.20. Poznámka. Lze snadno ukázat (plyne to téměř z definice): Je-li $u \in W_2^k(\Omega)$, potom

a) $u \in W_2^s(\Omega)$ pro každé s splňující podmínku $0 \leq s \leq k$;

b) zobecněné derivace $D^\alpha u$ ($|\alpha| < k$) patří do prostoru $W_2^{k-|\alpha|}(\Omega)$, přičemž platí tatáž pravidla pro derivování jako pro funkce z lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$:

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u\,,$$

kde $\alpha + \beta$ je součet multiindexů α a β (které se sčítají jako vektory), apod.

1.21. Poznámka. Lemma 1.14 ukazuje na rozdíl mezi klasickou derivací a zobecněnou derivací: zatímco klasická derivace je definována bodově, tj. v jednotlivých bodech, zobecněná derivace je definována na celé oblasti, přičemž na množině míry nula nemusí být vůbec definována.

2. Stopy funkcí z prostoru $W_2^k(\Omega)$. Prostor $W_0^{k,2}(\Omega)$. Friedrichsova nerovnost a Poincaréova nerovnost

2.1. Definice. Řekneme, že Ω je *oblast s lipschitzovskou hranicí*, je-li ohraničená (v obecném případě může být vícenásobně souvislá) a existují-li kladné konstanty α, β, konečný počet m kartézských soustav souřadnic $x_1^{(r)}, \dots, x_N^{(r)}$ ($r = 1, \dots, m$) a m funkcí $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$ *spojitých* v $(N-1)$-rozměrných otevřených krychlích $K^{(r)}$ (tj. intervalech v případě $N = 2$),

$$K^{(r)} = \{[x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}] : \ |x_j^{(r)}| < \alpha, \ j = 1, \dots, N-1\}\,, \tag{2.1}$$

tak, že

a) každý bod x hranice $\partial\Omega$ lze vyjádřit alespoň v jednom z uvažovaných m systémů souřadnic ve tvaru

$$x = [x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})]\,; \tag{2.2}$$

b) body $x = [x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}, x_N^{(r)}]$, pro něž platí

$$|x_j^{(r)}| < \alpha \quad (j = 1, \dots, N-1)$$

a

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) + \beta\,, \tag{2.3}$$

resp.

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) - \beta < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) \tag{2.4}$$

leží v Ω, resp. vně $\overline{\Omega}$;

c) každá z funkcí $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$ ($r = 1, \dots, m$) je na krychli $K^{(r)}$ lipschitzovská, tj. existuje konstanta L taková, že pro každé dva body $[x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}]$, $[y_1^{(r)}, \dots, y_{N-1}^{(r)}]$ z této krychle platí

$$\begin{aligned} &|a_r(y_1^{(r)}, \dots, y_{N-1}^{(r)}) - a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})| \leq \\ &\leq L\sqrt{(y_1^{(r)} - x_1^{(r)})^2 + \dots + (y_{n-1}^{(r)} - x_{N-1}^{(r)})^2}\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Obr. 2.1

Na Obr. 2.1 je nakreslena dvojrozměrná oblast s lipschitzovskou hranicí a jeden z kartézských systémů. Je zřejmé, že některé body hranice $\partial\Omega$ jsou vyjádřeny ve tvaru (2.2) ve dvou sousedních systémech souřadnic.

2.2. Poznámka. Ve dvojrozměrném případě každá ohraničená (obecně vícenásobně souvislá) oblast Ω, která má po částech hladkou hranici a nemá body vratu, je oblastí s lipschitzovskou hranicí. Samotný pojem zavedený v definici 2.1 však zahrnuje pro $N = 2$ oblasti s hranicemi obecnějších vlastností (které se však v aplikacích většinou nevyskytují).

Vzhledem k dostatečné obecnosti se v případě $N = 2$ omezíme na ohraničené oblasti, které mají po částech hladké hranice bez bodů vratu, a takové oblasti budeme pro stručnost nazývat oblastmi s lipschitzovskou hranicí.

2.3. Definice. a) Nechť $N = 2$ a nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$. Nechť $S_1, \ldots, S_m$ jsou hladké části $\partial\Omega$ a

$$x_1 = \varphi_j(t), \quad x_2 = \psi_j(t), \quad t \in <a_j, , b_j>$$

je parametrické vyjádření S_j. Je-li na S_j dána funkce $v(\varphi_j(t), \psi_j(t))$ měřitelná na $<a_j, , b_j>$, definujeme

$$\int_{S_j} v(x_1, x_2)\,\mathrm{d}s := \int_{a_j}^{b_j} v(\varphi_j(t), \psi_j(t)) \sqrt{[\dot{\varphi}_j(t)]^2 + [\dot{\psi}_j(t)]^2}\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.6}$$

kde integrál na pravé straně (2.6) bereme v Lebesgueově smyslu. (Pro spojité a ohraničené funkce $v(x_1, x_2)$ je tato definice shodná s běžnou definicí křivkového integrálu prvního druhu v Riemannově smyslu.)

b) Je-li mimoto integrál

$$\int_{S_j} [v(x_1, x_2)]^2\,\mathrm{d}s \equiv \int_{a_j}^{b_j} [v(\varphi_j(t), \psi_j(t))]^2 \sqrt{[\dot{\varphi}_j(t)]^2 + [\dot{\psi}_j(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

konečný, řekneme, že funkce $v(x_1, x_2)$ je na S_j integrovatelná s kvadrátem (v Lebesgueově smyslu). Je-li funkce $v(x_1, x_2)$ integrovatelná s kvadrátem na S_j pro všechna $j = 1, \dots, m$, řekneme, že je integrovatelná s kvadrátem na hranici $\partial\Omega$ a klademe

$$\int_{\partial\Omega} v^2 \, \mathrm{d}s := \sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} v^2 \, \mathrm{d}s \,. \tag{2.7}$$

c) Definujeme-li pro všechny funkce u, v integrovatelné s kvadrátem na hranici $\partial\Omega$ skalární součin

$$(u, v)_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} uv \, \mathrm{d}s \,, \tag{2.8}$$

dostaneme (jak lze bez obtíží dokázat) Hilbertův prostor, který označíme $L_2(\partial\Omega)$. Norma je v tomto prostoru definována standardně vztahem

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} := \sqrt{(u, u)_{\partial\Omega}} \quad \forall u \in L_2(\partial\Omega) \,. \tag{2.9}$$

2.4. Věta (o stopách). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom existuje právě jeden lineární ohraničený operátor*

$$\gamma : \; W_2^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega) \,, \tag{2.10}$$

který zobrazuje prostor $W_2^1(\Omega)$ do prostoru $L_2(\partial\Omega)$ tak, že platí

$$(\gamma v)(x) = v(x) \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \forall x \in \partial\Omega \,. \tag{2.11}$$

Důkaz věty 2.4 je uveden v [Ne, str. 15-16].

2.5. Poznámka. a) Linearita operátoru (2.10) znamená

$$\gamma(c_1 u + c_2 v) = c_1 \gamma u + c_2 \gamma v \,, \quad c_1, c_2 \in R^1, \quad u, v \in W_2^1(\Omega) \,. \tag{2.12}$$

Ohraničenost operátoru (2.10) znamená

$$\|\gamma v\|_{L_2(\partial\Omega)} \le C \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \,, \tag{2.13}$$

kde konstanta C je závislá pouze na oblasti Ω.

b) Funkce $\gamma u \in L_2(\partial\Omega)$ se obvykle nazývá *stopa* funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$. Pokud nemůže dojít k nedorozumění, místo γu píšeme stručně u.

c) Z vlastnosti (2.11) plyne, že stopa funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ je rozšířením pojmu "hodnota funkce u na hranici $\partial\Omega$", který má smysl v případě funkce spojité na $\overline{\Omega}$ (a tím spíš v případě $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$).

2.6. Věta (o hustotě stop). *Množina* $\gamma(W_2^1(\Omega)) := \{\gamma u : \ u \in W_2^1(\Omega)\}$ *není identická s celým prostorem* $L_2(\partial\Omega)$*, je však v* $L_2(\partial\Omega)$ *hustá.*

Co se týče důkazu věty 2.6, viz např. [KJF, důkaz věty 6.6.3].

Z linearity a ohraničenosti operátoru (2.10) plyne, že stopy dvou funkcí blízkých ve $W_2^1(\Omega)$ jsou blízké v $L_2(\partial\Omega)$. Podle (2.12) a (2.13) totiž platí

$$\|\gamma u - \gamma v\|_{L_2(\partial\Omega)} = \|\gamma(u - v)\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u - v\|_{1,\Omega}\,, \tag{2.14}$$

kde (podle poznámky 2.5) konstanta C je závislá pouze na Ω, takže když je hodnota $\|u - v\|_{1,\Omega}$ malá, je také hodnota $\|\gamma u - \gamma v\|_{L_2(\Omega)}$ malá. Z (2.14) navíc plyne

$$u_n \to u \text{ ve } W_2^1(\Omega) \ \Rightarrow \ \gamma u_n \to \gamma u \text{ v } L_2(\Omega)\,. \tag{2.15}$$

K důkazu (2.15) stačí v (2.14) položit $v = u_n$.

V prostoru $L_2(\Omega)$ nelze pojem stopy dobře zavést. Mimo jiné totiž neplatí analogie implikace (2.15), jak ukážeme v následujícím jednoduchém příkladě: Uvažujme na intervalu $\langle 0; 3\rangle$ posloupnost funkcí $u_n(x)$ definovaných vztahy

$$u_n(x) = \begin{cases} (1 - nx)\cdot(-1)^{n+1} & \text{pro } x \in \langle 0; \frac{1}{n}\rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \left\langle \frac{1}{n}; 3 - \frac{1}{n}\right\rangle, \\ [1 + n(x - 3)]\cdot(-1)^{n+1} & \text{pro } x \in \left\langle 3 - \frac{1}{n}; 3\right\rangle. \end{cases} \tag{2.16}$$

První dva členy této posloupnosti jsou graficky znázorněny na Obr. 2.2.

Obr. 2.2

Snadno se přesvědčíme, ze posloupnost $\{u_n(x)\}$ konverguje v prostoru $L_2(0; 3)$ k funkci $u(x) \equiv 0$:

$$\|u_n - 0\|^2_{L_2(0;3)} = \int_0^3 u_n^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/n} (1 - nx)^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{3n}\left[(1-nx)^3\right]_0^{1/n} = \frac{2}{3n} \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty\,.$$

Avšak posloupnost stop funkcí $u_n(x)$ spojitých v intervalu $\langle 0; 3\rangle$, tj. posloupnost

$$1, -1, 1, -1, \dots \tag{2.17}$$

jejich hodnot v krajních bodech tohoto intervalu, není konvergentní.

V případě, že bychom místo posloupnosti (2.16) uvažovali např. posloupnost

$$v_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-nx)\cdot(-1)^{n+1} & \text{pro } x \in \left\langle 0; \frac{1}{n}\right\rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \left\langle \frac{1}{n}; 3-\frac{1}{n}\right\rangle, \\ \frac{1}{n}[1+n(x-3)]\cdot(-1)^{n+1} & \text{pro } x \in \left\langle 3-\frac{1}{n}; 3\right\rangle. \end{cases} \tag{2.18}$$

(grafy prvních dvou členů této posloupnosti jsou znázorněny na Obr. 2.3), snadno bychom zjistili, že tato posloupnost již konverguje k funkci $u(x) \equiv 0$ v prostoru $W_2^1(0;3)$. Místo posloupnosti (2.17) bychom dostali pro stopy funkcí $v_n(x)$ v krajních bodech intervalu $\langle 0; 3\rangle$ posloupnost

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots,$$

která konverguje k nulovým stopám limitní funkce $u(x) \equiv 0$.

Obr. 2.3

Je-li $u \in W_2^2(\Omega)$, potom podle poznámky 1.21 patří funkce u i její zobecněné derivace $\partial u/\partial x_j$ $(j = 1, \dots, N)$ do $W_2^1(\Omega)$. Z věty 2.4 pak plyne, že nejen funkce u, ale i funkce $\partial u/\partial x_j$ $(j = 1, \dots, N)$ mají stopu na hranici $\partial\Omega$. Protože hranice $\partial\Omega$ je podle předpokladu lipschitzovská, takže normála $\vec{n}$ existuje skoro všude na $\partial\Omega$, umožňuje pojem stopy zavést derivaci funkce $u \in W_2^2(\Omega)$ podle normály (či v daném směru) na hranici $\partial\Omega$. Jsou-li n_j směrové kosiny vnější normály $\vec{n}$, můžeme definovat

$$\gamma\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{j=1}^{N}\Big(\gamma\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)(x)n_j(x)\,, \quad u \in W_2^2(\Omega), \quad x \in \partial\Omega \tag{2.19}$$

či stručněji (viz Poznámku 2.5.b)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) n_j(x)\,, \quad u \in W_2^2(\Omega), \quad x \in \partial\Omega\,. \tag{2.19*}$$

Obdobně můžeme postupovat v případě prostorů $W_2^k(\Omega)$ ($k \geq 3$), kde můžeme navíc definovat $\partial^2 u/\partial n^2$, atd.

2.7. Definice. Symbolem $S_0^{k,2}(\Omega)$ budeme značit lineál $C_0^\infty(\Omega)$ opatřený skalárním součinem $(u,v)_{k,\Omega}$ – viz (1.3). Symbol $W_0^{k,2}(\Omega)$ bude značit "zúplnění" prostoru $S_0^{k,2}(\Omega)$ v metrice indukované skalárním součinem $(u,v)_{k,\Omega}$ (viz (1.5), (1.6), (1.9), (1.10)).

2.8. Věta. *Nechť oblast Ω má lipschitzovskou hranici. Prostor $W_0^{k,2}(\Omega)$ je podprostorem prostoru $W_2^k(\Omega)$ a patří do něj funkce, pro které platí*

$$\gamma D^\alpha u(x) = 0 \text{ v } L_2(\partial\Omega) \text{ pro } |\alpha| \leq k-1, \quad u \in W_2^k(\Omega)\,. \tag{2.20}$$

Důkaz. a) Nejprve probereme případ $k = 1$. Nechť $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. To znamená (podle konstrukce prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$), že existuje posloupnost $\{u_n\} \subset S_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{1,\Omega} = 0\,. \tag{2.21}$$

Podle (2.14) platí

$$\|\gamma u - \gamma u_n\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u - u_n\|_{1,\Omega}\,.$$

Protože podle (2.11) a toho, že $u_n \in S_0^{1,2}(\Omega)$ (tj. $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$), platí $\gamma u_n(x) = 0$ pro $x \in \partial\Omega$, lze poslední nerovnost psát ve tvaru

$$\|\gamma u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u - u_n\|_{1,\Omega}\,.$$

Odtud a z (2.21) plyne $\gamma u = 0$ v $L_2(\partial\Omega)$, tj. vztah (2.20) pro $k = 1$.

b) V obecném případě nechť $u \in W_0^{k,2}(\Omega)$. Potom existuje posloupnost $\{u_n\} \subset S_0^{k,2}(\Omega)$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,\Omega} = 0\,.$$

Podobně jako (2.14) dokážeme, že pro $|\alpha| \leq k-1$ platí

$$\|\gamma D^\alpha u - \gamma D^\alpha u_n\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|D^\alpha u - D^\alpha u_n\|_{1,\Omega} \leq C\|u - u_n\|_{k,\Omega}\,.$$

Protože $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, potom víme, že funkce $u_n(x)$ je identicky rovna nule v určitém okolí hranice $\partial\Omega$, takže $D^\alpha u_n(x) = 0$ na $\partial\Omega$ pro jakkoliv velké $|\alpha|$. Tedy z předchozích nerovností plyne pro $|\alpha| \leq k-1$

$$\|\gamma D^\alpha u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u - u_n\|_{k,\Omega} \to 0 \text{ pro } n \to \infty\,,$$

takže platí vztah (2.20). $\square$

2.9. Věta (Friedrichsova nerovnost). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom*

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \le C\left\{ \sum_{j=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}s \right\} \quad \forall u \in W_2^1(\Omega)\,, \tag{2.22}$$

kde konstanta C závisí pouze na oblasti Ω.

2.10. Definice. a) Výraz

$$|u|_{1,\Omega} := \sqrt{\sum_{j=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x} \quad \forall u \in W_2^1(\Omega) \tag{2.23}$$

nazýváme seminormou v prostoru $W_2^1(\Omega)$.

b) Obecně, výraz

$$|u|_{k,\Omega} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \, \mathrm{d}x} \quad \forall u \in W_2^k(\Omega) \tag{2.24}$$

nazýváme seminormou v prostoru $W_2^k(\Omega)$.

Dá se dokázat, že seminorma $|\cdot|_{k,\Omega}$ má vlastnosti ($\mathcal{P}$.8) a ($\mathcal{P}$.9). S pomocí seminormy lze Friedrichsovu nerovnost psát ve tvaru

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \le C\Big(|u|_{1,\Omega}^2 + \int_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}s\Big) \quad \forall u \in W_2^1(\Omega)\,. \tag{2.22*}$$

V případě prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$ se redukuje nerovnost (2.22) na tvar

$$\|u\|_{1,\Omega} \le C|u|_{1,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.25}$$

Poněkud obecnější tvar Friedrichsovy nerovnosti udává následující věta:

2.11. Věta (Friedrichsova nerovnost). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí a $S \subset \partial\Omega$ její část, která má kladnou Lebesgueovu míru,* $\mathrm{mes}_1 S > 0$*. Potom*

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \le K(\Omega, S)\Big(|u|_{1,\Omega}^2 + \int_S u^2 \, \mathrm{d}s\Big) \quad \forall u \in W_2^1(\Omega), \tag{2.26}$$

kde konstanta $K(\Omega, S)$ závisí pouze na oblasti Ω a oblouku S.

Užitečná bývá i tato věta:

2.12. Věta. *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí a $\Gamma \subset \Omega$ část hranice, která není částí přímky a která má kladnou Lebesgueovu míru,* $\mathrm{mes}_1\Gamma > 0$*. Potom*

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \le C(\Omega, \Gamma)\Big(|u|_{2,\Omega}^2 + \int_\Gamma u^2 \, \mathrm{d}s\Big) \quad \forall u \in W_2^2(\Omega), \tag{2.27}$$

kde konstanta $C(\Omega, \Gamma)$ závisí pouze na oblasti Ω a části Γ.

2.13. Poznámka. V případě $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ se nerovnost (2.27) redukuje na tvar

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega)|u|_{2,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{2,2}(\Omega). \tag{2.28}$$

2.14. Věta (Poincaréova nerovnost). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom*

$$\|u\|_{k,\Omega}^2 \leq C\Big\{|u|_{k,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|<k} \Big(\int_\Omega D^\alpha u \, \mathrm{d}x\Big)^2\Big\}, \quad u \in W_2^k(\Omega), \tag{2.29}$$

kde konstanta C závisí pouze na k a na oblasti Ω. Speciálně pro $k = 1$ odtud plyne

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leq C\Big\{|u|_{1,\Omega}^2 + \Big(\int_\Omega u \, \mathrm{d}x\Big)^2\Big\}, \quad u \in W_2^1(\Omega). \tag{2.30}$$

Důkazy Friedrichsových nerovností lze nalézt v [Ne] a Poincaréových nerovností v [KFJ].

3. Příklady funkcí z prostoru $W_2^1(\Omega)$

3.1. Definice. Nechť Ω je oblast v R^N, A, $B \in R^N$ dva body a p přímka jimi procházející, tj.

$$p = \{tA + (1-t)B \in R^N : t \in R^1\}.$$

Předpokládejme, že $p \cap \Omega \neq \emptyset$. Potom existuje (konečná nebo nekonečná) posloupnost otevřených intervalů $\{J_k\}$, $J_i \cap J_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, tak, že

$$p \cap \Omega = \bigcup_j \{tA + (1-t)B \in R^N : t \in J_j\}.$$

Nechť u je funkce definovaná v Ω; položme

$$\varphi(t) = u(tA + (1-t)B) \quad \text{pro } t \in \bigcup_j J_j.$$

O funkci u říkáme, že je absolutně spojitá na přímce p, jestliže funkce φ je spojitá na každém kompaktním podintervalu intervalu J_j pro každé j.

3.2. Definice. Symbol $AC_i(\Omega)$ značí množinu všech funkcí definovaných na Ω, které jsou absolutně spojité na téměř všech přímkách, které jsou rovnoběžné s osou x_i a mají neprázdný průnik s oblastí Ω.

3.3. Věta. *Aby $u \in W_2^1(\Omega)$, je nutné a stačí, aby $u \in L_2(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^N AC_i(\Omega)$ a aby pro "klasické" derivace platilo $\partial u/\partial x_i \in L_2(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, N)$.*

Důkaz. Viz např. [KJF, str. 274-276]. □

3.4. Příklad. Nechť

$$K_R = \{[x_1, \ldots, x_N] : \; x_1^2 + \cdots + x_N^2 < R^2, \; 0 < R < 1\}. \tag{3.1}$$

Položme pro stručnost

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}\,.$$

Potom

$$\ln\frac{1}{r} \in W_2^1(K_R) \quad \text{pro } N = 3\,, \tag{3.2}$$

$$\ln\frac{1}{r} \in L_2(K_R) \quad \text{pro } N = 2\,. \tag{3.3}$$

Ověřme (3.2). Transformací do sférických souřadnic

$$x_1 = \varrho \cos\varphi \sin\vartheta, \quad x_2 = \varrho \sin\varphi \sin\vartheta, \quad x_3 = \varrho \cos\vartheta,$$

kde $\varrho \in \langle 0; R\rangle$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$, $\vartheta \in \langle 0; \pi\rangle$, snadno zjistíme, že

$$\left\| \ln \frac{1}{r} \right\|_{0,K_R}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \left(\ln \frac{1}{\varrho}\right)^2 \varrho^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right\} \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho \,.$$

Pro $\varrho \in (0, R\rangle$ je $\frac{1}{\varrho} > 1$, takže $(\ln \frac{1}{\varrho})^2 < \frac{1}{\varrho^2}$. Odtud

$$\left\| \ln \frac{1}{r} \right\|_{0,K_R}^2 < \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right\} \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho = 4\pi R \,.$$

Dále,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln \frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \ln r = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^2},$$

takže

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln \frac{1}{r}\right)\right]^2 = \frac{1}{r^2} \,. \tag{3.4}$$

Pro $N = 3$ odtud plyne transformací do sférických souřadnic

$$\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln \frac{1}{r}\right)\right\|_{0,K_R}^2 = \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right\} \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho = 4\pi R \,.$$

Tedy platí (3.2).

Ověříme (3.3). Transformací do polárních souřadnic

$$x_1 = \varrho\cos\varphi, \quad x_2 = \varrho \sin\varphi \quad (\varrho \in \langle 0; R\rangle, \ \varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle)$$

dostaneme

$$\left\| \ln \frac{1}{r} \right\|_{0,K_R}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\ln \frac{1}{\varrho}\right)^2 \varrho \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^R \varrho (\ln\varrho)^2 \mathrm{d}\varrho \,.$$

Dvojí integrací per partes snadno zjistíme, že

$$\int \varrho(\ln\varrho)^2 \mathrm{d}\varrho = \frac{1}{2}\Big[(\varrho \ln\varrho)^2 - \varrho^2 \ln\varrho + \frac{1}{2}\varrho^2 \Big] = \frac{1}{2}\Big[\Big(\varrho \ln\frac{1}{\varrho}\Big)^2 + \varrho^2 \ln\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\varrho^2 \Big] \,.$$

Protože

$$\lim_{\varrho\to 0+} \varrho \ln\frac{1}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0+} \frac{\ln\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho}} = \lim_{\varrho\to 0+} \frac{-\varrho\frac{1}{\varrho^2}}{-\frac{1}{\varrho^2}} = 0,$$

dostáváme z předchozího (3.3).

Pro $N = 2$ z (3.4) plyne, že

$$\sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln \frac{1}{r}\right)\right\|_{0,K_R}^2 = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^R \frac{1}{\varrho} \mathrm{d}\varrho \to \infty,$$

takže $\ln\frac{1}{r} \notin W_2^1(K_R)$ a platí pouze (3.3). $\square$

3.5. Příklad. Dokážeme, že

$$\sqrt[4]{\ln\frac{1}{r}} \in W_2^1(K_R) \quad \text{pro } N=2 \quad \left(\frac{1}{R}>1\right), \tag{3.5}$$

$$\ln\ln\frac{1}{r} \in W_2^1(K_R) \quad \text{pro } N=2 \quad \left(\ln\frac{1}{R}>1\right). \tag{3.6}$$

Ověřme (3.5). Po transformaci do polárních souřadnic z nerovnosti $\ln\frac{1}{\varrho} < \frac{1}{\varrho}$, která platí pro $\varrho \in (0, R\rangle$, dostaneme

$$\left\|\sqrt[4]{\ln\frac{1}{r}}\right\|_{0,K_R}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R \left\{\int_0^{2\pi} \varrho\sqrt{\ln\frac{1}{\varrho}}\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\varrho =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R \varrho\sqrt{\ln\frac{1}{\varrho}}\mathrm{d}\varrho < 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R \sqrt{\varrho}\mathrm{d}\varrho = \frac{4}{3}\pi\sqrt{R^3}\,.$$

Dále

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt[4]{\ln\frac{1}{r}}\right) = -\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{3}{4}}\frac{x_i}{r^2}\,,$$

takže

$$\sum_{i=1}^2 \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt[4]{\ln\frac{1}{r}}\right)\right\|_{0,K_R}^2 = \frac{2\pi}{16}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R \left(\ln\frac{1}{\varrho}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\varrho}\mathrm{d}\varrho\,.$$

Substitucí $t = -\ln\varrho$ dostaneme

$$\int_\varepsilon^R \left(\ln\frac{1}{\varrho}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\varrho}\mathrm{d}\varrho = -\int_{\ln 1/\varepsilon}^{\ln 1/R} t^{-3/2}\mathrm{d}t = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{R}}} - \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}}\right) \to \frac{2}{\sqrt{\ln\frac{1}{R}}} \quad \text{pro } \varepsilon\to 0+\,,$$

takže platí (3.5).

Ověřme (3.6). Platí

$$\left\|\ln\ln\frac{1}{r}\right\|_{0,K_R}^2 = 2\pi\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R \left(\ln\ln\frac{1}{\varrho}\right)^2\varrho\mathrm{d}\varrho < 2\pi\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R \left(\ln\frac{1}{\varrho}\right)^2\varrho\mathrm{d}\varrho\,.$$

Dále pokračujeme stejně jako v případě $\left\|\ln\frac{1}{r}\right\|_{0,K_R}^2$, když $K_R \subset R^2$ (tj. jako při ověřování (3.3)). Tedy

$$\left\|\ln\ln\frac{1}{r}\right\|_{0,K_R}^2 < \infty\,.$$

Platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln\ln\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{\ln\frac{1}{r}}\frac{x_i}{r^2}\,,$$

takže

$$\sum_{i=1}^2 \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln\ln\frac{1}{r}\right)\right\|_{0,K_R}^2 = 2\pi\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R \frac{1}{\left(\ln\frac{1}{\varrho}\right)^2}\frac{1}{\varrho}\mathrm{d}\varrho\,.$$

Substitucí $t = -\ln\varrho$ dostaneme

$$\int_\varepsilon^R \frac{1}{\left(\ln\frac{1}{\varrho}\right)^2}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = -\int_{\ln 1/\varepsilon}^{\ln 1/R} t^{-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln\frac{1}{R}} - \frac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\,.$$

Tedy platí (3.6). $\square$

3.6. Příklad. Uvažujme oblast $G \subset R^2$ ohraničenou křivkami

$$x_2 = 0, \quad x_1 = a \ (a > 0), \quad x_2 = x_1^\alpha, \tag{3.7}$$

kde

$$\alpha > 2 + \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1). \tag{3.8}$$

Potom

$$u(x_1, x_2) := x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \in W_2^1(G)\,. \tag{3.9}$$

Skutečně, snadno se přesvědčíme, že platí

$$\|u\|_{1,G}^2 = \lim_{\delta \to 0+} \int_\delta^a \left\{ \int_0^{x_1^\alpha} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 \right] \mathrm{d}x_2 \right\} \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2+\beta} a^{2+\beta} + \frac{1}{\beta} \Big(\frac{1+\varepsilon}{2}\Big)^2 a^\beta\,,$$

kde

$$\beta = \alpha - 2 - \varepsilon > 0\,.$$

Nahradíme-li oblast G oblastí $\widetilde{G}$, která je ohraničena úsečkami ležícími na přímkách

$$x_2 = 0, \quad x = a \ (a > 0), \quad x_2 = kx_1 \ (k > 0), \tag{3.10}$$

potom při libovolně malém k zjistíme, že

$$u(x_1, x_2) \equiv x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \notin W_2^1(\widetilde{G})\,. \tag{3.11}$$

3.7. Příklad. Nechť $Q \subset R^2$ je oblast ohraničená křivkami

$$x_2 = x^\alpha, \quad x_2 = -x^\alpha, \quad x_1 = a \ (a > 0), \tag{3.12}$$

kde α splňuje (3.8). Stejně snadno jako v příkladě 3.6 zjistíme, že

$$u(x_1, x_2) \equiv x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \in W_2^1(Q)\,. \tag{3.13}$$

Je-li $\widetilde{Q}$ oblast ohraničená úsečkami ležícími na přímkách

$$x_2 = kx_1, \quad x_2 = -kx_1, \quad x_1 = a \quad (k > 0,\ a > 0), \tag{3.14}$$

a $\widehat{Q}$ oblast ohraničená křivkami

$$x_2 = x_1^\alpha, \quad x_2 = -kx_1, \quad x_1 = a \quad (k > 0,\ a > 0), \tag{3.15}$$

kde k je v (3.14) a (3.15) libovolně malé, potom opět snadno zjistíme, že

$$x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \notin W_2^1(\widetilde{Q}), \quad x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \notin W_2^1(\widehat{Q})\,. \tag{3.16}$$

3.8. Komentář. V příkladech 3.4 a 3.5 platí jak pro $N = 2$, tak pro $N = 3$, že K_R má lipschtzovskou hranici. Všechny funkce v těchto příkladech leží v průnicích prostorů $AC_i(K_R)$. Výsledek (3.3) ukazuje, že tato vlastnost je nutnou, nikoliv však postačující podmínkou pro to, aby daná funkce náležela do prostoru W_2^1. Musí platit věta 3.3.

Je třeba poznamenat, že vzhledem k větě o stopách (viz větu 2.4) se jiný výsledek než ten, který je uveden v (3.2) a (3.3), nedá obecně očekávat.

V příkladech 3.6 a 3.7 funkce leží v prostoru W_2^1, když hranice v okolí singularity se dostatečně přimyká k ose x_1.

3.9. Poznámka. S pomocí věty 3.3 lze dokázat lemma 1.14, důsledek 1.16 a větu 1.18 bez pomoci věty 1.12, a to velmi snadno.

4. Bramble–Hilbertovo lemma

Toto lemma, které uvádíme ve větě 4.3, je jednoduchou aplikací Poincaréovy nerovnosti; má však významné postavení v analýze metody konečných prvků.

4.1. Označení. a) Symbol $\kappa_N(k)$ bude značit počet všech různých multiindexů α takových, že $|\alpha| \le k$, a symbol $\widetilde{\kappa}_N(k)$ bude značit počet všech různých multiindexů α takových, že $|\alpha| = k$. Platí

$$\kappa_N(k) = \frac{(N+k)!}{N!k!}, \quad \widetilde{\kappa}_N(k) = \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!}. \tag{4.1}$$

b) Množina všech polynomů N proměnných $x_1, \dots, x_N$, které mohou být psány ve tvaru

$$q(x) = \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha x^\alpha \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha x^\alpha, \tag{4.2}$$

kde x^α značí

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}, \tag{4.3}$$

bude označována symbolem $\mathcal{P}_N(n)$. To znamená, že $\mathcal{P}_N(n)$ je množina všech polynomů, jejichž stupeň není větší než n. Je evidentní, že $\mathcal{P}_N(n)$ je $\kappa_N(n)$-rozměrný lineární prostor. Restrikci polynomů z $\mathcal{P}_N(n)$ na oblast $G \subset R^N$ budeme značit $\mathcal{P}_G(n)$.

Poznamenejme, že pro $N = 1, 2, 3$ vztah $(4.1)_1$ dává známé výrazy

$$\kappa_1(n) = n+1, \quad \kappa_2(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \quad \kappa_3(n) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3). \tag{4.4}$$

4.2. Lemma. *Nechť G je ohraničená oblast v R^N. Potom podmínky*

$$\int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = b_\alpha, \quad |\alpha| \le k, \tag{4.5}$$

kde $b_\alpha \in R^1$ jsou daná čísla, určují jednoznačně polynom $q \in \mathcal{P}_N(k)$.

Důkaz. Protože vztahy (4.5) representují $\kappa_N(k)$ lineárních algebraických rovnic pro $\kappa_N(k)$ koeficientů c_α polynomu $q(x)$ (viz (4.2) s $n = k$) stačí dokázat, že $\kappa_N(k)$ homogenních rovnic

$$\int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad |\alpha| \le k \tag{4.6}$$

implikuje $q(x) \equiv 0$. To je však snadné: jestliže $q \in \mathcal{P}_N(k)$, potom $D^\alpha q(x) =$ const pro $|\alpha| = k$. Tedy podle (4.6)

$$0 = \int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{mes}_N G) D^\alpha q(x), \quad |\alpha| = k.$$

Odtud plyne $D^\alpha q(x) = 0$ pro $|\alpha| = k$, takže $q \in \mathcal{P}_N(k-1)$. Proto $D^\alpha q(x) =$ const pro $|\alpha| = k-1$, takže podle (4.6)

$$0 = \int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{mes}_N G) D^\alpha q(x), \quad |\alpha| = k-1$$

a $q \in \mathcal{P}_N(k-2)$. Pokračujeme-li takto dále, dostaneme po celkem k krocích, že $q(x) = \text{const}$. Tento výsledek a (4.6), kde položíme $|\alpha| = 0$, dávají

$$0 = \int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{mes}_N G) q(x)\,.$$

Tedy $q(x) \equiv 0$, což jsme potřebovali dokázat. $\square$

4.3. Věta (Bramble-Hilbertovo lemma). *Nechť G je oblast s lipschitzovskou hranicí (kde $2 \le \dim G \le 3$). Nechť F je lineární ohraničený funkcionál na $W_2^k(G)$,*

$$|F(v)| \le C_1 \|v\|_{k,G} \quad \forall v \in W_2^k(G), \tag{4.7}$$

a nechť

$$F(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_N(k-1) \quad (N = \dim G)\,. \tag{4.8}$$

Potom

$$|F(v)| \le C_1 C_2 |v|_{k,G} \quad \forall v \in W_2^k(G), \tag{4.9}$$

kde konstanta C_1 nezávisí na funkci v a konstanta C_2 závisí pouze na k a na oblasti G.

Důkaz. Položme ve vztahu (4.5)

$$b_\alpha = -\int_G D^\alpha v\,\mathrm{d}x$$

a nahraďme v lemmatu 4.2 číslo k číslem $k-1$. Potom z lemmatu 4.2 plyne, že existuje právě jeden polynom $q \in \mathcal{P}_N(k-1)$, který splňuje vztahy

$$\int_G D^\alpha (v+q)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall |\alpha| \le k-1\,.$$

Z věty 2.14 (vztah (2.29)) potom plyne,že

$$\|v+q\|_{k,G} \le C_2 |v+q|_{k,G} = C_2 |v|_{k,G}\,.$$

Pomocí vztahu (4.8), linearity funkcionálu F a vztahu (4.7) dále dostaneme

$$|F(v)| = |F(v) + F(q)| = |F(v+q)| \le C_1 \|v+q\|_{k,G}\,.$$

Odhadneme-li pravou stranu tohoto vztahu předchozím výsledkem, dostaneme (4.9), což jsme chtěli dokázat. $\square$

V 16. kapitole budeme potřebovat ještě jinou formu Bramble-Hilbertova lemmatu, kterou uvádíme ve větě 4.4. Nejprve však musíme uvést některé další prostory funkcí a příslušné normy.

Symbolem $C^0(\overline{\Omega})$ značíme Banachův prostor funkcí spojitých na uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$. Norma v prostoru $C^0(\overline{\Omega})$ je definována vztahem

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|\,, \quad u \in C^0(\overline{\Omega})\,. \tag{4.10}$$

Symbolem $C^k(\overline{\Omega})$ značíme Banachův prostor funkcí spojitých i se všemi svými derivacemi až do k-tého řádu včetně na uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$. Norma v prostoru $C^k(\overline{\Omega})$ je definována vztahem

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\leq k,\, x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|\,, \quad u \in C^k(\overline{\Omega})\,. \tag{4.11}$$

Seminorma v prostoru $C^k(\overline{\Omega})$, kde $k \geq 1$, je definována vztahem

$$|u|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|=k,\, x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|\,, \quad u \in C^k(\overline{\Omega})\,. \tag{4.12}$$

4.4. Bramble-Hilbertovo lemma pro spojitě diferencovatelné funkce. *Nechť G je oblast s lipschitzovskou hranicí (kde $1 \leq \dim G \leq 3$). Nechť F je lineární ohraničený funkcionál na $C^k(\overline{G})$,*

$$|F(v)| \leq C_1 \|v\|_{C^k(\overline{G})} \quad \forall v \in C^k(\overline{G}), \tag{4.13}$$

a nechť

$$F(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_N(k-1) \quad (N = \dim G)\,. \tag{4.14}$$

Potom

$$|F(v)| \leq C_1 C_2 |v|_{C^k(\overline{G})} \quad \forall v \in C^k(\overline{G}), \tag{4.15}$$

kde konstanta C_1 nezávisí na funkci v a konstanta C_2 závisí pouze na k a na oblasti G.

Důkaz je podobný důkazu věty 4.3. Místo vztahu (2.29) užíváme této modifikace Poincaréovy nerovnosti

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq C\left\{ |u|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|<k} \left| \int_\Omega D^\alpha u \,\mathrm{d}x \right| \right\}, \quad \forall u \in C^k(\overline{\Omega}), \tag{4.16}$$

která je dokázána v [Že2, Theorem $\mathcal{P}$.87]. Konstanta C v (4.16) závisí opět pouze na k a na Ω.

5. Sobolevova věta o vnoření

Uvádíme pouze speciální případ této důležité věty; v její obecnější versi je číslo 2 nahrazeno libovolným číslem p, které splňuje podmínku $p \in \langle 1; \infty)$.

5.1. Věta (Sobolev). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí, $\dim\Omega = N > 1$ a k je takové přirozené číslo, že $2k > N$. Potom množina všech funkcí z $W_2^k(\Omega)$ je podmnožinou množiny všech funkcí z $C^0(\overline{\Omega})$, tj.*

$$W_2^k(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})\,, \tag{5.1}$$

a identický operátor $I: W_2^k(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$ (tj. z $W_2^k(\Omega)$ do $C^0(\overline{\Omega})$) je ohraničený, tj.

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq K \|u\|_{k,\Omega} \quad \forall u \in W_2^k(\Omega)\,, \tag{5.2}$$

kde konstanta K nezávisí na funkci u.

5.2. Poznámka. a) Inkluse (5.1) má tento význam: jestliže $u \in W_2^k(\Omega)$, potom u je třída ekvivalentních funkcí (tj. téměř všude sobě rovných) a inkluse (5.1) říká, že tato třída obsahuje nějaký prvek prostoru $C^0(\overline{\Omega})$.

b) V případech $N = 2$ a $N = 3$, které jsou pro praxi nejdůležitější, je nerovnost $2k > N$ splněna číslem $k = 2$. Tedy pro $N = 2$ a $N = 3$ je prostor $W_2^2(\Omega)$ podmnožinou prostoru $C^0(\overline{\Omega})$.

5.3. Poznámka. Důkaz věty 5.1 je komplikovaný (viz [KJF, kapitola 5.7]); dokážeme proto pouze tento speciální případ:

Nechť Ω je *rovinná* a *jednoduše souvislá* oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom množina všech funkcí z $W_0^{2,2}(\Omega)$ je podmnožinou množiny všech funkcí z $C^0(\overline{\Omega})$, tj.

$$W_0^{2,2}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})\,, \tag{5.3}$$

a identický operátor $I:\ W_0^{2,2}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$ (tj. z $W_0^{2,2}(\Omega)$ do $C^0(\overline{\Omega})$) je ohraničený, tj.

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le K\|u\|_{2,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{2,2}(\Omega)\,, \tag{5.4}$$

kde konstanta K nezávisí na funkci u.

Důkaz je snadný: Oblast $\overline{\Omega}$ můžeme umístit do dosti velkého čtverce $A = (a;b) \times (a;b)$, kde $a < b$. Každou funkci z $C_0^\infty(\Omega)$ prodloužíme nulou na celý čtverec A. Nechť $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Platí

$$\varphi(x) = \int_a^{x_1} \left\{ \int_a^{x_2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2 \right\} \mathrm{d}\xi_2 = \int_{\Omega(x_1,x_2)} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi, \tag{5.5}$$

kde jsme položili

$$\Omega(x_1,x_2) = ((a,x_1) \times (a,x_2)) \cap \Omega. \tag{5.6}$$

Protože $\Omega(x_1,x_2) \subset A$, z (5.5) plyne pomocí $\mathcal{P}.15$, kde $u = 1$, $v = |\partial^2\varphi/\partial x_1 \partial x_2|$,

$$|\varphi(x)| \le \int_A \left| \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2) \right| \mathrm{d}\xi \le \sqrt{\mathrm{mes}_2 A} \sqrt{\int_A \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2) \right)^2 \mathrm{d}\xi} =$$

$$= (b-a) \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2) \right)^2 \mathrm{d}\xi} \le (b-a)\|\varphi\|_{2,\Omega}, \tag{5.7}$$

takže

$$\|\varphi\|_{C^0(\overline{\Omega})} \equiv \max_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)| \le (b-a)\|\varphi\|_{2,\Omega} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.8}$$

Nechť $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ je libovolná funkce a $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ posloupnost, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{2,\Omega} = 0; \tag{5.9}$$

existence takové posloupnosti $\{u_n\}$ plyne z věty 1.11. Potom podle (5.8) a (5.9)

$$\|u_m - u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le (b-a)\|u_n - u_m\|_{2,\Omega} \le (b-a)\big(\|u_n - u\|_{2,\Omega} + \|u - u_m\|_{2,\Omega}\big) \to 0,$$

takže posloupnost $\{u_n\}$ je cauchyovská v $C^0(\overline{\Omega})$. Protože $C^0(\overline{\Omega})$ je úplný prostor, existuje funkce $v \in C^0(\overline{\Omega})$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v\|_{C^0(\overline{\Omega})} = 0. \tag{5.10}$$

Z (5.10) plyne

$$\|u_n - v\|_{L_2(\Omega)} \le \|u_n - v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \sqrt{\mathrm{mes}_2 \Omega} \to 0.$$

Z (5.9) plyne $\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$, takže jednoznačnost limity a $v \in C^0(\overline{\Omega})$ implikují $u = v \in C^0(\overline{\Omega})$. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ v nerovnosti (5.8), kde položíme $\varphi = u_n$ dostaneme (5.4). $\square$

6. Formální ekvivalence eliptického okrajového problému a příslušného variačního problému

Nechť oblast $\Omega \subset R^2$ má lipschitzovskou hranici $\partial\Omega$. Uvažujme tento okrajový problém:

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{v } \Omega, \tag{6.1}$$

$$u = \overline{u} \quad \text{na } \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \tag{6.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = q \quad \text{na } \Gamma_2 \subset \partial\Omega, \tag{6.3}$$

kde $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ jsou dvě (relativně otevřené) podmnožiny $\partial\Omega$ takové, že

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \text{mes}_1\Gamma_1 + \text{mes}_1\Gamma_2 = \text{mes}_1\partial\Omega, \quad \text{mes}_1\Gamma_1 > 0. \tag{6.4}$$

Navíc předpokládáme, že Γ_1 sestává z konečného počtu navzájem disjunktních oblouků. Nejjednodušší možný případ, kdy Γ_1 je jeden oblouk, je naznačen na Obr. 6.1. Body A, $B \in \partial\Omega$ nepatří ani do Γ_1, ani do Γ_2, takže $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{A, B\}$.

Obr. 6.1

Symboly k_{ij}, f, $\overline{u}$ a q značí dané dostatečně hladké funkce bodu $x := [x_1, x_2]$ (jejich hladkost bude specifikována později) a n_1, n_2 jsou složky jednotkové vnější normály k hranici$\partial\Omega$; $n_i = n_i(x)$.

6.1. Poznámka. a) Ve speciálním případě, kdy $k_{ij} = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta (tj. $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$) rovnice (6.1) se redukuje na Poissonovu rovnici ($\mathcal{P}$.15), tj. na

$$-\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f \quad \text{v } \Omega,$$

a okrajová podmínka (6.3) na okrajovou podmínku ($\mathcal{P}$.17), tj.

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = q \quad \text{na } \Gamma_2.$$

b) V dalším textu budeme často užívat větu $\mathcal{P}.5$, která platí i pro funkce $u, \varphi \in W_2^1(\Omega)$.

Abychom získali variační formulaci problému (6.1) – (6.3), předpokládejme, že jeho klasické řešení existuje, a násobme (6.1) libovolnou funkcí $v \in V$, kde

$$V = \{v \in W_2^1(\Omega) : \ \gamma v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}. \tag{6.5}$$

Po integraci přes Ω dostaneme:

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

Užijeme-li větu $\mathcal{P}.5$ (důsledek Greenovy věty), přejde levá strana (6.6) na tvar

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x = -\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \,\mathrm{d}s + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x.$$

Podle (6.3) a (6.5) platí

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_2} vq \,\mathrm{d}s.$$

Tedy vztah (6.6) může být psán ve tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} vq \,\mathrm{d}s. \tag{6.7}$$

Kvůli stručnosti užívejme značení

$$a(w,v) := \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,, \tag{6.8}$$

$$L(v) := \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} vq \,\mathrm{d}s\,. \tag{6.9}$$

Potom lze psát (6.7) ve tvaru

$$a(u,v) = L(v),$$

kde funkce $v \in V$ je libovolná. Protože tento vztah může být splněn funkcí u, která je méně hladká než klasické řešení problému (6.1) – (6.3), jsme motivováni formulovat následující variační problém:

6.2. Problém. Nechť oblast $\Omega \subset R^2$ má lipschitzovskou hranici $\partial\Omega$. Nechť $\overline{u} \in L_2(\Gamma_1)$ je taková funkce, že existuje funkce $z \in W_2^1(\Omega)$, pro kterou $\gamma z = \overline{u}$ na Γ_1. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, 2)$, kde k_{ij} jsou funkce, které vystupují v (6.8). Nechť $f \in L_2(\Omega)$ a $q \in L_2(\Gamma_2)$, kde f, q jsou funkce, které vystupují v (6.9). Problém zní takto: Nalezněte funkci $u \in W_2^1(\Omega)$ takovou, že

$$u - z \in V, \tag{6.10}$$

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \tag{6.11}$$

kde prostor V je definován vztahem (6.5) a formy $a(u, v)$ a $L(v)$ jsou definovány vztahy (6.8) a (6.9).

6.3. Poznámka. a) Předpoklady problému 6.2, které se týkají funkcí k_{ij}, f a q zaručují, že Lebesgueovy integrály definující $a(w, v)$ a $L(v)$ jsou konečné pro všechny funkce $v, w \in W_2^1(\Omega)$.

b) Vztah (6.10) implikuje

$$\gamma u = \overline{u} \quad \text{téměř všude na } \Gamma_1, \tag{6.12}$$

což je okrajová podmínka (6.2) psaná pro funkci $u \in W_2^1(\Omega)$.

6.4. Věta (o formální ekvivalenci okrajového problému a variačního problému). *a) Nechť problém* (6.1) – (6.3) *má klasické řešení* u. *Potom je řešením Problému* 6.2.

b) Nechť Problém 6.2 *má řešení* u. *Jestliže* $u \in W_2^2(\Omega)$ *a* $k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, *potom řešení* u *splňuje rovnici* (6.1) *téměř všude v* Ω *a okrajovou podmínku* (6.3) *téměř všude na* Γ_2. *Vzhledem k* (6.12) *je tedy* u *řešením problému* (6.1) – (6.3).

Důkaz. a) Vztahy (6.6) – (6.9) implikují, že klasické řešení u splňuje (6.11). Podmínka (6.10) je evidentně splněna.

b) Protože $u \in W_2^2(\Omega)$, můžeme výraz pro $a(u, v)$ upravit pomocí věty $\mathcal{P}$.5 takto:

$$a(u, v) \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \, \mathrm{d}s - \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, \mathrm{d}x \, . \tag{6.13}$$

Protože $\gamma v = 0$ téměř všude na Γ_1 (viz (6.5)), dostáváme z (6.11) pomocí (6.8), (6.9) a (6.13) vztah

$$- \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + f \right\} v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \, \mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in V. \tag{6.14}$$

Protože $W_0^{1,2}(\Omega) \subset V$, můžeme uvažovat (6.14) pouze pro funkce $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Potom dostaneme

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + f \right\} v \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.15}$$

Prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$. (Plyne to z věty $\mathcal{P}.17$ a toho, že $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$.) Tedy podle věty $\mathcal{P}.19$ vztah (6.15) implikuje platnost rovnice (6.1) téměř všude v Ω.

Protože rovnice (6.1) platí téměř všude v Ω, redukuje se (6.14) na tvar

$$\int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \, \mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in V. \tag{6.16}$$

Vztah (6.16) lze přepsat takto:

$$\int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \, \mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in \gamma(V), \tag{6.17}$$

kde $\gamma(V) \subset L_2(\Gamma_2)$ je množina stop všech funkcí z V na Γ_2. Podle věty 2.6 je množina $\gamma(V)$ hustá v $L_2(\Gamma_2)$, takže z (6.17) podle věty $\mathcal{P}.19$ plyne, že okrajová podmínka (6.3) je splněna téměř všude na Γ_2. $\square$

Věta 6.4 je důvodem, proč je řešení variačního problému 6.2 nazýváno *slabým řešením* okrajového problému (6.1) – (6.3).

Matematicky je Problém 6.2 obtížnější než okrajový problém (6.1) – (6.3). Avšak získání přibližného řešení variačního problému je přímočařejší a snadnější úkol než získání přibližného řešení okrajového problému.

6.5. Poznámka. Rovnice (6.1) je speciálním případem rovnice

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + k_0 u = f \quad \forall x \in \Omega \tag{6.18}$$

a Neumannova okrajová podmínka (6.3) speciálním případem Newtonovy (někdy též nazývané Robinovy) okrajové podmínky

$$bu + \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = q \quad \text{na } \Gamma_2 \subset \partial\Omega, \tag{6.19}$$

kde $k_0 = k_0(x)$, $b = b(x)$. Není-li $b(x)$ identicky rovno nule, potom předpokládáme, že $b(x) \neq 0$ pro $x \in \Gamma_3 \subset \Gamma_2$, kde Γ_3 sestává z konečného počtu navzájem disjunktních oblouků. V případě (6.18) a (6.19) je forma $a(w, v)$ nahrazena formou

$$a(w, v) := \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega k_0 w v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} b w v \, \mathrm{d}s \tag{6.20}$$

a předpoklady Problému 6.2 je třeba doplnit těmito předpoklady: funkce k_0 je ohraničená a měřitelná na Ω a funkce b je ohraničená a měřitelná na Γ_3. (Pokud $k_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ a $b \in C^0(\overline{\Gamma}_3)$, potom jsou tyto předpoklady splněny.)

7. Existence a jednoznačnost řešení variačního problému

Následující věta, jejíž důkaz je např. v [Re, str. 404 - 407], má zásadní význam pro úvahy v této kapitole.

7.1. Věta (Lax-Milgram). *Nechť H je Hilbertův prostor se skalárním součinem (u, v) a nechť $B(u, v)$ je bilineární forma (tedy lineární jak v u, tak ve v) definovaná pro $u, v \in H$ a taková, že existují konstanty $M > 0$ a $\beta > 0$ nezávislé na u a v tak, že platí*

$$|B(u, v)| \leq M\|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in H, \tag{7.1}$$

$$B(v, v) \geq \beta\|v\|^2 \quad \forall v \in H, \tag{7.2}$$

kde $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Potom lze každý lineární funkcionál F, který je definovaný a ohraničený na H, vyjádřit ve tvaru

$$F(v) = B(w, v) \quad \forall v \in H, \tag{7.3}$$

kde w je prvek prostoru H jednoznačně určený funkcionálem F. Přitom je

$$\|w\| \leq \frac{\|F\|_*}{\beta}, \tag{7.4}$$

kde $\|F\|_*$ je norma funkcionálu F.

7.2. Poznámka. Bilineární forma $B(u, v)$ nemusí být symetrická; proto na rozdíl od skalárního součinu v ní záleží na pořadí u, v.

S pomocí věty 7.1 nyní dokážeme existenci a jednoznačnost řešení Problému 6.2.

7.3. Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení variačního problému). *Je-li bilineární forma $a(v, w)$ ohraničená na $W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, tj.*

$$|a(v, w)| \leq M\|v\|_{1,\Omega}\|w\|_{1,\Omega} \quad \forall v, w \in W_2^1(\Omega) \quad (M = \text{const}), \tag{7.5}$$

a V-eliptická, tj.

$$a(v, v) \geq \beta\|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V \quad (\beta = \text{const} > 0), \tag{7.6}$$

kde prostor $V \subset W_2^1(\Omega)$ je definován v (6.5), a je-li lineární forma $L(v)$ ohraničená na $W_2^1(\Omega)$, tj.

$$|L(v)| \leq K\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \quad (K = \text{const}), \tag{7.7}$$

potom existuje právě jedna funkce $u \in W_2^1(\Omega)$, která splňuje vztahy (6.10), (6.11), tj. vztahy

$$u - z \in V, \tag{7.8}$$

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \tag{7.9}$$

Dále, jsou-li z_1, $z_2 \in W_2^1(\Omega)$ dvě neekvivalentní funkce, pro které platí

$$\gamma z_1 = \gamma z_2 \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{7.10}$$

potom funkce u_1, $u_2 \in W_2^1(\Omega)$ splňující vztahy

$$u_1 - z_1 \in V, \quad u_2 - z_2 \in V, \tag{7.11}$$

$$a(u_1, v) = L(v), \quad a(u_2, v) = L(v) \quad \forall v \in V \tag{7.12}$$

jsou ekvivalentní v prostoru $W_2^1(\Omega)$.

Důkaz. a) *Existence.* V důkazu existence řešení Problému 6.2 použijeme větu 7.1, kde za prostor H zvolíme prostor V. To lze, protože V je podprostor prostoru $W_2^1(\Omega)$, tedy je Hilbertovým prostorem s metrikou prostoru $W_2^1(\Omega)$.

Z předpokladů (7.5) a (7.6) plyne, že jsou splněny předpoklady (7.1), (7.2) věty 7.1:

$$|a(t, v)| \leq M\|t\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall t, v \in V \subset W_2^1(\Omega), \tag{7.13}$$

$$a(v, v) \geq \beta\|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V \subset W_2^1(\Omega). \tag{7.14}$$

V prostoru V uvažujme funkcionál

$$F(v) = L(v) - a(z, v) \quad \forall v \in V, \tag{7.15}$$

kde $z \in W_2^1(\Omega)$ je pevná funkce z Problému 6.2 (vyskytuje se v (6.10), resp. (7.8)).

Funkcionál (7.15) je zřejmě na prostoru V lineární. Dokážeme-li, že je na V také ohraničený, budeme mít ověřeno, že jsou splněny všechny předpoklady věty 7.1. Z (7.15), (7.7) a (7.5) plyne

$$|F(v)| \leq |L(v)| + |a(z, v)| \leq K\|v\|_{1,\Omega} + M\|z\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} =$$

$$= (K + M\|z\|_{1,\Omega})\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in V. \tag{7.16}$$

Protože $z \in W_2^1(\Omega)$ je pevný prvek, je výraz $K + M\|z\|_{1,\Omega}$ konstanta nezávislá na $v \in V$. Tedy $F(v)$ je ohraničený funkcionál na V.

Z věty 7.1 tedy plyne, že existuje *právě jedno* $w \in V$ tak, že platí

$$F(v) = a(w, v) \quad \forall v \in V, \tag{7.17}$$

tj. že platí (dosadili jsme do (7.17) za $F(v)$ z (7.15))

$$a(w, v) = L(v) - a(z, v) \quad \forall v \in V. \tag{7.18}$$

Protože forma $a(t, v)$ je lineární v obou argumentech, můžeme psát

$$a(w, v) + a(z, v) = a(w + z, v). \tag{7.19}$$

Položíme-li tedy

$$u := w + z, \tag{7.20}$$

z (7.18) a (7.19) plyne

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V,$$

což je rovnice (7.9). Protože podle (7.20) je zároveň

$$u - z = w \in V,$$

což je inkluse (7.8), splňuje funkce u obě podmínky (6.10) a (6.11), které jsou kladeny na řešení Problému 6.2. Řešení Problému 6.2 tedy existuje.

b) *Jednoznačnost.* Víme, že existuje právě jedno $w \in V$ tak, že platí vztah (7.18). Toto jediné w vystupuje spolu s danou funkcí $z \in W_2^1(\Omega)$ ve vztahu (7.20), kterým definujeme řešení u. Tedy pro dané $z \in W_2^1(\Omega)$ existuje právě jedno řešení u Problému 6.2.

Zbývá dokázat, že jsou-li z_1, $z_2 \in W_2^1(\Omega)$ dvě neekvivalentní funkce, pro které platí (7.10), potom funkce u_1, $u_2 \in W_2^1(\Omega)$ splňující vztahy (7.11), (7.12) jsou ekvivalentní v prostoru $W_2^1(\Omega)$.

To je však snadné: Odečtením $(7.12)_1$ od $(7.12)_2$ dostaneme

$$a(u_2 - u_1, v) = 0 \quad \forall v \in V. \tag{7.21}$$

Z (7.11) plyne

$$(u_2 - z_2) - (u_1 - z_1) = (u_2 - u_1) - (z_2 - z_1) \in V. \tag{7.22}$$

Vzhledem k (7.10) platí $z_2 - z_1 \in V$, takže ze vztahu (7.22) plyne, že $u_2 - u_1 \in V$. V (7.21) můžeme tedy položit $v = u_2 - u_1$ a s pomocí (7.6) dostaneme

$$0 = a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \geq \beta \|u_2 - u_1\|_{1,\Omega}^2$$

čili

$$\|u_2 - u_1\|_{1,\Omega} = 0,$$

odkud $u_2 = u_1$ v prostoru $W_2^1(\Omega)$. $\square$

V následujícím lemmatu dokážeme, že podmínky kladené na funkce k_{ij}, f a q v Problému 6.2 postačují na splnění předpokladů (7.5) a (7.7) věty 7.3.

7.4. Lemma. *Nechť oblast Ω má lipschitzovskou hranici $\partial\Omega$. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ $(i,j = 1,2)$, $f \in L_2(\Omega)$ a $q \in L_2(\Gamma_2)$. Potom formy $a(v,w)$ a $L(v)$ dané vztahy (6.8) a (6.9) splňují (7.5) a (7.7), tj. platí pro ně*

$$|a(v,w)| \leq M\|v\|_{1,\Omega}\|w\|_{1,\Omega} \quad \forall v,w \in W_2^1(\Omega) \quad (M = \mathrm{const}),$$

$$|L(v)| \leq K\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \quad (K = \mathrm{const}),$$

kde konstanty K, M nezávisejí na funkcích v, w.

Důkaz. a) Z (6.8) a Schwarzovy nerovnosti (viz větu $\mathcal{P}$.15) plyne (symbol $\|v\|_{0,\Omega}$ znamená totéž, co $\|v\|_{L_2(\Omega)}$):

$$|a(v,w)| = \left| \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x \right| \leq \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \cdot \left| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right| \mathrm{d}x \leq$$

$$\le \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \sum_{i,j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega} =$$

$$= \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \left\{ \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} \right) \right\}.$$

Na každý z obou součtů v kulatých závorkách užijeme Cauchyovu nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}, \tag{7.23}$$

takže dostaneme (s použitím seminormy – viz definici 2.10)

$$|a(v,w)| \le 2 \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2} =$$

$$= 2 \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} |v|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega} \le M \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega},$$

kde jsme položili $M = 2 \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})}$.

b) Podle (6.9)

$$|L(v)| \le \left| \int_{\Omega} v f \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\Gamma_2} v q \, \mathrm{d}s \right|.$$

Pomocí Schwarzovy nerovnosti a "stopové" nerovnosti (2.13) dostaneme pro každé $v \in W_2^1(\Omega)$:

$$\left| \int_{\Omega} v f \, \mathrm{d}x \right| \le \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \le \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega},$$

$$\left| \int_{\Gamma_2} v q \, \mathrm{d}s \right| \le \|q\|_{L_2(\Gamma_2)} \|v\|_{L_2(\Gamma_2)} \le C \|q\|_{L_2(\Gamma_2)} \|v\|_{1,\Omega},$$

kde stopa γv je označena jednoduše symbolem v (viz Poznámku 2.5b). Tedy můžeme položit $K = \|f\|_{0,\Omega} + C\|q\|_{L_2(\Gamma_2)}$. $\square$

Poznamenejme, že předpoklad lipschitzovskosti hranice $\partial\Omega$ jsme potřebovali v části b) důkazu, když jsme užili "stopovou" nerovnost (2.13).

Následující lemma udává postačující podmínku pro platnost předpokladu (7.6) věty 7.3.

7.5. Lemma. *Nechť oblast Ω má lipschitzovskou hranici $\partial\Omega$. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ $(i,j = 1,2)$, $\mathrm{mes}_1 \Gamma_1 > 0$ a nechť*

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(x) \xi_i \xi_j \ge \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \tag{7.24}$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $\xi_1, \xi_2 \in R^1$, kde μ je kladná konstanta, která je nezávislá na reálných číslech ξ_1, ξ_2. Nechť bilineární forma $a(v, w)$ je dána vztahem (6.8). *Potom*

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V,$$

kde prostor V je dán vztahem (6.5) *a β je kladná konstanta nezávislá na $v \in V$.*

Důkaz. Položme $S = \Gamma_1$ ve Friedrichsově nerovnosti (2.25) a označme $C_0 := (K(\Omega, \Gamma_1))^{-1}$, kde $C_0 > 0$. Potom dostaneme

$$C_0 \|v\|_{1,\Omega}^2 \leq |v|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V, \tag{7.25}$$

V (7.24) položme $\xi_i = \partial v / \partial x_i$, kde $v \in V$. Integrací přes Ω dostaneme s pomocí (6.8) a (7.25):

$$a(v, v) \geq \mu |v|_{1,\Omega}^2 \geq \mu C_0 \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

Tedy $\beta = \mu C_0 > 0$. $\square$

7.6. Poznámka. Je-li podmínka (7.24) splněna, potom říkáme, že rovnice (6.1) je rovnoměrně eliptická v oblasti Ω. Konstanta μ obvykle závisí na funkcích k_{ij} a oblasti Ω. Je podstatné, že funkce k_{ij}, vystupující ve formulacích mnoha technických problémů, splňují podmínku (7.24).

S použitím podmínky (7.24) můžeme větu o existenci a jednoznačnosti řešení Problému 6.2 vyslovit takto:

7.7. Věta. *Jestliže funkce k_{ij} splňují podmínku* (7.24) *a* $\text{mes}_1 \Gamma_1 > 0$, *potom Problém* 6.2 *má právě jedno řešení $u \in W_2^1(\Omega)$.*

Důkaz. Předpoklady věty 7.7 spolu s předpoklady formulovanými v Problému 6.2 zaručují podle lemmat 7.4 a 7.5, že předpoklady věty 7.3 jsou splněny (s formami $a(v, w)$ a $L(v)$ definovanými pomocí vztahů (6.8) a (6.9)). $\square$

V následující větě si všimneme případu, kdy bilineární forma $a(v, w)$ je dána vztahem (6.20).

7.8. Věta. *Je-li bilineární forma $a(v, w)$ dána vztahem* (6.20), *přičemž*

$$k_0(x) \geq 0 \text{ téměř všude v } \Omega, \quad b(x) \geq 0 \text{ téměř všude na } \Gamma_3, \tag{7.26}$$

potom věta 7.7 *opět platí. Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek*

$$k_0(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (c_0 = \text{const}), \tag{7.27}$$

$$b(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall x \in \Gamma_3, \tag{7.28}$$

potom ve větě 7.7 *může být $\Gamma_1 = \emptyset$.*

Důkaz. Z (6.20) a (7.26) plyne

$$a(v, v) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega k_0 v^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} b v^2 \, \mathrm{d}s \geq \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x.$$

Odtud a z (7.24) (podobně jako v důkazu lemmatu 7.5) plyne podmínka (7.6) věty 7.3. Splnění předpokladů (7.5) a (7.7) o ohraničenosti forem $a(v, w)$ a $L(v)$ je zřejmé z předchozího výkladu.

Je-li splněna podmínka (7.27), potom podle (6.20)

$$a(v, v) \geq \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x + c_0 \int_{\Omega} v^2 \, \mathrm{d}x \geq$$

$$\geq \mu |v|_{1,\Omega}^2 + c_0 \|v\|_{0,\Omega}^2 \geq \min(\mu, c_0) \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in W_2^1(\Omega).$$

Je-li splněna podmínka (7.28), potom podle (6.20) a Friedrichsovy nerovnosti (2.26) opět platí $a(v, v) \geq \beta \|v\|_{1,\Omega}^2$ pro všechna $v \in W_2^1(\Omega)$, kde $\beta = \min(\mu, c_0)/K(\Omega, \Gamma_3)$.

Prozatím jsme nepožadovali, aby forma $a(v, w)$ byla symetrická, Tento požadavek vyslovíme až ve větě 7.9:

7.9. Věta (o minimu kvadratického funkcionálu). *Nechť bilineární forma $a(v, w)$, která vystupuje ve formulaci Problému* 6.2, *je symetrická, tj.*

$$a(v, w) = a(w, v) \quad \forall v, w \in W_2^1(\Omega). \tag{7.29}$$

Je-li dále V-eliptická (tj. platí (7.6)*), potom funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ je jediným řešením Problému* 6.2, *když a jen když ostře minimalizuje funkcionál*

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \tag{7.30}$$

na množině $z + V$, tj.

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in z + V, \tag{7.31}$$

kde znamení rovnosti platí pouze pro $v = u$ a kde $z + V$ je množina, která vznikne, když ke každému prvku z V přičteme konstantní prvek $z \in W_2^1(\Omega)$.

Důkaz. Množina $z + V$ může být psána ve tvaru

$$z + V = \{v \in W_2^1(\Omega) : \ v = u + \lambda w, \ \forall \lambda \in R^1, \ \forall w \in V\}, \tag{7.32}$$

kde $\gamma u = \gamma z$ na Γ_1. Nechť $v \in z + V$. Potom podle (7.30) platí

$$\Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) = \frac{1}{2} a(u + \lambda w, u + \lambda w) - L(u + \lambda w) -$$

$$-\frac{1}{2} a(u, u) + L(u) = \frac{\lambda}{2} a(u, w) + \frac{\lambda}{2} a(w, u) + \frac{\lambda^2}{2} a(w, w) - \lambda L(w) =$$

$$= \lambda [a(u, w) - L(w)] + \frac{\lambda^2}{2} a(w, w). \tag{7.33}$$

a) Nechť u je jediné řešení Problému 6.2. Potom podle (6.11) a (7.33) platí

$$\Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) = \frac{\lambda^2}{2} a(w, w).$$

Tento výsledek a V-eliptičnost formy $a(v,v)$ implikují, že funkce u ostře minimalizuje funkcionál $\Pi(v)$ na množině V.

b) Nyní dokážeme opačnou implikaci: Nechť funkce u ostře minimalizuje funkcionál $\Pi(v)$ na množině V. Jestliže existuje taková funkce $w_0 \in V$, že

$$a(u, w_0) \neq L(w_0), \tag{7.34}$$

potom, zvolíme-li $\lambda = -[a(u,w_0) - L(w_0)]/a(w_0,w_0)$, dostaneme z (7.33):

$$\Pi(u + \lambda w_0) - \Pi(u) = -[a(u,w_0) - L(w_0)]^2/[2a(w_0,w_0)] < 0,$$

protože podle (7.6) je $a(w_0,w_0) > 0$ (funkce w_0 nemůže být ekvivalentní nule - viz (7.34)). To je však spor s předpokladem, že platí (7.31). Tedy (7.34) nemůže platit, takže u splňuje (6.11), tj. u je jediné řešení Problému 6.2. $\square$

Poznamenejme, že podle (6.8), resp. (6.20) vztah (7.29) platí, když a jen když $k_{ij} = k_{ji}$.

Ve zbývající části této kapitoly uvedeme dva důsledky dosud neužitého vztahu (7.4) z Lax-Milgramova lemmatu. Symetričnost (7.29) opět nebudeme předpokládat.

7.10. Věta. *Pro řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2 platí*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C\big(\|f\|_{0,\Omega} + \|z\|_{1,\Omega} + \|q\|_{0,\Gamma_2}\big) \quad \forall v \in V. \tag{7.35}$$

Důkaz. Z (7.17) a (7.18) plyne

$$|F(v)| \leq |L(v)| + |a(z,v)| \quad \forall v \in V. \tag{7.36}$$

Z části b) důkazu lemmatu 7.4 dostáváme

$$|L(v)| \leq \big(\|f\|_{0,\Omega} + C_1\|q\|_{0,\Gamma_2}\big)\|v\|_{1,\Omega}, \tag{7.37}$$

kde C_1 je konstanta ze stopové nerovnosti. Z (7.36), (7.5) a (7.37) plyne

$$|F(v)| \leq \big(\|f\|_{0,\Omega} + C_1\|q\|_{0,\Gamma_2} + M\|z\|_{1,\Omega}\big)\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in V. \tag{7.38}$$

Z (7.38) dostáváme podle definice normy funkcionálu

$$\|F\|_* \leq \|f\|_{0,\Omega} + M\|z\|_{1,\Omega} + C_1\|q\|_{0,\Gamma_2}. \tag{7.39}$$

Podle (7.20) platí

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \|w\|_{1,\Omega} + \|z\|_{1,\Omega}, \tag{7.40}$$

kde podle (7.4)

$$\|w\|_{1,\Omega} \leq \frac{\|F\|_*}{\beta}.$$

Užitím této nerovnosti a nerovnosti a nerovnosti (7.39) dostaneme ze vztahu (7.40) odhad

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\beta}\|f\|_{0,\Omega} + \left(1 + \frac{M}{\beta}\right)\|z\|_{1,\Omega} + \frac{C_1}{\beta}\|q\|_{0,\Gamma_2}$$

a odtud odhad (7.35), kde $C = \max(1/\beta, 1 + M/\beta, C_1/\beta)$. $\square$

7.11. Věta (o spojité závislosti řešení na datech problému). *Nechť u, resp. $\widetilde{u}$ je řešení Problému 6.2 s daty f, z, q, resp. s daty $\widetilde{f}$, $\widetilde{z}$, $\widetilde{q}$. Potom platí*

$$\|u - \widetilde{u}\|_{1,\Omega} \leq C\big(\|f - \widetilde{f}\|_{0,\Omega} + \|z - \widetilde{z}\|_{1,\Omega} + \|q - \widetilde{q}\|_{0,\Gamma_2}\big), \tag{7.41}$$

kde konstanta C nezávisí na funkcích vystupujících v závorce.

Důkaz. Protože Problém 6.2 je lineární, je rozdíl $u - \widetilde{u}$ řešením Problému 6.2 s daty $f - \widetilde{f}$, $z - \widetilde{z}$ a $q - \widetilde{q}$. Nerovnost (7.41) tedy plyne z tvrzení (7.35) věty 7.10. □

Odhad (7.41) říká, že malá změna dat (měřená v příslušných normách) způsobí malou změnu řešení Problému 6.2 měřenou v normě prostoru $W_2^1(\Omega)$.

8. První konstrukce trojúhelníkových konečných prvků. Interpolační věty

Protože víme, že existuje právě jedno řešení Problému 6.2, můžeme začít přemýšlet o konstrukcích přibližných řešení tohoto problému. Základní myšlenka je jednoduchá a přímočará: aproximovat funkci z nějakou jednoduchou funkcí $z_h \in W_2^1(\Omega)$ a prostor V nějakým konečněrozměrným podprostorem V_h prostoru $W_2^1(\Omega)$ a pak najít takovou funkci

$$u_h \in z_h + V_h \equiv \{v \in W_2^1(\Omega) : \ v = z_h + w, \ w \in V_h\},$$

že platí

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h.$$

Tato myšlenka je základem *přibližných variačních metod* pro řešení Problému 6.2.

V tomto skriptu budou funkce z_h a prostory V_h konstruovány pomocí konečných prvků. V této kapitole popíšeme nejjednodušší konečné prvky a jejich vlastnosti. Nejprve budeme uvažovat pouze ohraničené dvojrozměrné oblasti s polygonální hranicí. V úvahách této kapitoly budou mít základní význam definice 1.15 a důsledek 1.16.

Triangulujme danou ohraničenou oblast Ω s polygonální hranicí $\partial\Omega$ podle definice 1.15. Nechť uzlové body $P_1, \ldots, P_m$ triangulace $\mathcal{T}$ jsou identické s vrcholy trojúhelníků z $\mathcal{T}$ (viz Obr. 8.1, kde Ω je obdélník a $m = 20$).

V každém uzlovém bodě P_i zvolme reálné číslo a označme je symbolem $v(P_i)$. Na každém trojúhelníku z $\mathcal{T}$ uvažujme lineární funkci, která je jednoznačně určena hodnotami $v(P_r)$, $v(P_s)$, $v(P_t)$ předepsanými ve vrcholech P_r, P_s, P_t trojúhelníku. Tímto způsobem zkonstruujeme funkci $v(x_1, x_2)$, která je spojitá na $\overline{\Omega}$, lineární na každém trojúhelníku z $\mathcal{T}$ a jednoznačně určena parametry $v(P_1), \ldots, v(P_m)$. Podle důsledku 1.16 platí, že $v \in W_2^1(\Omega)$.

Množina všech těchto funkcí je m-rozměrný prostor

$$X_{\mathcal{T}}^{(1)} \subset W_2^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}). \tag{8.1}$$

Obr. 8.1

Dolní index $\mathcal{T}$ označuje triangulaci, na které byl prostor $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$ konstruován; horní index v závorce označuje stupeň polynomu, který byl užit při konstrukci $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$. Symbol $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$ je speciálním případem symbolu $X_{\mathcal{T}}^{(n)}$.

Říkáme také, že prostor $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$ byl konstruován pomocí konečných prvků tohoto typu: trojúhelníkový prvek s polynomem prvního stupně, který je jednoznačně určen funkčními hodnotami předepsanými ve vrcholech trojúhelníku.

Hovoříme-li tedy o libovolném konečném prvku, musí být definovány následující tři vlastnosti:

(1) geometrický tvar prvku

(2) typ funkce

(3) parametry

Vlastnosti (2) a (3) uvažované dohromady se nazývají *násada*. Výraz "parametry" ve vlastnosti (3) znamená parametry, které jednoznačně určují funkci, jejíž typ je dán ve vlastnosti (2).

Např. v případě prostoru $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$ máme:

(1) trojúhelník

(2) lineární polynom

(3) funkční hodnoty ve vrcholech

V kapitole 9 uvidíme, že prostor $X_{\mathcal{T}}^{(2)}$ je konstruován konečnými prvky tohoto typu:

(1) trojúhelník

(2) kvadratický polynom

(3) funkční hodnoty ve vrcholech a půlicích bodech stran

V případě $n = 3$ je více možností; jedna z nich je konstruovat prostor $X_{\mathcal{T}}^{(3)}$ konečnými prvky tohoto typu:

(1) trojúhelník

(2) kubický polynom

(3) funkční hodnoty ve vrcholech, těžišti a bodech, které dělí strany na třetiny.

V kapitole 9 uvidíme, že pro $n = 2, 3$ je splněna inkluse analogická inklusi (8.1):

$$X_T^{(n)} \subset W_2^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}). \tag{8.2}$$

Na Obr. 8.2 jsou právě popsané tři konečné prvky znázorněny. Případ $n = 4$ bude použit v kapitole 9. Tučné body na těchto obrázcích znamenají jednak uzlové body a jednak skutečnost, že v těchto bodech předepisujeme funkční hodnoty.

Obr. 8.2

Tyto čtyři konečné prvky jsou prvními čtyřmi členy posloupnosti konečných prvků, kde v případě n-tého členu jsou uzlové body uspořádány na trojúhelníku jako prvních N čísel v Pascalově trojúhelníku, kde

$$N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \tag{8.3}$$

Nyní pro tyto konečné prvky uvedeme interpolační teorém, který hraje významnou roli v důkazech konvergence metody konečných prvků a v odhadech chyb. Pro lepší orientaci začneme případem $n = 1$:

8.1. Věta (interpolační teorém v případě n = 1). *Nechť $u \in W_2^2(T)$ a nechť u_I je lineární polynom, pro který platí*

$$u_I(P_i) = u(P_i) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{8.4}$$

kde P_1, P_2, P_3 jsou vrcholy trojúhelníka $\overline{T}$. Potom platí

$$\|u - u_I\|_{j,T} \le \frac{C}{(\sin\vartheta_T)^j}\, h_T^{2-j} |u|_{2,T} \quad (j = 0, 1, 2), \tag{8.5}$$

kde h_T je délka největší strany trojúhelníka $\overline{T}$, ϑ_T je nejmenší úhel trojúhelníka $\overline{T}$ a kde konstanta C nezávisí na h_T, ϑ_T a u.

8.2. Věta (interpolační teorém v obecném případě). *Nechť $u \in W_2^{n+1}(T)$ a nechť $u_I \in \mathcal{P}_2(n)$ je polynom, pro který platí*

$$u_I(P_i) = u(P_i) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{8.6}$$

kde N je dáno vztahem (8.3) a $P_1, \dots, P_N$ jsou uzlové body na trojúhelníku $\overline{T}$ (viz Obr. 8.2). Potom platí

$$\|u - u_I\|_{j,T} \le \frac{C}{(\sin\vartheta_T)^j}\, h_T^{n+1-j} |u|_{n+1,T} \quad (j = 0, 1 \dots, n+1), \tag{8.7}$$

kde h_T je délka největší strany trojúhelníka $\overline{T}$, ϑ_T je nejmenší úhel trojúhelníka $\overline{T}$ a kde konstanta C nezávisí na h_T, ϑ_T a u.

Věta 8.1 je speciálním případem věty 8.2, která bude dokázána v kapitole 15. Zde pouze upozorňujeme, že počet uzlových bodů daný vztahem (8.3) je roven počtu koeficientů a_i polynomu dvou proměnných n-tého stupně,

$$p(x_1, x_2) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_1^2 \cdots + a_N x_2^n,$$

takže vztah (8.6) má smysl.

Abychom eliminovali z našich úvah závislost pravé strany (8.5), resp. (8.7) na $(\sin\vartheta_T)^{-j}$, budeme uvažovat pouze množinu triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$, $h \in (0;1)$, jejíž každý člen $\mathcal{T}_h$ splňuje podmínku

$$\vartheta_h \geq \vartheta_0 > 0 \quad \forall h \in (0;1), \tag{8.8}$$

kde

$$\vartheta_h := \min_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \vartheta_T \,. \tag{8.9}$$

Podmínka vyjádřená vztahy (8.8), (8.9) se nazývá *podmínka minimálního úhlu* (the minimum angle condition). Protože

$$(\sin\vartheta_T)^{-j} \leq (\sin\vartheta_0)^{-j} \leq (\sin\vartheta_0)^{-n-1},$$

můžeme výraz $(\sin\vartheta_0)^{-n-1}$ zahrnout do konstanty C a místo (8.7) psát

$$\|u - u_I\|_{j,T} \leq C h_T^{n+1-j} |u|_{n+1,T} \quad (j = 0, 1 \ldots, n+1), \tag{8.10}$$

kde konstanta C nezávisí na u, h_T a $\overline{T}$.

Kromě parametru ϑ_h přiřadíme každé triangulaci $\mathcal{T}_h$ parametr

$$h := \max_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} h_T \,. \tag{8.11}$$

Symbol h má tak dva významy: jednak je to index u $\mathcal{T}_h$, jednak má význam daný vztahem (8.11). To však nepovede k nedorozumění.

8.3. Označení. Prostor $X_{\mathcal{T}_h}^{(n)}$ bude stručně označován symbolem $X_h^{(n)}$. Symbol $I_h^{(n)} u$ bude značit interpolant funkce $u \in C^0(\overline{\Omega})$ v prostoru $X_h^{(n)}$, tj. funkci z $X_h^{(n)}$, která je na každém trojúhelníku $\overline{T}_j \in \mathcal{T}_h$ interpolačním polynomem z $\mathcal{P}_2(n)$ funkce u; tedy platí

$$(I_h^{(n)} u)(P_i^j) = u(P_i^j) \quad (i = 1, \ldots, N;\ \overline{T}_j \in \mathcal{T}_h), \tag{8.12}$$

kde $P_1^j, \ldots, P_N^j$ jsou uzlové body na trojúhelníku $\overline{T}_j$ (viz Obr. 8.3, kde $N = 6$).

Obr. 8.3

8.4. Věta. *Nechť $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Nechť $I_h^{(n)} u \in X_h^{(n)}$ je interpolant funkce $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$. Nechť množina triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$ splňuje podmínku minimálního úhlu. Potom platí*

$$\|u - I_h^{(n)} u\|_{s,\Omega} \leq C h^{n+1-s} |u|_{n+1,\Omega} \quad (s = 0, 1), \tag{8.13}$$

kde konstanta C nezávisí na h a u.

Důkaz. Podle definice 1.15, věty 8.2 a vztahu (8.11) platí

$$\|u - I_h^{(n)} u\|_{s,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{p} \|u - u_I\|_{s,T_k}^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^{p} h_{T_k}^{2(n+1-s)} |u|_{n+1,T_k}^2 \leq$$

$$\leq C^2 h^{2(n+1-s)} \sum_{k=1}^{p} |u|_{n+1,T_k}^2 = C^2 h^{2(n+1-s)} |u|_{n+1,\Omega}^2 . \tag{8.14}$$

Odmocněním nerovnosti (8.14) dostaneme odhad (8.13). (Je třeba poznamenat, že s může v (8.13) nabývat pouze hodnot 0 a 1, protože podle důsledku 1.16 máme pouze zaručeno, že $I_h^{(n)} u \in W_2^1(\Omega)$). $\square$

Ve vztahu (8.12) a na Obr. 8.3 vystupuje tzv. *lokální značení* uzlových bodů.

9. Konečněprvkové prostory $X_h^{(n)}$

V této kapitole bude vhodnější užívat značení

$$x := x_1, \quad y := x_2 .$$

Budeme uvažovat libovolnou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$ ohraničené oblasti $\Omega \subset R^2$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Zvolme přirozené číslo n a na každém trojúhelníku $\overline{T}_i \in \mathcal{T}_h$ zvolme N uzlových bodů způsobem popsaným v kapitole 8, kde N je dáno vztahem (8.3).

9.1. Lemma. a) *Mají-li trojúhelníky* $\overline{T}_i$, $\overline{T}_j \in \mathcal{T}_h$ *společnou stranu* l, *potom uzlové body trojúhelníka* $\overline{T}_i$, *které leží na* l, *jsou totožné s uzlovými body trojúhelníka* $\overline{T}_j$, *které leží na* l.

b) *Celkový počet* ϱ *uzlových bodů v triangulaci* $\mathcal{T}_h$ *je dán vztahem*

$$\varrho = \varrho_v + (n-1)\varrho_s + (N-3n)\varrho_t\,, \tag{9.1}$$

kde ϱ_v *je celkový počet vrcholů,* ϱ_s *celkový počet stran a* ϱ_t *celkový počet trojúhelníků v triangulaci* $\mathcal{T}_h$. *V případě vrcholů a stran se každý vrchol a každá strana bere pouze jednou (ne tedy tolikrát, kolika trojúhelníkům náleží).*

Důkaz. a) Uzlové body, které leží na straně trojúhelníka $\overline{T}$, dělí tuto stranu na n částí stejné délky. Odtud plyne tvrzení a).

b) Celkový počet uzlových bodů ležících uvnitř jedné strany každého trojúhelníka $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ je roven $n-1$. Tedy celkový počet uzlových bodů ležících na hranici ∂T trojúhelníka $\overline{T}$ je $3 + 3(n-1) = 3n$. Tedy ve vnitřku T trojúhelníka $\overline{T}$ leží $N - 3n$ uzlových bodů. Z těchto skutečností plyne vztah (9.1). $\square$

Pro naše další úvahy označíme uzlové body triangulace $\mathcal{T}_h$ (prozatím libovolně zvoleným způsobem) symboly $P_1, P_2, \ldots, P_\varrho$ (tzv. *globální značení* uzlových bodů na rozdíl od lokálního značení ve vztahu (8.12) a Obr. 8.3).

9.2. Lemma. *Nechť* P *je libovolný bod strany* $l \equiv \overline{P_jP_k}$ *trojúhelníka* $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. *Hodnota* $p_n(P)$ *polynomu* $p_n(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$ *je jednoznačně určena jeho hodnotami v* $n+1$ *uzlových bodech, které leží na straně* l.

Důkaz. Nechť $P_j = [x_j, y_j]$, $P_k = [x_k, y_k]$. Zvolme parametrické vyjádření úsečky l ve tvaru

$$x = x_j + (x_k - x_j)s, \quad y = y_j + (y_k - y_j)s, \quad 0 \le s \le 1$$

a definujme polynom $\hat{p}_n(s) \in \mathcal{P}_1(n)$ vztahem

$$\hat{p}_n(s) = p_n(x_j + (x_k - x_j)s, y_j + (y_k - y_j)s).$$

Z teorie Lagrangeových interpolačních polynomů jedné proměnné plyne, že polynom $\hat{p}_n(s)$ je jednoznačně určen $n+1$ hodnotami

$$\hat{p}_n\Big(\frac{i}{n}\Big) = p_n\Big(x_j + (x_k - x_j)\frac{i}{n}, y_j + (y_k - y_j)\frac{i}{n}\Big) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Hodnoty na pravé straně jsou hodnoty polynomu $p_n(x,y)$ v $n+1$ uzlových bodech ležících na straně $l = \overline{P_jP_k}$. Protože můžeme pro každé $P \in l$ nalézt právě jedno $s \in \langle 0; 1\rangle$, které koresponduje bodu P, je důkaz ukončen. $\square$

Lemma 9.2 užijeme k důkazu prvních dvou vět této kapitoly. K důkazu první z nich potřebujeme ještě jedno lemma:

9.3. Lemma. *Nechť polynom $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$ je roven nule na úsečce $l = \overline{P_j P_k}$ kde $P_j = [x_j, y_j]$, $P_k = [x_k, y_k]$ (nebo, což je totéž, nechť je roven nule na přímce určené body P_j, P_k). Potom platí*

$$p(x,y) = f_{jk}(x,y) q_{n-1}(x,y) \quad \forall [x,y] \in R^2, \tag{9.2}$$

kde $q_{n-1} \in \mathcal{P}_2(n-1)$ a $f_{jk}(x,y)$ je lineární funkce daná vztahem

$$f_{jk}(x,y) = -(y_k - y_j)(x - x_j) + (x_k - x_j)(y - y_j). \tag{9.3}$$

Lemma 9.3 je speciálním případem lemmatu 18.3, které dokážeme později. Poznamenáváme, že rovnici přímky určené body P_j, P_k lze napsat ve tvaru $f_{jk}(x,y) = 0$.

9.4. Věta. *Nechť $u \in C^0(\overline{T})$, kde $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Potom existuje právě jeden polynom $u_I \in \mathcal{P}_2(n)$, pro který platí*

$$u_I(P_i^T) = u(P_i^T) \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{9.4}$$

kde $N = (n+1)(n+2)/2$ a uzlové body $P_1^T, \ldots, P_N^T$ jsou zvoleny na trojúhelníku $\overline{T}$ způsobem popsaným v kapitole 8.

Důkaz. Polynom u_I lze psát obecně ve tvaru

$$u_I(x,y) = \sum_{t=0}^{n} \sum_{r+s=t} a_{rs}^{(t)} x^r y^s \,. \tag{9.5}$$

Dosadíme-li (9.5) do (9.4), dostaneme N lineárních algebraických rovnic pro N koeficientů $a_{rs}^{(t)}$. Stačí dokázat, že determinant této soustavy rovnic je různý od nuly. Jinými slovy stačí dokázat, že homogenní soustava

$$u_I(P_i^T) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{9.6}$$

má pouze nulové řešení $a_{rs}^{(t)} = 0$, tj. $u_I(x,y) \equiv 0$.

Nechť P_1, P_2, P_3 jsou vrcholy $\overline{T}$. Trojím užitím lemmat 9.2 a 9.3 z (9.6) plyne, že polynom $u_I(x,y)$ je dělitelný kubickým polynomem $f(x,y)$, kde

$$f(x,y) := f_{12}(x,y) f_{13}(x,y) f_{23}(x,y) \,. \tag{9.7}$$

Pro $n = 1$ a $n = 2$ je to jedině možné, když $u_I(x,y) \equiv 0$. V případě $n = 3$ dostáváme

$$u_I(x,y) = K f(x,y) \,. \tag{9.8}$$

Protože $P_0 \notin \partial T$, kde P_0 je těžiště $\overline{T}$, je $f(P_0) \neq 0$. Tedy z (9.8) a $u_I(P_0) = 0$ plyne, že $K = 0$. Tedy podle (9.8) je $u_I(x,y) \equiv 0$.

V případě $n = 4$ z (9.6) a lemmat 9.2 a 9.3 dostaneme

$$u_I(x,y) = f(x,y) q_1(x,y), \tag{9.9}$$

kde $q_1 \in \mathcal{P}_2(1)$. Doposud jsme nevyužili toho, že

$$u_I(Q_1) = u_I(Q_2) = u_I(Q_3) = 0\,, \tag{9.10}$$

kde Q_1, Q_2, Q_3 jsou tři uzlové body, které leží ve vnitřku T trojúhelníka $\overline{T}$ (viz Obr. 8.2 pro $n = 4$). Protože $f(Q_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), z (9.9) a (9.10) plyne, že $q_1(Q_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3$). To však znamená, že $q_1(x, y) \equiv 0$. Z (9.9) pak plyne $u_I(x, y) \equiv 0$.

V obecném případě dokážeme větu matematickou indukcí. První krok již byl učiněn. Nyní předpokládáme, že implikace

$$(9.6) \quad \Rightarrow \quad u_I(x, y) \equiv 0$$

platí pro $u_I \in \mathcal{P}_2(k)$, kde $k = 1, \ldots, n-1$ ($n > 4$). Z (9.6) a lemmat 9.2 a 9.3 dostaneme

$$u_I(x, y) = f(x, y) q_{n-3}(x, y)\,. \tag{9.11}$$

Ve vnitřku T trojúhelníku $\overline{T}$ leží nyní M uzlových bodů, kde

$$M = \frac{1}{2}(n - 3 + 1)(n - 3 + 2) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1);$$

tyto uzlové body jsou uspořádány tak jako uzlové body polynomu $q_{n-3} \in \mathcal{P}_2(n-3)$. Označíme je $Q_1, \ldots, Q_M$. Podle (9.6) platí

$$u_I(Q_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, M). \tag{9.12}$$

Protože $Q_1, \ldots, Q_M$ neleží na ∂T, platí $f(Q_i) \neq 0$ ($i = 1, \ldots, M$). Z (9.11) a (9.12) pak plyne, že

$$q_{n-3}(Q_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, M). \tag{9.13}$$

Podle indukčního předpokladu vztah (9.13) implikuje $q_{n-3}(x, y) \equiv 0$. Tento výsledek spolu s (9.11) dává $u_I(x, y) \equiv 0$. $\square$

9.5. Věta. *Nechť $\mathcal{T}_h$ je libovolná triangulace uzavřené ohraničené dvojrozměrné oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Zvolme přirozené n a na každém trojúhelníku $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ zadejme N uzlových bodů způsobem, který je popsán v kapitole* 8 *(číslo N je dáno vztahem* (8.3)*). Nechť $P_1, \ldots, P_\varrho$, kde ϱ je dáno vztahem* (9.1)*, je nějaké globální značení uzlových bodů triangulace $\mathcal{T}_h$. Zadejme v těchto uzlových bodech reálná čísla $v(P_1), \ldots, v(P_\varrho)$. Potom*

a) funkce $v(x, y)$, která je na každém trojúhelníku $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ polynomem z $\mathcal{P}_T(n)$ jednoznačně určeným parametry $v(P_i)$, kde $P_i \in \overline{T}$, náleží do prostoru $C^0(\overline{\Omega})$ funkcí spojitých na $\overline{\Omega}$;

b) množina všech funkcí $v(x, y)$ popsaných v tvrzení a) je ϱ-dimensionální prostor, který označíme $X_h^{(n)}$.

Důkaz. a) Jednoznačné určení polynomu $v\big|_{\overline{T}}$ parametry $v(P_i)$, kde $P_i \in \overline{T}$, plyne z věty 9.4. Tvrzení, že $v \in C^0(\overline{\Omega})$, plyne z lemmatu 9.2 a z vlastností každé triangulace (viz definici 1.15).

b) Toto tvrzení je evidentní. $\square$

9.6. Poznámka. Konečnědimensionální prostor $X_h^{(n)}$ z věty 9.5 je totožný s prostorem $X_h^{(n)}$ (čili $X_{\mathcal{T}_h}^{(n)}$) zavedeným v kapitole 8.

9.7. Věta. *Interpolační polynom $u_I(x,y)$ z věty 9.4 může být psán ve tvaru*

$$u_I(x,y) = \sum_{i=1}^{N} u(P_i^T)\psi_i^T(x,y), \tag{9.14}$$

kde $\psi_i^T(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$ je polynom jednoznačně určený podmínkami

$$\psi_i^T(P_j^T) = \delta_{ij} \quad (j = 1, \dots, N); \tag{9.15}$$

symbol δ_{ij} má jako obvykle význam Kroneckerova delta.

Důkaz. Z věty 9.4 plyne, že pro každé $i = 1, \dots, N$ existuje právě jeden polynom $\psi_i^T \in \mathcal{P}_2(n)$ s vlastnostmi (9.15). Tedy existuje právě jeden polynom náležející do $\mathcal{P}_2(n)$, který může být psán ve tvaru pravé strany vztahu (9.14). Vztahy (9.15) implikují, že polynom (9.14) splňuje podmínky (9.4). $\square$

9.8. Věta. *Nechť jsou splněny tytéž předpoklady jako ve větě 9.5. Nechť $\varphi_i(x,y)$ $(i = 1, \dots \varrho)$ jsou funkce z prostoru $X_h^{(n)}$, pro které*

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, \varrho). \tag{9.16}$$

Potom každá funkce $v \in X_h^{(n)}$ může být psána ve tvaru

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{\varrho} v(P_i)\varphi_i(x,y); \tag{9.17}$$

množina $\{\varphi_1(x,y), \dots, \varphi_\varrho(x,y)\}$ je báze ϱ-dimensionálního prostoru $X_h^{(n)}$ a funkční hodnoty $v(P_1), \dots, v(P_\varrho)$ jsou souřadnice funkce $v(x,y)$ při této bázi.

Důkaz. Protože $X_h^{(n)}$ je lineární prostor, náleží každá lineární kombinace funkcí $\varphi_1(x,y), \dots, \varphi_\varrho(x,y)$ do $X_h^{(n)}$. Tedy pravá strana vztahu (9.17) náleží do $X_h^{(n)}$.

Pro restrikci $v\,\big|_{\overline{T}}$ funkce $v \in X_h^{(n)}$ na trojúhelník $\overline{T}$ platí

$$v\,\big|_{\overline{T}}(x,y) = \sum_{i=1}^{\varrho} v(P_i)\varphi_i\,\big|_{\overline{T}}(x,y), \quad [x,y] \in \overline{T}. \tag{9.18}$$

Protože uzlové body $P_i \in \overline{T}$ mají lokální značení $P_1^T, \dots, P_N^T$, lze vztah (9.18) přepsat na tvar

$$v\,\big|_{\overline{T}}(x,y) = \sum_{j=1}^{N} v(P_j^T)\psi_j^T(x,y), \quad [x,y] \in \overline{T}. \tag{9.19}$$

Podle věty 9.7 je tedy $v\,\big|_{\overline{T}} \in \mathcal{P}_T(n)$, což jsme potřebovali dokázat. Tvrzení o bázi je evidentní. $\square$

9.9. Poznámka. Z definice prostoru $X_h^{(n)}$ plyne, že funkce $\varphi_i(x,y)$ je různá od nuly pouze na trojúhelnících, které mají uzlový bod P_i společný (buď jako společný vrchol, nebo jako bod na společné straně). V případě $n = 1$ je grafem funkce $\varphi_i(x,y)$ pyramida o výšce rovné jedné, resp. část pyramidy, leží-li P_i na hranici $\partial\Omega$.

10. Definice přibližného řešení. Věta o existenci a jednoznačnosti přibližného řešení

Kromě požadavků kladených na triangulaci (viz definici 1.15) budeme požadovat, aby každá triangulace $\mathcal{T}_h$ byla konzistentní s hranicí $\partial\Omega$ oblasti Ω:

10.1. Definice. Říkáme, že triangulace $\mathcal{T}_h$ je konzistentní s hranicí $\partial\Omega$, jestliže každý trojúhelník $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$, který splňuje podmínku $\mathrm{mes}_1(\partial T \cap \Gamma_1) > 0$, nemá žádný společný bod s Γ_2.

Konečněprvkovou aproximaci prostoru V (viz (6.5)) budeme definovat vztahem

$$V_h^{(n)} = \{v \in X_h^{(n)} : v = 0 \text{ na } \overline{\Gamma}_1\} \equiv \{v \in X_h^{(n)} : v(P_i) = 0 \ \forall P_i \in \overline{\Gamma}_1\}, \tag{10.1}$$

kde P_i $(i = 1, \ldots, \varrho)$ jsou uzlové body $\mathcal{T}_h$. Protože $X_h^{(n)} \subset W_2^1(\Omega)$, platí

$$V_h^{(n)} \subset V. \tag{10.2}$$

Pro větší jednoduchost budeme předpokládat, že

$$\overline{u} \equiv \gamma z \in C^0(\overline{S}_j) \quad (j = 1, \ldots, r), \tag{10.3}$$

kde $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_r$ jsou disjunktní části $\overline{\Gamma}_1$, jejichž sjednocení je $\overline{\Gamma}_1$. V tomto případě lze definovat konečněprvkovou aproximaci množiny $z + V$ vztahem

$$W_h^{(n)} = \{v \in X_h^{(n)} : v(P_i) = \overline{u}(P_i) \ \forall P_i \in \overline{\Gamma}_1\}. \tag{10.4}$$

Nyní jsme připraveni definovat přibližné řešení Problému 6.2 pomocí metody konečných prvků v případě oblasti Ω s polygonální hranicí $\partial\Omega$:

10.2. Definice. Přibližné řešení $u_h^{(n)}$ Problému 6.2 je definováno jako řešení tohoto problému: Najít takovou funkci $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, že

$$a(u_h^{(n)}, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h^{(n)}. \tag{10.5}$$

10.3. Věta (o existenci a jednoznačnosti přibližného řešení). *Nechť bilineární forma $a(v, w)$ je V-eliptická. Potom problém formulovaný v definici* 10.2 *má právě jedno řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$.*

Důkaz. V kapitole 12 uvidíme, že (10.5) není nic jiného než soustava lineárních algebraických rovnic pro parametry $u_h^{(n)}(P_i)$ (kde $i \in \{1, \ldots, \varrho\}$ a $P_i \notin \overline{\Gamma}_1$), které jednoznačně určují spolu s parametry $u_h^{(n)}(P_j) = \overline{u}(P_j)$ $(P_j \in \overline{\Gamma}_1)$ funkci $u_h^{(n)}(x, y)$ ve tvaru (9.17), tj.

$$u_h^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\varrho} u_h^{(n)}(P_i)\varphi_i(x, y). \tag{10.6}$$

Tedy stačí dokázat, že determinant příslušné soustavy lineárních algebraických rovnic je různý od nuly. Jinými slovy, stačí dokázat jednoznačnost problému (10.5).

Předpokládejme, že kromě funkce $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, která splňuje (10.5), existuje funkce $\widetilde{u}_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ tak, že

$$a(\widetilde{u}_h^{(n)}, v) = L(v) \quad \forall \in V_h^{(n)}. \tag{10.7}$$

Odečteme-li (10.7) od (10.5), dostaneme vzhledem k tomu, že forma $a(v,w)$ je bilineární,

$$a(u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}, v) = 0 \quad \forall v \in V_h^{(n)}. \tag{10.8}$$

Ze vztahů (10.1) a (10.4) plyne, že $u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)} \in V_h^{(n)}$. Tedy ve vztahu (10.8) můžeme položit $v = u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}$. Užijeme-li navíc V-eliptičnost formy $a(v,w)$ (viz (7.6)), dostaneme vzhledem k (10.2)

$$0 = a(u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}, u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}) \geq \beta \|u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}\|_{1,\Omega}^2 .$$

Odtud plyne, že $\widetilde{u}_h^{(n)} = u_h^{(n)}$ téměř všude v Ω. $\square$

10.4. Poznámka. Nechť platí předpoklady věty 7.9. Z důkazu této věty snadno vidíme, že $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ splňuje vztah (10.5), když a jen když $u_h^{(n)}$ ostře minimalizuje kvadratický funkcionál $\Pi(v)$ na $W_h^{(n)}$.

11. Konvergence přibližných řešení

V celé kapitole předpokládáme, že oblast Ω má polygonální hranici $\partial\Omega$. Začneme s abstraktním odhadem chyby:

11.1. Věta (abstraktní odhad chyby). *Nechť $u \in W_2^1(\Omega)$ je řešení Problému 6.2, ve kterém vystupuje V-eliptická a ohraničená bilineární forma $a(v,w)$. Potom platí*

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v \in W_h^{(n)}} \|u - v\|_{1,\Omega}, \tag{11.1}$$

kde C je konstanta nezávislá na h, u a v.

Důkaz. Zvolme $v \in W_h^{(n)}$ libovolně. Podle (10.1) a (10.4) platí, že $u_h^{(n)} - v \in V_h^{(n)}$. Užitím (10.2) a (7.6) a pak (6.5) a (6.11) postupně dostaneme

$$\beta \|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_h^{(n)} - v, u_h^{(n)} - v) = a(u_h^{(n)}, u_h^{(n)} - v) - a(v, u_h^{(n)} - v) =$$

$$= L(u_h^{(n)} - v) - a(v, u_h^{(n)} - v) = a(u, u_h^{(n)} - v) - a(v, u_h^{(n)} - v) =$$

$$= a(u - v, u_h^{(n)} - v). \tag{11.2}$$

Předpoklady Problému 6.2 nám dovolují užít Lemma 7.4. Tedy platí

$$|a(u - v, u_h^{(n)} - v)| \leq M \|u - v\|_{1,\Omega} \|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}. \tag{11.3}$$

Zkombinujeme-li (11.2) a (11.3) a výsledek podělíme výrazem $\beta\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}$, dostaneme za předpokladu, že $\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} > 0$,

$$\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} \leq \frac{M}{\beta}\|u - v\|_{1,\Omega}. \tag{11.4}$$

Tato nerovnost spolu s trojúhelníkovou nerovností

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq \|u - v\|_{1,\Omega} + \|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} \tag{11.5}$$

implikuje

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq \left(1 + \frac{M}{\beta}\right)\|u - v\|_{1,\Omega}. \tag{11.6}$$

Pokud $\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} = 0$, potom (11.4) platí bez úvah spojených s (11.2) a (11.3), takže s pomocí (11.5) opět dostaneme (11.6).

Přejdeme-li v (11.6) k infimu vzhledem k $v \in W_h^{(n)}$, dostaneme (11.1), kde $C = 1 + M/\beta$. $\square$

Věta 11.1 má dva důležité důsledky:

11.2. Věta (o maximální rychlosti konvergence). *Nechť $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Nechť bilineární forma $a(v, w)$ je V-eliptická a ohraničená a nechť $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$, kde u je řešení Problému* 6.2. *Nechť množina triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$, kde $h \in (0; 1)$, splňuje podmínku minimálního úhlu* (*viz* (8.8), (8.9)). *Potom*

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq Ch^n|u|_{n+1,\Omega} \quad \forall h \in (0; 1), \tag{11.7}$$

kde konstanta C nezávisí na h a u.

Důkaz. Protože $I_h^n u \in W_h^{(n)}$, vztah (11.1) implikuje

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq C\|u - I_h^n u\|_{1,\Omega}.$$

Vztah (11.7) nyní plyne z věty 8.4 (vztah (8.13), kde $s = 1$). $\square$

11.3. Věta (obecná věta o konvergenci metody konečných prvků). *Nechť ohraničená oblast $\Omega \subset R^2$ má polygonální hranici $\partial\Omega$. Nechť množina triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$, kde $h \in (0; 1)$, splňuje podmínku minimálního úhlu. Nechť funkce $\overline{u}$ z okrajové podmínky* (6.2) *je taková, že existuje funkce $z \in W_2^2(\Omega)$ splňující vztah $\gamma z = \overline{u}$ na $\overline{\Gamma}_1$. Nechť jsou splněny předpoklady věty* 7.3 *o existenci a jednoznačnosti řešení variačního problému* 6.2. *Potom*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} = 0, \tag{11.8}$$

kde $u \in W_2^1(\Omega)$ je řešení variačního Problému 6.2.

Vzhledem k větší komplikovanosti důkaz věty 11.3 zde neuvádíme (viz [Že2, str. 65 - 67).

Věta 11.3 zaručuje konvergenci metody konečných prvků za podmínek, které stačí k existenci a jednoznačnosti přesného řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2. Je-li navíc přesné řešení dostatečně hladké, tj. $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$, kde $n \geq 1$, potom věta 11.2 zaručuje rychlost konvergence $O(h^2)$, je-li konečněprvková násada z $\mathcal{P}_2(n)$.

12. Přibližné řešení $u_h^{(n)}$ je řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

Nechť ϱ je celkový počet uzlových bodů v dané triangulaci $\mathcal{T}_h$ polygonální oblasti Ω a nechť r je počet uzlových bodů, které neleží na $\overline{\Gamma}_1$. Pro větší jednoduchost dalšího zápisu označme symboly $P_1, \ldots, P_r$ uzlové body, které neleží na $\overline{\Gamma}_1$; uzlové body ležící na $\overline{\Gamma}_1$ jsou tedy označeny symboly $P_{r+1}, \ldots, P_\varrho$. Kromě této podmínky může být způsob číslování uzlových bodů libovolný.

Prozatím neznáme funkční hodnoty přibližného řešení $u_h^{(n)}(x,y)$ v uzlových bodech $P_1, \ldots, P_r$; označme je proto symboly $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Protože $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, platí podle (10.4)

$$u_h^{(n)}(P_k) = \overline{u}(P_k) \quad \forall P_k \in \overline{\Gamma}_1, \tag{12.1}$$

takže podle věty 9.8 (vztah (9.17)) můžeme psát

$$u_h^{(n)}(x,y) = \sum_{j=1}^{r} \omega_j \varphi_j(x,y) + \sum_{k=r+1}^{\varrho} \overline{u}(P_k) \varphi_k(x,y)\,. \tag{12.2}$$

Vztahy (10.1) a (9.16) dávají

$$\varphi_i(x,y) \in V_h^{(n)} \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{12.3}$$

Dosaďme (12.2) do (10.5), tj. do vztahu

$$a(u_h^{(n)}, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h^{(n)},$$

a položme $v = \varphi_i$ $(1 \le i \le r)$, což jsme vzhledem k (12.3) oprávněni. Dostaneme

$$\sum_{j=1}^{r} a(\varphi_j, \varphi_i)\omega_j = L(\varphi_i) - \sum_{k=r+1}^{\varrho} a(\varphi_k, \varphi_i)\overline{u}(P_k) \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{12.4}$$

Jestliže bilineární forma $a(v,w)$ je symetrická, potom

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

a vztahy (12.4) mohou být psány také ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{r} a(\varphi_i, \varphi_j)\omega_j = L(\varphi_i) - \sum_{k=r+1}^{\varrho} a(\varphi_i, \varphi_k)\overline{u}(P_k) \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{12.5}$$

V obou případech (12.4) a (12.5) jsme získali soustavu r lineárních algebraických rovnic pro r neznámých $\omega_1, \ldots, \omega_r$; v prvním případě s nesymetrickou maticí $\{a(\varphi_j, \varphi_i)\}$; v druhém případě se symetrickou maticí $\{a(\varphi_i, \varphi_j)\}$. Podle věty 10.3

Obr. 12.1

každá z těchto soustav má právě jedno řešení $\omega_1, \dots, \omega_r$. V hodinách cvičení bude v případě $n = 1$ ukázáno, jak vytvořit soustavu (12.4), resp. (12.5) v počítači.

Poznamenejme, že uzlové body triangulace $\mathcal{T}_h$ jsou v aplikacích číslovány tak, aby výsledná matice $\{a(\varphi_j, \varphi_i)\}$ byla pásová s co možná nejmenší šířkou pásu. Řídkost matice $\{a(\varphi_j, \varphi_i)\}$ (a tedy při vhodném číslování i pásovost) plyne ze vztahu

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = 0 \iff \mathrm{mes}_2(\mathrm{supp}\,\varphi_i \cap \mathrm{supp}\,\varphi_j) = 0\,.$$

Pro triangulaci na Obr. 12.1, kde $\overline{\Gamma}_1$ je základna obdélníku, je v případě $n = 1$ naznačeno jedno z číslování uzlů, při kterém je šířka pásu minimální. Uzly ležící na $\overline{\Gamma}_1$ mohou být číslovány libovolně.

13. Konečněprvkový prostor $X_h^{(3,H)}$

Lagrangeovský trojúhelníkový konečný prvek se v případě $n = 3$ příliš nepoužívá; mnohem populárnější je v aplikacích hermiteovská varianta, která je definována takto:

(1) trojúhelník
(2) kubický polynom
(3) funkční hodnoty ve vrcholech a těžišti trojúhelníka; obě první derivace ve vrcholech trojúhelníka

Graficky je tento konečný prvek znázorněn na Obr. 13.1, kde tučný bod znamená funkční hodnotu v těžišti a jednička v kroužku funkční hodnotu a obě první parciální derivace - všechny tři parametry předepsány ve středu kroužku (kterým je v našem případě vrchol trojúhelníka).

Obr. 13.1

13.1. Lemma. *Nechť P je libovolný bod strany $\overline{P_jP_k}$ trojúhelníka $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Hodnota $p(P)$ polynomu $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(3)$ je jednoznačně určena hodnotami parametrů, které jsou předepsány v uzlových bodech (vrcholech) P_j, P_k.*

Důkaz. Nechť $P_j = [x_j, y_j]$, $P_k = [x_k, y_k]$. Zvolme parametrické vyjádření úsečky $\overline{P_jP_k}$ ve tvaru

$$x = x_j + (x_k - x_j)t, \quad y = y_j + (y_k - y_j)t, \quad 0 \le t \le 1 \tag{13.1}$$

a definujme polynom $\hat{p}(t) \in \mathcal{P}_1(3)$ na segmentu $\langle 0;1 \rangle$ vztahem

$$\hat{p}(t) = p(x_j + (x_k - x_j)t, y_j + (y_k - y_j)t), \quad t \in \langle 0;1 \rangle. \tag{13.2}$$

Z teorie Hermiteových interpolačních polynomů jedné proměnné plyne, že polynom $\hat{p}(t)$ je jednoznačně určen čtyřmi hodnotami $\hat{p}(0)$, $\hat{p}(1)$, $\hat{p}'(0)$, $\hat{p}'(1)$ (dokážeme to snadno pomocí Rolleovy věty - viz Poznámku 13.2). Platí

$$\hat{p}(0) = p(x_j, y_j) = p(P_j), \quad \hat{p}(1) = p(x_k, y_k) = p(P_k), \tag{13.3}$$

$$\hat{p}'(0) = (x_k - x_j)\frac{\partial p}{\partial x}(P_j) + (y_k - y_j)\frac{\partial p}{\partial y}(P_j) = l_{jk}\frac{\partial p}{\partial s}(P_j), \tag{13.4}$$

$$\hat{p}'(1) = (x_k - x_j)\frac{\partial p}{\partial x}(P_k) + (y_k - y_j)\frac{\partial p}{\partial y}(P_k) = l_{jk}\frac{\partial p}{\partial s}(P_k), \tag{13.5}$$

kde l_{jk} je délka úsečky $\overline{P_jP_k}$ a $\partial/\partial s$ značí derivaci ve směru vektoru $\overrightarrow{P_jP_k}$. Připomeňme, že derivace $\partial p/\partial s$ je dána vztahem

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial p}{\partial y}\sin\alpha,$$

kde α je úhel, který svírá vektor $\overrightarrow{P_jP_k}$ s kladným směrem osy x. Platí

$$\cos\alpha = \frac{x_k - x_j}{l_{jk}}, \quad \sin\alpha = \frac{y_k - y_j}{l_{jk}}.$$

Tedy ve vyjádření parametrů $\hat{p}(0)$, $\hat{p}(1)$, $\hat{p}'(0)$, $\hat{p}'(1)$ vystupují pouze parametry

$$p(P_j),\ p(P_k),\ \frac{\partial p}{\partial x}(P_j),\ \frac{\partial p}{\partial y}(P_j),\ \frac{\partial p}{\partial x}(P_k),\ \frac{\partial p}{\partial y}(P_k),$$

které jsou předepsány v uzlových bodech P_j, P_k. Protože můžeme pro každý bod $P \in \overline{P_jP_k}$ nalézt právě jedno $t \in \langle 0;1 \rangle$, které koresponduje s bodem P, je vzhledem k (13.2) důkaz ukončen. $\square$

13.2. Poznámka. Jednoznačnost bude dokázána, ukážeme-li, že pro $\hat{p}(t) \in \mathcal{P}_1(3)$ ze vztahů

$$\hat{p}(0) = 0,\ \hat{p}(1) = 0,\ \hat{p}'(0) = 0,\ \hat{p}'(1) = 0 \tag{13.6}$$

plyne $\hat{p}(t) \equiv 0$. To je však snadné. Podle $(13.6)_1$, $(13.6)_2$ a Rolleovy věty existuje takový bod $\xi_1 \in (0;1)$, že

$$\hat{p}'(\xi_1) = 0. \tag{13.7}$$

Z $(13.6)_{3,4}$ a (13.7) plyne dvojím užitím Rolleovy věty existence bodů $\eta_1 \in (0;\xi_1)$ a $\eta_2 \in (\xi_1;1)$ takových, že

$$\hat{p}''(\eta_1) = 0, \quad \hat{p}"(\eta_2) = 0\,. \tag{13.8}$$

Konečně z (13.8) podle Rolleovy věty plyne existence takového bodu $\eta_3 \in (\eta_1;\eta_2)$, že

$$\hat{p}'''(\eta_3) = 0\,. \tag{13.9}$$

Polynom $\hat{p}(t)$ má obecně tvar

$$\hat{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + a_3 t\,. \tag{13.10}$$

Tedy $\hat{p}'''(t) = 6a_3$ a z (13.9) plyne, že $a_3 = 0$. Odtud a z (13.10) plyne že $\hat{p}''(t) = 2a_2$. Tento výsledek a (13.8) dávají $a_2 = 0$. Odtud a z (13.10) plyne, že $\hat{p}'(t) = a_1$. Tento výsledek a (13.7) dávají $a_1 = 0$, takže $\hat{p}(t) = a_0$. Odtud a z $(13.6)_{1,2}$ plyne $\hat{p}(t) \equiv 0$, což jsme potřebovali dokázat. $\square$

13.3. Poznámka. Užijme místo parametrizace (13.1) úsečky $\overline{P_jP_k}$ parametrizaci

$$x = x_j + \frac{x_k - x_j}{l_{jk}}\tau\,, \quad y = y_j + \frac{y_k - y_j}{l_{jk}}\tau, \quad 0 \le \tau \le l_{jk} \tag{13.11}$$

a definujme na $\langle 0; l_{jk}\rangle$ polynom $\tilde{p}(\tau) \in \mathcal{P}_1(3)$ vztahem

$$\tilde{p}(\tau) = p\left(x_j + \frac{x_k - x_j}{l_{jk}}\tau, y_j + \frac{y_k - y_j}{l_{jk}}\tau\right), \quad \tau \in \langle 0; l_{jk}\rangle\,. \tag{13.12}$$

Stejně jako v důkazu lemmatu 13.1 zjistíme, že

$$\tilde{p}(0) = p(P_j),\ \tilde{p}(l_{jk}) = p(P_k),\ \tilde{p}'(0) = \frac{\partial p}{\partial s}(P_j),\ \tilde{p}'(l_{jk}) = \frac{\partial p}{\partial s}(P_k). \tag{13.13}$$

Mezi vztahy (13.3) – (13.5) a vztahy (13.13) není žádný rozpor: Podle (13.2) a (13.12) mají grafy funkcí $\hat{p}(t)$ a $\tilde{p}(\tau)$ v korespondujících bodech $t \leftrightarrow \tau$ (které spolu souvisejí podle vztahu $\tau = l_{jk}t$) stejnou "výšku" (protože každému bodu $P \in \overline{P_jP_k}$ odpovídá právě jedno t a právě jedno τ); proto podle (13.3) a $(13.13)_{1,2}$ je $\hat{p}(0) = \tilde{p}(0)$, $\hat{p}(1) = \tilde{p}(l_{jk})$. Je-li $l_{jk} < 1$, potom graf $\tilde{p}(\tau)$ je strmější než graf $\hat{p}(t)$; je-li $l_{jk} > 1$, potom graf $\hat{p}(\tau)$ je strmější než graf $\tilde{p}(t)$; to vysvětluje, že podle (13.4), (13.5) a $(13.13)_{3,4}$ je $\hat{p}'(0) = l_{jk}\tilde{p}'(0)$, $\hat{p}'(1) = l_{jk}\tilde{p}'(l_{jk})$.

13.4. Věta. *Nechť $u \in C^1(\overline{T})$, kde $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Potom existuje právě jeden polynom $u_I \in \mathcal{P}_2(3)$, pro který platí*

$$\begin{gathered} u_I(P_i^T) = u(P_i^T) \quad (i = 0,1,2,3), \\ \frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j^T) = \frac{\partial u}{\partial x}(P_j^T), \quad \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j^T) = \frac{\partial u}{\partial y}(P_j^T) \quad (j = 1,2,3), \end{gathered} \tag{13.14}$$

kde P_0^T je těžiště trojúhelníka $\overline{T}$ a P_1^T, P_2^T, P_3^T jeho vrcholy.

Důkaz. Stejně jako v důkazu věty 9.4 stačí dokázat, že vztahy

$$u_I(P_i^T) = 0\ (i = 0,\dots,3), \quad \frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j^T) = \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j^T) = 0\ (j = 1,2,3) \tag{13.15}$$

implikují $u_I(x,y) \equiv 0$.

Z (13.15) a lemmatu 13.1 plyne, že

$$u_I(P) = 0 \quad \forall P \in \overline{P_iP_j} \quad (i,j = 1,2,3;\ i \ne j).$$

Odtud podle lemmatu 9.3 dostáváme (protože $u_I \in \mathcal{P}_2(3)$)

$$u_I(x,y) = K f_{12}(x,y) f_{13}(x,y) f_{23}(x,y). \tag{13.16}$$

Protože $P_0^T \notin \overline{P_iP_j}$, platí

$$f_{ij}(P_0^T) \ne 0 \quad (i,j = 1,2,3;\ i \ne j). \tag{13.17}$$

Vztahy (13.16) a (13.17) spolu se vztahem $u_I(P_0^T) = 0$ dávají $K = 0$, takže podle (13.16) je $u_I(x,y) \equiv 0$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

13.5. Věta (o konstrukci prostoru $X_h^{(3,H)}$). *Nechť $\mathcal{T}_h$ je libovolná triangulace uzavřené ohraničené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Za uzlové body triangulace $\mathcal{T}_h$ zvolme vrcholy a těžiště trojúhelníků $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$.*

a) Funkce $v(x,y)$, která je na každém trojúhelníku $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ polynomem z $\mathcal{P}_T(3)$ jednoznačně určeným deseti parametry

$$v(P_i),\ \frac{\partial v}{\partial x}(P_i),\ \frac{\partial v}{\partial y}(P_i)\ \ (P_i \in \partial T), \qquad v(P_j)\ (P_j \in T \equiv \operatorname{int}\overline{T}),$$

náleží do prostoru $C^0(\overline{\Omega})$ funkcí spojitých na $\overline{\Omega}$.

b) Množina všech funkcí $v(x,y)$ popsaných v tvrzení a) je r-rozměrný lineární prostor, který označíme $X_h^{(3,H)}$. Přitom platí

$$r = 3\varrho_v + \varrho_t \tag{13.18}$$

kde ϱ_v značí (stejně jako v (9.1)) celkový počet vrcholů v triangulaci $\mathcal{T}_h$ a ϱ_t celkový počet trojúhelníků.

Důkaz. Tvrzení a) plyne z lemmatu 13.1; tvrzení b) je evidentní. □

13.6. Porovnání dimensí prostorů $X_h^{(3)}$ a $X_h^{(3,H)}$. Podle Eulerovy formule v triangulacích s mnoha trojúhelníky platí

$$\varrho_v : \varrho_t : \varrho_s \doteq 1 : 2 : 3, \tag{13.19}$$

takže

$$\varrho_t \doteq 2\varrho_v, \quad \varrho_s \doteq 3\varrho_v\,. \tag{13.20}$$

Tedy podle (9.1)

$$\varrho = \varrho_v + 2\varrho_s + \varrho_t \doteq 9\varrho_v,$$

$$r = 3\varrho_v + \varrho_t \doteq 5\varrho_v,$$

takže $\varrho : r \doteq 9 : 5 = 1,8$. V triangulaci čtverce, která vznikne dělením na $10 * 10$ čtverců, přičemž každý dílčí čtverec rozdělíme úhlopříčkou na dva trojúhelníky, je $\varrho_v = 121$, $\varrho_t = 200$ a $\varrho_s = 320$ (přitom tato triangulace nemá z hlediska aplikací mnoho trojúhelníků). Tedy $\varrho = 961$ a $r = 563$, takže $\varrho : r = 1,707$, což je dobrá shoda s obecným vzorcem. Tedy dimense prostoru $X_h^{(3,H)}$ je na stejné triangulaci téměř dvakrát menší než dimense prostoru $X_h^{(3)}$. To je první výhoda prostorů $X_h^{(3,H)}$ proti prostorům $X_h^{(3)}$.

13.7. Spojitost derivací funkcí z prostorů $X_h^{(3,H)}$. Funkce z prostoru $X_h^{(3,H)}$ mají oproti funkcím z prostorů $X_h^{(n)}$ velkou výhodu: jejich první derivace jsou ve vrcholech trojúhelníků spojité, protože vystupují mezi parametry, které funkci $v \in X_h^{(3,H)}$ jednoznačně určují. V aplikacích mají derivace větší význam než funkční hodnoty; proto v případě prostorů $X_h^{(n)}$ se musejí přibližně dopočítávat (většinou zprůměrováním z hodnot na trojúhelnících, které mají příslušný uzlový bod společný).

13.8. Realizace okrajových podmínek. Začneme s homogenní okrajovou podmínkou

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_1. \tag{13.21}$$

Jsou možné tři případy:

a) Uzlový bod $P_i \in \Gamma_1$ není vrcholem polygonu $\partial\Omega$ (a protože $P_i \in \Gamma_1$, není P_i koncovým bodem $\overline{\Gamma}_1$). Potom pro funkce $v \in V_h^{(3,H)} \subset X_h^{(3,H)}$, kde

$$V_h^{(3,H)} = \{v \in X_h^{(3,H)} \colon \ v = 0 \text{ na } \overline{\Gamma}_1\}, \tag{13.22}$$

z (13.21), resp. (13.22) plyne

$$v(P_i) = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial s}(P_i) = 0\,, \tag{13.23}$$

kde $\partial/\partial s$ je derivace ve směru úsečky l, která je částí $\partial\Omega$ a na které uzlový bod P_i leží. Platí

$$\frac{\partial}{\partial s} = (\cos\alpha)\frac{\partial}{\partial x} + (\sin\alpha)\frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{13.24}$$

kde α je úhel, který svírá orientovaná úsečka $\overrightarrow{l}$ s kladným směrem osy x. Tedy (13.23) můžeme psát ve tvaru

$$v(P_i) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(P_i)\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}(P_i)\sin\alpha = 0\,. \tag{13.25}$$

Je-li $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$, máme pro dva parametry $\partial v(P_i)/\partial x$, $\partial v(P_i)/\partial y$ jednu podmínku $(13.25)_2$. Jeden z těchto parametrů zvolíme za "volný" (neznámý) a druhý pomocí něj vyjádříme; např.

$$\frac{\partial v}{\partial x}(P_i) = -\frac{\partial v}{\partial y}(P_i)\mathrm{tg}\alpha\,.$$

V tomto případě jsme zvolili za volný parametr derivaci $\partial v(P_i)/\partial y$.

Je-li $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha \neq 0$, potom podle $(13.25)_2$ je $\partial v(P_i)/\partial y = 0$ a parametr $\partial v(P_i)/\partial x$ je volný, protože nemáme pro něj žádnou podmínku.

Je-li $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha = 0$, potom podle $(13.25)_2$ je $\partial v(P_i)/\partial x = 0$ a parametr $\partial v(P_i)/\partial y$ je volný.

b) Uzlový bod $P_i \in \overline{\Gamma}_1$ je vrcholem polygonu $\partial\Omega$, ale je koncovým bodem $\overline{\Gamma}_1$. V tomto případě postupujeme zcela stejně jako v případě a).

c) Uzlový bod $P_i \in \overline{\Gamma}_1$ je vrcholem polygonu $\partial\Omega$ a není koncovým bodem $\overline{\Gamma}_1$. V tomto případě vedle vztahu $(13.25)_2$ ještě platí

$$\frac{\partial v}{\partial t}(P_i) = \frac{\partial v}{\partial x}(P_i)\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial y}(P_i)\sin\beta = 0, \tag{13.26}$$

kde $\partial/\partial t$ je derivace ve směru úsečky $\overrightarrow{p} \subset \overline{\Gamma}_1$, jejímž jedním koncovým bodem je bod P_i, a β je úhel, který úsečka $\overrightarrow{p}$ svírá s kladným směrem osy x. Z (13.25) a (13.26) pak plyne

$$v(P_i) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(P_i) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(P_i) = 0. \tag{13.27}$$

V definici prostoru $V_h^{(3,H)}$ jakožto podprostoru $X_h^{(3,H)}$ musíme vyjmenovat pro funkce $v \in V_h^{(3,H)}$ všechny nulové parametry a všechny závislé parametry; toto vyjmenování je závislé na okrajové podmínce (13.21) a triangulaci $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω.

V případě nehomogenní okrajové podmínky

$$u = \overline{u} \text{ na } \overline{\Gamma}_1 \tag{13.28}$$

konstruujeme navíc množinu $W_h^{(3,H)}$; v případech a), b) vycházíme ze vztahů

$$v(P_i) = \overline{u}(P_i), \quad \frac{\partial v}{\partial s}(P_i) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial s}(P_i).$$

V případě c) k těmto dvěma vztahům přibíráme ještě vztah

$$\frac{\partial v}{\partial t}(P_i) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(P_i).$$

Postup je zřejmý (místo homogenních lineárních algebraických rovnic máme nyní k dispozici pro parametry $v(P_i)$, $\partial v(P_i)/\partial x$, $\partial v(P_i)/\partial y$ nehomogenní rovnice).

Formulace přibližného řešení Problému 6.2 v konečněprvkovém prostoru $X_h^{(3,H)}$ je tato: Najít funkci $u_h^{(3,H)} \in W_h^{(3,H)}$ tak, aby platilo

$$a(u_h^{(3,H)}, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h^{(3,H)}. \tag{13.29}$$

13.9. Případ zakřivené hranice. Už na tomto místě je nutné zmínit se o případě, kdy aproximujeme zakřivenou hranici polygonem a užíváme na triangulaci aproximující polygonální oblasti Ω_h prostor $X_h^{(3,H)}$. Z (13.21) opět plyne (13.23), kde však nyní symbol $\partial/\partial s$ znamená derivaci ve směru tečny k oblouku Γ_1. Je třeba poznamenat, že k přesnému výpočtu této derivace musíme znát analytické vyjádření Γ_1; pokud je neznáme, musíme příslušné derivace vypočítat s dostatečnou přesností přibližně (např. aproximovat $\overline{\Gamma}_1$ kubickým splajnem).

14. Transformace trojúhelníku na referenční trojúhelník

14.1. Věta (o vlastnostech transformace trojúhelníka na referenční trojúhelník). *Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ je trojúhelník s vrcholy $P(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ (lokální značení). Nechť $\overline{T}_0$ je trojúhelník, který leží v kartézské souřadné soustavě ξ, η a má vrcholy $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$ (tzv. referenční trojúhelník). Potom transformace*

$$\begin{aligned} x &= x^*(\xi,\eta) \equiv x_1 + \overline{x}_2\xi + \overline{x}_3\eta, \\ y &= y^*(\xi,\eta) \equiv y_1 + \overline{y}_2\xi + \overline{y}_3\eta, \end{aligned} \tag{14.1}$$

kde

$$\overline{x}_k = x_k - x_1, \quad \overline{y}_k = y_k - y_1 \quad (k = 2, 3), \tag{14.2}$$

má tyto vlastnosti:
a) zobrazuje $\overline{T}_0$ vzájemně jednoznačně na $\overline{T}$;
b) vrcholy a strany $\overline{T}_0$ a $\overline{T}$ splňují tyto relace:

$$R_i \leftrightarrow P_i \ (i = 1, 2, 3), \quad \overline{R_iR_j} \leftrightarrow \overline{P_iP_j} \ (i \neq j); \tag{14.3}$$

c) jakobián $J_T \equiv \overline{x}_2\overline{y}_3 - \overline{x}_3\overline{y}_2$ transformace (14.1) splňuje odhady

$$\frac{1}{2}h_T^2 \sin\vartheta_T \leq |J_T| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}h_T^2, \tag{14.4}$$

kde h_T je délka největší strany trojúhelníka $\overline{T}$ a ϑ_T nejmenší úhel $\overline{T}$;
d) platí

$$\left|\frac{\partial x^*}{\partial \xi}\right| \leq h_T, \quad \left|\frac{\partial x^*}{\partial \eta}\right| \leq h_T, \quad \left|\frac{\partial y^*}{\partial \xi}\right| \leq h_T, \quad \left|\frac{\partial y^*}{\partial \eta}\right| \leq h_T; \tag{14.5}$$

e) inversní transformace k transformaci (14.1) má tvar

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^*(x,y) \equiv \frac{1}{J_T}[\overline{y}_3(x - x_1) - \overline{x}_3(y - y_1)], \\ \eta &= \eta^*(x,y) \equiv \frac{1}{J_T}[-\overline{y}_2(x - x_1) + \overline{x}_2(y - y_1)] \end{aligned} \tag{14.6}$$

a platí

$$\left|\frac{\partial\xi^*}{\partial x}\right| \le \frac{2}{h_T \sin\vartheta_T}, \quad \left|\frac{\partial\xi^*}{\partial y}\right| \le \frac{2}{h_T \sin\vartheta_T},$$
$$\left|\frac{\partial\eta^*}{\partial x}\right| \le \frac{2}{h_T \sin\vartheta_T}, \quad \left|\frac{\partial\eta^*}{\partial y}\right| \le \frac{2}{h_T \sin\vartheta_T}. \tag{14.7}$$

Důkaz. a) Vektory $\overrightarrow{P_1P_2} = (\overline{x}_2, \overline{y}_2)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (\overline{x}_3, \overline{y}_3)$ jsou nekolineární; proto platí

$$J_T \equiv \overline{x}_2\overline{y}_3 - \overline{x}_3\overline{y}_2 \neq 0. \tag{14.8}$$

Vztah (14.8) implikuje, že zobrazení (14.1) je injekce roviny (ξ, η) do roviny (x, y): Jestliže dva body $[\hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1]$, $[\hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2]$ mají tentýž obraz $[\hat{x}, \hat{y}]$, potom podle (14.1)

$$\hat{x} = x_1 + \overline{x}_2\hat{\xi}_i + \overline{x}_3\hat{\eta}_i, \quad \hat{y} = y_1 + \overline{y}_2\hat{\xi}_i + \overline{y}_3\hat{\eta}_i \quad (i = 1, 2).$$

Odečtením těchto dvou soustav vztahů získáme

$$0 = \overline{x}_2(\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2) + \overline{x}_3(\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2), \quad 0 = \overline{y}_2(\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2) + \overline{y}_3(\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2).$$

Toto je homogenní soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2$, $\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2$. Determinant této soustavy je roven J_T. Tedy $\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_2$, $\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}_2$.

Nyní dokážeme, že ke každému bodu $\hat{P}(\hat{x}, \hat{y}) \in \overline{T}$ můžeme nalézt takový bod $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \in \overline{T}_0$, že

$$\hat{x} = x^*(\hat{\xi}, \hat{\eta}), \quad \hat{y} = y^*(\hat{\xi}, \hat{\eta}). \tag{14.9}$$

Zvolme $\hat{P} = P_1$. Potom $\hat{\xi} = 0$, $\hat{\eta} = 0$ splňují vztahy (14.9). Nechť nyní $\hat{P} \neq P_1$, $\hat{P} \in \overline{T}$. Potom souřadnice $\hat{x}, \hat{y}$ bodu $\hat{P}$ splňují vztahy

$$\hat{x} = (1 - c)x_1 + c(ax_2 + bx_3), \quad \hat{y} = (1 - c)y_1 + c(ay_2 + by_3), \tag{14.10}$$

kde

$$0 < c \le 1; \quad a + b = 1, \quad a \ge 0, \ b \ge 0. \tag{14.11}$$

(Vztahy (14.10), (14.11) plynou z těchto dvou faktů: (1) $\hat{x} = x_1 + c(x_Q - x_1)$, $\hat{y} = y_1 + c(y_Q - y_1)$, kde Q je společný bod přímky $P_1\hat{P}$ a úsečky $\overline{P_2P_3}$; (2) každý bod úsečky $\overline{P_2P_3}$ je tvaru $[ax_2 + bx_3, ay_2 + by_3]$.)

Položme $\hat{\xi} = ac$, $\hat{\eta} = bc$. Potom podle (14.11) platí

$$0 < \hat{\xi} + \hat{\eta} = ac + bc = c(a + b) = c \le 1.$$

Tedy $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \in \overline{T}_0$. Nyní ukážeme, že jsou splněny vztahy (14.9): Vztah $(14.10)_1$ může být psán ve tvaru

$$\hat{x} = [1 - c(a + b)]x_1 + x_2\hat{\xi} + x_3\hat{\eta} = x_1 + (x_2 - x_1)\hat{\xi} + (x_3 - x_1)\hat{\eta} = x^*(\hat{\xi}, \hat{\eta}).$$

Podobně dostaneme z $(14.10)_2$:

$$\hat{y} = [1 - c(a + b)]y_1 + y_2\hat{\xi} + y_3\hat{\eta} = y^*(\hat{\xi}, \hat{\eta}).$$

Zbývá dokázat, že (14.1) zobrazuje $\overline{T}_0$ do $\overline{T}$: Pišme (14.1) ve tvaru

$$x = (1 - \xi - \eta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3, \quad y = (1 - \xi - \eta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 \tag{14.12}$$

a nechť $[\xi, \eta] \neq [0, 0]$, $[\xi, \eta] \in \overline{T}_0$. Položíme-li $\xi + \eta = c$, $a = \xi/c$, $b = \eta/c$, potom můžeme psát vzhledem k (14.12)

$$x = (1 - c)x_1 + c(ax_2 + bx_3), \quad y = (1 - c)y_1 + c(ay_2 + by_3), \tag{14.13}$$

kde a, b, c splňují (14.11). Srovnáme-li (14.13) s (14.10), vidíme, že $[x, y] \in \overline{T}$.

Předchozí výsledky implikují vlastnost a) transformace (14.1).

b) Vztahy $(14.3)_1$ plynou z tvrzení a) a ze vztahů $x_i = x^*(R_i)$, $y_i = y^*(R_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Vztahy $(14.2)_2$ plynou z tvrzení a) a z následující skutečnosti: Položíme-li $\eta = 0$ v (14.1) a omezíme-li ξ na segment $\langle 0; 1 \rangle$, dostaneme parametrické rovnice strany $\overline{P_1 P_2}$. Položíme-li $\xi = 0$ a $\eta \in \langle 0; 1 \rangle$, potom se vztahy (14.1) stanou parametrickými rovnicemi strany $\overline{P_1 P_3}$, a položíme-li $\eta = 1 - \xi$, $\xi \in \langle 0; 1 \rangle$, dostaneme parametrické rovnice strany $\overline{P_2 P_3}$.

c) Platí

$$\operatorname{mes}_2 T = \int_T \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{T_0} |J_T| \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \frac{1}{2} |J_T|. \tag{14.14}$$

Dokážeme, že

$$\frac{1}{2} h_T^2 \sin \vartheta_T < 2 \operatorname{mes}_2 T \le \frac{\sqrt{3}}{2} h_T^2. \tag{14.15}$$

Druhá nerovnost (14.15) plyne z toho, že rovnostranný trojúhelník má největší plošný obsah ze všech trojúhelníků se stejnou největší stranou. Nyní dokážeme první nerovnost: nechť $a_T \le b_T \le c_T \equiv h_T$ jsou délky stran trojúhelníka $\overline{T}$. Potom

$$2 \operatorname{mes}_2 T = h_T b_T \sin \vartheta_T. \tag{14.16}$$

Protože součet délek dvou libovolných stran trojúhelníka je větší než délka zbývající strany, platí $h_T < a_T + b_T \le 2 b_T$. Odtud $\frac{1}{2} h_T < b_T$. Tato nerovnost a vztah (14.16) implikují první nerovnost (14.15).

Z (14.14) a (14.15) plynou odhady (14.4).

d) Protože $|\overline{x}_k| \le h_T$, $|\overline{y}_k| \le h_T$ $(k = 2, 3)$, dostaneme vztahy (14.5) derivováním (14.1).

e) Uvažujeme-li vztahy (14.1) jako lineární algebraické rovnice pro neznámé ξ, η, dostaneme (14.6) ihned pomocí Cramerova pravidla. Odhady (14.7) získáme derivováním (14.6) a užitím vztahů $|\overline{x}_k| \le h_T$, $|\overline{y}_k| \le h_T$ $(k = 2, 3)$ a $|J_T|^{-1} < (\frac{1}{2} h_T^2 \sin \vartheta_T)^{-1}$ (poslední nerovnost plyne z první nerovnosti (14.4)). $\square$

V následující větě budeme opět používat symboly x_1, x_2 a ξ_1, ξ_2 namísto x, y a ξ, η a budeme stručně psát $\int f \, \mathrm{d}x$ a $\int g \, \mathrm{d}\xi$ místo $\int f \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$ a $\int g \, \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2$.

Transformace (14.1) bude psána ve tvaru

$$x_i = x_i^*(\xi_1, \xi_2) \quad (i = 1, 2) \tag{14.17}$$

a k ní inversní ve tvaru

$$\xi_i = \xi^*(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2). \tag{14.18}$$

Odhady (14.5) a (14.7) mohou být stručně psány takto:

$$|D^\alpha x_i^*(\xi_1, \xi_2)| \le h_T, \quad |\alpha| = 1 \quad (i = 1, 2), \tag{14.19}$$

$$|D^\alpha \xi_i^*(x_1, x_2)| \le \frac{2}{\sin \vartheta_T} h_T^{-1}, \quad |\alpha| = 1 \quad (i = 1, 2). \tag{14.20}$$

Věta 14.2 uvede vlastnosti složené funkce

$$w^*(\xi_1, \xi_2) = w(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)), \tag{14.21}$$

kde funkce $w(x_1, x_2)$ náleží do $W_2^k(T)$. Tyto vlastnosti budou velmi užitečné jak v teorii interpolace, tak v teorii numerické integrace.

14.2. Věta. *a) Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Je-li $w \in C^\infty(\overline{T})$, potom $w^* \in C^\infty(\overline{T}_0)$ a pro libovolná celá čísla s, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ platí tyto odhady:*

$$\|w\|_{s,T} \le \frac{\widetilde{C}(s)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{-s} \sqrt{\mathrm{mes}_2 T} \|w^*\|_{s,T_0}\,, \tag{14.22}$$

$$|w^*|_{k,T_0} \le \widehat{C}(k) h_T^k (\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} |w|_{k,T}, \tag{14.23}$$

kde $h_T < 1$ a pro konstanty $\widetilde{C}(s)$, $\widehat{C}(k)$ platí

$$\widetilde{C}(s) = 2^s\sqrt{2}(s+1), \quad \widehat{C}(k) = \frac{\sqrt{2}}{2}(k+1). \tag{14.24}$$

b) Jestliže $w \in W_2^k(T)$, kde $k \ge 2$, potom $w^* \in W_2^k(T_0)$ a platí odhady (14.22), (14.23), přičemž v (14.22) je $0 \le s \le k$.

Důkaz. a) Protože $x_i^*(\xi_1, \xi_2) \in C^\infty(R^2)$ $(i = 1, 2)$, ze (14.21) a předpokladu $w \in C^\infty(\overline{T})$ plyne (podle věty o derivování složené funkce), že $w^* \in C^\infty(\overline{T}_0)$. Nyní dokážeme (14.22). Podle věty o transformaci integrálu platí

$$\|w\|_{s,T}^2 = \sum_{|\alpha|\le s} \int_T (D^\alpha w)^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{|\alpha|\le s} \int_{T_0} ((D^\alpha w)^*)^2 |J_T| \,\mathrm{d}\xi, \tag{14.25}$$

kde

$$(D^\alpha w)^*(\xi_1, \xi_2) = (D^\alpha w)(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)).$$

Abychom vyjádřili $(D^\alpha w)^*$ ve vhodném tvaru, pišme

$$w(x_1, x_2) = w^*(\xi_1^*(x_1, x_2), \xi_2^*(x_1, x_2)). \tag{14.26}$$

Protože $\xi_1^*(x_1, x_2)$, $\xi_2^*(x_1, x_2)$ jsou lineární funkce, dostaneme z (14.26) derivováním

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{2} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m^*}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{m,r=1}^{2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi_m \partial \xi_r} \frac{\partial \xi_m^*}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_r^*}{\partial x_j}$$

a obecně

$$D^\alpha w = \sum_{|\beta|=|\alpha|} b_{\alpha\beta} D^\beta w^*\,, \tag{14.27}$$

kde $b_{\alpha\beta}$ jsou konstanty, pro které podle (14.20) platí

$$|b_{\alpha\beta}| \le \frac{2^{|\alpha|}}{(\sin\vartheta_T)^{|\alpha|}} h_T^{-|\alpha|}. \tag{14.28}$$

Tedy pravá strana (14.27) je pouze funkcí ξ_1, ξ_2 a vyjadřuje $(D^\alpha w)^*$:

$$(D^\alpha w)^* = \sum_{|\beta|=|\alpha|} b_{\alpha\beta} D^\beta w^*. \tag{14.29}$$

Podle Cauchyovy nerovnosti (7.23) (kde položíme $b_i = 1$) je

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} a_i\Big|^2 \le m \sum_{i=1}^{m} a_i^2. \tag{14.30}$$

Pomocí (14.14) a (14.28) – (14.30) dostaneme z (14.25):

$$\|w\|_{s,T}^2 = |J_T| \sum_{|\alpha|\le s} \int_{T_0} \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} b_{\alpha\beta} D^\beta w^* \Big)^2 \,\mathrm{d}\xi \le$$

$$\le 2\mathrm{mes}_2 T \sum_{|\alpha|\le s} \frac{2^{2|\alpha|}}{(\sin\vartheta_T)^{2|\alpha|}} h_T^{-2|\alpha|} \int_{T_0} \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} D^\beta w^* \Big)^2 \,\mathrm{d}\xi \le$$

$$\le 2\mathrm{mes}_2 T \sum_{|\alpha|\le s} \frac{2^{2|\alpha|}}{(\sin\vartheta_T)^{2|\alpha|}} h_T^{-2|\alpha|} (|\alpha|+1) \sum_{|\beta|=|\alpha|} \int_{T_0} (D^\beta w^*)^2 \,\mathrm{d}\xi \le$$

$$\le \frac{2\cdot 2^{2s}(s+1)}{(\sin\vartheta_T)^{2s}} h_T^{-2s} \mathrm{mes}_2 T \sum_{|\alpha|\le s} |w^*|^2_{|\alpha|,T_0} \le \frac{2\cdot 2^{2s}(s+1)^2}{(\sin\vartheta_T)^{2s}} h_T^{-2s} \mathrm{mes}_2 T \|w^*\|^2_{s,T_0} .$$

Tento výsledek dává okamžitě (14.22).

Nyní dokážeme (14.23). Protože $x_i^*(\xi_1,\xi_2)$ $(i=1,2)$ jsou lineární funkce, dostaneme z (14.21) derivováním

$$\frac{\partial w^*}{\partial \xi_i} = \sum_{m=1}^{2} \frac{\partial w}{\partial x_m} \frac{\partial x_m^*}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \sum_{m,r=1}^{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_m \partial x_r} \frac{\partial x_m^*}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_r^*}{\partial \xi_j} \tag{14.31}$$

a obecně

$$D^\alpha w^* = \sum_{|\beta|=|\alpha|} c_{\alpha\beta} D^\beta w \,, \tag{14.32}$$

kde $c_{\alpha\beta}$ jsou konstanty, pro které podle (14.19) platí

$$|c_{\alpha\beta}| \le h_T^{|\alpha|} \,. \tag{14.33}$$

Protože pravá strana (14.31) je funkcí pouze x_1, x_2, platí

$$(D^\alpha w^*)\hat{}= \sum_{|\beta|=|\alpha|} c_{\alpha\beta} D^\beta w, \tag{14.34}$$

kde

$$(D^\alpha w^*)\hat{}(x_1,x_2) = (D^\alpha w^*)(\xi_1^*(x_1,x_2), \xi_2^*(x_1,x_2)).$$

Užitím (14.14), (14.30), (14.33), (14.34) a věty o transformaci integrálu dostaneme:

$$|w^*|^2_{k,T_0} = \sum_{|\alpha|=k} \int_{T_0} (D^\alpha w^*)^2 \,\mathrm{d}\xi = \sum_{|\alpha|=k} \int_T ((D^\alpha w^*)\hat{})^2 |J_T|^{-1} \,\mathrm{d}x =$$

$$= |J_T|^{-1} \sum_{|\alpha|=k} \int_T \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} c_{\alpha\beta} D^\beta w \Big)^2 \mathrm{d}x \le |J_T|^{-1} \sum_{|\alpha|=k} h_T^{2|\alpha|} \int_T \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} D^\beta w \Big)^2 \mathrm{d}x \le$$

$$\le (2\mathrm{mes}_2 T)^{-1} h_T^{2k} \sum_{|\alpha|=k} (|\alpha|+1) \sum_{|\beta|=|\alpha|} \int_T (D^\beta w)^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} (\mathrm{mes}_2 T)^{-1} h_T^{2k} (k+1) \sum_{|\alpha|=k} |w|^2_{|\alpha|,T} = \frac{1}{2} (k+1)^2 h_T^{2k} (\mathrm{mes}_2 T)^{-1} |w|^2_{k,T} \,.$$

Odtud okamžitě plyne (14.23).

b) Nejprve dokážeme, že $w^* \in W_2^k(T_0)$, jestliže $w \in W_2^k(T)$ a $k \ge 2$. Protože každý trojúhelník má lipschitzovskou hranici, můžeme užít větu 1.11 o hustotě lineálu $C^\infty(\overline{T})$ v prostoru $W_2^k(T)$ a ke každé funkci $w \in W_2^k(T)$ nalézt posloupnost $\{v_i\} \subset C^\infty(\overline{T})$ takovou, že

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i - w\|_{k,T} = 0. \tag{14.35}$$

Položme

$$v_i^*(\xi_1,\xi_2) = v_i(x_1^*(\xi_1,\xi_2), x_2^*(\xi_1,\xi_2)) \,.$$

Stejně jako v části a) platí, že $v_i^* \in C^\infty(\overline{T}_0)$. Podobně jako v závěru předešlé části důkazu lze dokázat, že

$$\|v_j^* - v_i^*\|_{k,T_0} \le C(k)(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2}\|v_j - v_i\|_{k,T} \,. \tag{14.36}$$

Podle (14.35) pravá strana (14.36) jde k nule, když $i,j \to \infty$. Tedy $\{v_i^*\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $W_2^k(T_0)$. Tento výsledek spolu s úplností prostoru $W_2^k(T_0)$ implikují existenci funkce $\omega \in W_2^k(T_0)$, pro kterou platí

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i^* - \omega\|_{k,T_0} = 0. \tag{14.37}$$

Na druhé straně, protože $k \ge 2$, podle věty 5.1 platí, že $w \in C^0(\overline{T})$. Odtud a podle (14.21) je $w^* \in C^0(\overline{T}_0)$, takže podobně jako v (14.36) platí

$$\|v_i^* - w^*\|_{0,T_0} \le C(k)(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2}\|v_i - w\|_{0,T} \to 0. \tag{14.38}$$

Vztahy (14.37) a (14.38) a jednoznačnost limity v $L_2(T_0)$ implikují, že $\omega = w^*$; odtud $w^* \in W_2^k(T_0)$, přičemž (dosadíme-li $\omega = w^*$ do (14.37))

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i^* - w^*\|_{k,T_0} = 0. \tag{14.39}$$

Zbytek důkazu je jednoduchý: Protože $\{v_i\} \subset C^\infty(\overline{T})$, platí podle již dokázané části a) věty 14.2

$$\|v_i\|_{s,T} \le \frac{\widetilde{C}(s)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{-s}\sqrt{\mathrm{mes}_2 T}\|v_i^*\|_{s,T_0} \quad (0 \le s \le k), \tag{14.40}$$

$$|v_i^*|_{k,T_0} \le \widehat{C}(k) h_T^k (\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} |v_i|_{k,T}. \tag{14.41}$$

Vlastnosti normy a seminormy a vztahy (14.35) a (14.39) implikují

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i\|_{s,T} = \|w\|_{s,T} \,, \quad \lim_{i\to\infty} \|v_i^*\|_{s,T_0} = \|w^*\|_{s,T_0} \,, \tag{14.42}$$

$$\lim_{i\to\infty} |v_i|_{s,T} = |w|_{s,T} \,, \quad \lim_{i\to\infty} |v_i^*|_{s,T_0} = |w^*|_{s,T_0} \,. \tag{14.43}$$

Skutečně, podle trojúhelníkové nerovnosti a vztahu (14.35) platí

$$\|v_i\|_{s,T} = \|v_i + w - w\|_{s,T} \le \|w\|_{s,T} + \|v_i - w\|_{s,T} \to \|w\|_{s,T} \,.$$

Stejně lze dokázat zbývající tři vztahy z (14.42) a (14.43). Tedy, přejdeme-li k limitě pro $i \to \infty$ v (14.40) a (14.41), dostaneme pro funkci $w \in W_2^k(T)$ odhady (14.22) a (14.23). □

14.3. Poznámka. Pro naši teorii potřebujeme pouze odhady (14.22), (14.23). To je dobře, protože (podobně jako (14.36)) pro $\|w^*\|_{k,T_0}$ lze získat pouze odhad

$$\|w^*\|_{k,T_0} \le C(k)(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2}\|w\|_{k,T} \,,$$

tj. odhad, kde na pravé straně se nevyskytují žádné mocniny h_T.

Ze vztahů (14.31) – (14.33) okamžitě plyne následující lemma, které bude mít velké užití v 16. kapitole.

14.4. Lemma. *Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Je-li $w \in C^k(\overline{T})$, potom $w^* \in C^k(\overline{T}_0)$ a platí*

$$|w^*|_{C^k(\overline{T}_0)} \le C(k) h_T^k |w|_{C^k(\overline{T})}. \tag{14.44}$$

15. Interpolační teorémy

V této kapitole uvedeme a dokážeme interpolační teorémy pro trojúhelníkové konečné prvky, pomocí nichž se generují konečněprvkové prostory $X_h^{(n)}$ a $X_h^{(3,H)}$.

15.1. Věta. *Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Nechť $u_I \in \mathcal{P}_2(n)$ je interpolační polynom funkce u definovaný vztahy (8.6), tj. vztahy*

$$u_I(P_i) = u(P_i) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{15.1}$$

kde $N = (n+1)(n+2)/2$ a uzlové body $P_1, \dots, P_N$ jsou umístěny na $\overline{T}$ jako prvních N čísel v Pascalově trojúhelníku. Nechť $u \in W_2^k(T)$, přičemž

$$2 \leq k \leq n + 1. \tag{15.2}$$

Potom pro $0 \leq s \leq k$ platí

$$\|u - u_I\|_{s,T} \leq \frac{C}{(\sin \vartheta_T)^s} h_T^{k-s} |u|_{k,T}\,, \tag{15.3}$$

kde

$$C = C(n, s, k, \overline{T}_0). \tag{15.4}$$

Důkaz. Poznamenejme, že předpoklad $k \geq 2$ zaručuje podle věty 5.1, že $u \in C^0(\overline{T})$, takže polynom u_I může být definován vztahy (15.1).

A) Položme

$$u^*(\xi, \eta) = u(x^*(\xi, \eta), y^*(\xi, \eta)), \tag{15.5}$$

kde funkce $x^*(\xi, \eta)$, $y^*(\xi, \eta)$ jsou definovány v (14.1). Podle věty 14.2 $u^* \in W_2^k(T_0)$.

Zvolme funkci $v \in W_2^s(T_0)$ libovolně, ale pevně, a definujme lineární funkcionál $F(u^*)$ na $W_2^k(T_0)$ vztahem

$$F(u^*) = (u^* - u_I^*, v)_{s,T_0}\,, \tag{15.6}$$

kde polynom u_I^* je dán vztahem

$$u_I^*(\xi, \eta) = u_I(x^*(\xi, \eta), y^*(\xi, \eta)) \tag{15.7}$$

a $(v, w)_{s,T_0}$ je skalární součin ve $W_2^s(T_0)$:

$$(v, w)_{s,T_0} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{T_0} D^\alpha v D^\alpha w \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta\,. \tag{15.8}$$

Ověřme především, že F je lineární funkcionál: Nechť c_1, c_2 jsou dvě libovolná reálná čísla a w^*, $z^* \in W_2^k(T_0)$ dvě funkce korespondující s funkcemi w, $z \in W_2^k(T)$ podle vztahu (15.5). Potom

$$F(c_1 w^* + c_2 z^*) = F((c_1 w + c_2 z)^*) = ((c_1 w + c_2 z)^* - (c_1 w + c_2 z)_I^*, v)_{s,T_0} =$$

$$= ((c_1 w + c_2 z)^* - ((c_1 w + c_2 z)_I)^*, v)_{s,T_0} = (c_1 w^* + c_2 z^* - (c_1 w_I + c_2 z_I)^*, v)_{s,T_0} =$$

$$= (c_1 w^* + c_2 z^* - c_1 w_I^* - c_2 z_I^*, v)_{s,T_0} = c_1 (w^* - w_I^*, v)_{s,T_0} + c_2 (z^* - z_I^*, v)_{s,T_0} =$$

$$= c_1 F(w^*) + c_2 F(z^*)\,.$$

Nyní dokážeme, že

$$|F(u^*)| \leq C_1 \|v\|_{s,T_0} \|u^*\|_{k,T_0}\,, \tag{15.9}$$

kde konstanta C_1 nezávisí na v a u^*. Vztah (15.6) implikuje

$$|F(u^*)| \le \|u^* - u_I^*\|_{s,T_0} \|v\|_{s,T_0} \le \|v\|_{s,T_0} (\|u^*\|_{k,T_0} + \|u_I^*\|_{k,T_0}) \,. \tag{15.10}$$

Abychom dokázali (15.9), musíme odhadnout $\|u_I^*\|_{k,T_0}$ pomocí $\|u^*\|_{k,T_0}$: Podle (15.5) a (15.7) platí

$$u^*(P_i^*) = u(P_i), \quad u_I^*(P_i^*) = u_I(P_i) \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{15.11}$$

kde $P_i^* = [\xi^*(P_i), \eta^*(P_i)]$, $P_i = [x^*(P_i^*), y^*(P_i^*)]$. Vztahy (15.11) spolu se vztahy (15.1) dávají

$$u_I^*(P_i^*) = u^*(P_i^*), \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{15.12}$$

Lineárnost transformace (14.1) a vztah (15.7) zaručují, že $u_I^* \in \mathcal{P}_2(n)$. Podle (15.12) je tedy u_I^* interpolačním polynomem funkce $u^* \in W_2^k(T_0)$. Odtud

$$u_I^*(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^N u^*(P_i^*) \varphi_i^*(\xi, \eta), \tag{15.13}$$

kde bázové polynomy $\varphi_i^* \in \mathcal{P}_2(n)$ $(i = 1, \ldots, N)$ jsou jednoznačně určeny vztahy

$$\varphi_i^*(P_j^*) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, N).$$

Platí

$$\|\varphi_i^*\|_{k,T_0} \le \widetilde{K} \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{15.14}$$

Konstanta $\widetilde{K}$ závisí pouze na pevných veličinách k, n, $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_N^*$ a může být (po jistém úsilí) vypočtena. Odhad (15.14) a vztah (15.13) implikují

$$\|u_I^*\|_{k,T_0} \le \sum_{i=1}^N |u^*(P_i^*)| \cdot \|\varphi_i^*\|_{k,T_0} \le \widetilde{K} \sum_{i=1}^N |u^*(P_i^*)| \,.$$

Protože $k \ge 2$, ze Sobolevovy věty o vnoření (viz větu 5.1) plyne

$$|u^*(P_i^*)| \le \max_{\overline{T}_0} |u^*(\xi, \eta)| \le K(\overline{T}_0) \|u^*\|_{k,T_0} \,,$$

kde konstanta $K(\overline{T}_0)$ závisí pouze na $\overline{T}_0$. Kombinací posledních dvou odhadů se vztahem (15.10) dostaneme odhad (15.9), kde $C_1 = 1 + N\widetilde{K}K(\overline{T}_0)$.

Nyní dokážeme, že

$$F(u^*) = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{P}_2(n) \,. \tag{15.15}$$

Podle (15.13) polynom $u_I^* \in \mathcal{P}_2(n)$ je interpolačním polynomem polynomu $u^* \in \mathcal{P}_2(n)$; odtud podle věty 9.4 je $u_I^* \equiv u^*$. Tento výsledek a vztah (15.6) dávají (15.15).

Podle (15.9) je $F(u^*)$ lineární ohraničený funkcionál na prostoru $W_2^k(T_0)$ s normou, která není větší než $C_1 \|v\|_{s,T_0}$. Protože podle (15.2) je $k - 1 \le n$, vztah (15.15) dává

$$F(u^*) = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{P}_2(k-1). \tag{15.16}$$

Z (15.9) a (15.16) plyne, že oba předpoklady Bramble-Hilbertova lemmatu (viz větu 4.3) jsou splněny, takže platí

$$|F(u^*)| \le C_1 C_2 \|v\|_{s,T_0} |u^*|_{k,T_0} \quad \forall u^* \in W_2^k(T_0), \tag{15.17}$$

kde (jak už bylo zmíněno) $C_1 = 1 + N\widetilde{K}K(\overline{T}_0)$ a konstanta C_2 závisí podle věty 4.3 pouze na k a $\overline{T}_0$.

Protože funkce v byla zvolena ve $W_2^s(T_0)$ libovolně, vztahy (15.6) a (15.17) dohromady dávají

$$|(u^* - u_I^*, v)_{s,T_0}| \le C_1 C_2 \|v\|_{s,T_0} |u^*|_{k,T_0} \quad \forall u^* \in W_2^k(T_0), \quad \forall v \in W_2^s(T_0).$$

Položíme-li $v = u^* - u_I^*$, dostaneme odtud

$$\|u^* - u_I^*\|_{s,T_0} \le C_1 C_2 |u^*|_{k,T_0} \quad \forall u^* \in W_2^k(T_0). \tag{15.18}$$

B) Nyní užijeme větu 14.2: Položíme-li $w = u - u_I$, dostaneme z (14.22) pro $0 \le s \le k$

$$\|u - u_I\|_{s,T} \le \frac{\widetilde{C}(s)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{-s} \sqrt{\mathrm{mes}_2 T} \|u^* - u_I^*\|_{s,T_0}. \tag{15.19}$$

Položíme-li $w = u$, dostaneme z (14.23)

$$|u^*|_{k,T_0} \le \widehat{C}(k) h_T^k (\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} |u|_{k,T}. \tag{15.20}$$

Závěr důkazu je nyní jednoduchý: Násobme (15.18) výrazem

$$\frac{\widetilde{C}(s)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{-s} \sqrt{\mathrm{mes}_2 T}$$

a odhadněme levou stranu zdola pomocí (15.19) a pravou stranu shora pomocí (15.20). Dostaneme

$$\|u - u_I\|_{s,T} \le \frac{C_1 C_2 \widetilde{C}(s) \widehat{C}(k)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{k-s} |u|_{k,T}\,,$$

což je odhad vyjádřený vztahem (15.3), kde $C = C_1 C_2 \widetilde{C}(s) \widehat{C}(k)$. Odtud plyne (15.4). □

15.2. Věta. *Nechť $u \in W_2^k(T)$, kde $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ a $3 \le k \le 4$. Nechť $u_I \in \mathcal{P}_2(3)$ je interpolační polynom funkce u definovaný vztahy* (13.14), *tj. vztahy*

$$u_I(P_i^T) = u(P_i^T) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{15.21}$$

$$\frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j^T) = \frac{\partial u}{\partial x}(P_j^T), \quad \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j^T) = \frac{\partial u}{\partial y}(P_j^T) \quad (j = 1, 2, 3), \tag{15.22}$$

kde P_0^T je těžiště trojúhelníka $\overline{T}$ a P_1^T, P_2^T, P_3^T jeho vrcholy. Potom pro $0 \le s \le k$ platí

$$\|u - u_I\|_{s,T} \le \frac{C}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{k-s} |u|_{k,T}\,, \tag{15.23}$$

kde

$$C = C(3, s, k, \overline{T}_0). \tag{15.24}$$

Důkaz. Poznamenejme, že předpoklad $k \ge 3$ zaručuje podle věty 5.1, že $u \in C^1(\overline{T})$, takže polynom u_I může být definován vztahy (15.21), (15.22).

Důkaz probíhá téměř doslova stejně jako důkaz věty 15.1. Liší se pouze v důkazu odhadu (15.9); přesněji v důkazu vztahu

$$\|u_I^*\|_{k,T_0} \le C_3 \|u^*\|_{k,T_0}. \tag{15.25}$$

Nechť $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$ jsou vrcholy trojúhelníka $\overline{T}_0$ a $R_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ jeho těžiště. Ze vztahů (15.5), (15.7) a (15.21) plyne, že

$$u_I^*(R_i) = u^*(R_i) \quad (i = 0, \dots, 3). \tag{15.26}$$

Nyní dokážeme vztahy

$$\frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_j) = \frac{\partial u^*}{\partial \xi}(R_j), \quad \frac{\partial u_I^*}{\partial \eta}(R_j) = \frac{\partial u^*}{\partial \eta}(R_j) \quad (j = 1, 2, 3). \tag{15.27}$$

Podle (14.1), (15.5), (15.7) a (15.22) platí, že

$$\frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_j) = \frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j)\frac{\partial x^*}{\partial \xi} + \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j)\frac{\partial y^*}{\partial \xi} =$$

$$= \overline{x}_2 \frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j) + \overline{y}_2 \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j) = \overline{x}_2 \frac{\partial u}{\partial x}(P_j) + \overline{y}_2 \frac{\partial u}{\partial y}(P_j) = \frac{\partial u^*}{\partial \xi}(R_j),$$

čímž je první ze vztahů (15.27) dokázán. Druhý se dokáže zcela stejně.

Lineárnost transformace (14.1) a vztah (15.7) zaručují, že $u_I^* \in \mathcal{P}_2(3)$. Podle (15.26) a (15.27) je tedy u_I^* interpolačním polynomem funkce $u^* \in W_2^k(T_0)$. Uspořádáme-li deset hodnot, které vystupují na levých stranách vztahů (15.26), (15.27), nějakým způsobem, např.

$$\begin{gathered} u_I^*(R_0),\ u_I^*(R_1),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_1),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \eta}(R_1),\ u_I^*(R_2), \\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_2),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \eta}(R_2),\ u_I^*(R_3),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_3),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \eta}(R_3) \end{gathered} \tag{15.28}$$

a označíme-li je pro stručnost symboly $a_1, \ldots, a_{10}$ (pro určitost v pořadí uvedeném v (15.28)), můžeme psát

$$u_I^*(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{10} a_j \psi_j^*(\xi, \eta), \tag{15.29}$$

kde $\psi_j^*(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_2(3)$ $(j = 1 \ldots, 10)$ jsou takové polynomy, že pouze vždy jedna z hodnot

$$\begin{gathered} \psi_j^*(R_0),\ \psi_j^*(R_1),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \xi}(R_1),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \eta}(R_1),\ \psi_j^*(R_2), \\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \xi}(R_2),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \eta}(R_2),\ \psi_j^*(R_3),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \xi}(R_3),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \eta}(R_3) \end{gathered} \tag{15.30}$$

je rovna jedné a zbývajících devět rovno nule.

Platí

$$\|\psi_j^*\|_{k,T_0} \le \widetilde{K}_1 \quad (j = 1, \ldots, 10). \tag{15.31}$$

Konstanta $\widetilde{K}_1$ závisí pouze na pevných veličinách k, 10, $\psi_1^*, \ldots, \psi_{10}^*$ a může být (po jistém úsilí) vypočtena. Odhad (15.31) a vztah (15.29) implikují

$$\|u_I^*\|_{k,T_0} \le \sum_{i=1}^{10} |a_i| \cdot \|\psi_i^*\|_{k,T_0} \le \widetilde{K}_1 \sum_{i=1}^{10} |a_i| \,.$$

Protože $k \ge 3$, ze Sobolevovy věty o vnoření (viz větu 5.1) a vztahů (15.26), (15.27) plyne

$$|a_i| = |u^*(R_j)| \le \max_{\overline{T}_0} |u^*(\xi, \eta)| \le K_2(\overline{T}_0)\|u^*\|_{k,T_0} \quad (i = 1, 2, 5, 8;\ j = 0, 1, 2, 3),$$

$$|a_i| = \left|\frac{\partial u^*}{\partial \xi}(R_j)\right| \le \max_{\overline{T}_0} \left|\frac{\partial u^*}{\partial \xi}(\xi, \eta)\right| \le K_2(\overline{T}_0)\|u^*\|_{k,T_0} \quad (i = 3, 6, 9;\ j = 1, 2, 3),$$

$$|a_i| = \left|\frac{\partial u^*}{\partial \eta}(R_j)\right| \le \max_{\overline{T}_0} \left|\frac{\partial u^*}{\partial \eta}(\xi, \eta)\right| \le K_2(\overline{T}_0)\|u^*\|_{k,T_0} \quad (i = 4, 7, 10;\ j = 1, 2, 3),$$

kde konstanta $K(\overline{T}_0)$ závisí pouze na $\overline{T}_0$. Kombinací posledních čtyř odhadů dostaneme odhad (15.25), kde $C_3 = 10\widetilde{K}_1 K_2(\overline{T}_0)$. $\square$

V této kapitole se vrátíme k označení $x = (x_1, x_2)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$.

Kvadraturní formule definovaná na referenčním trojúhelníku $\overline{T}_0$ má obecně tvar

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \sum_{i=1}^{I} \omega_i^* \varphi(B_i^*), \tag{16.1}$$

kde ω_i^* jsou koeficienty a B_i^* integrační body formule; symbol I označuje počet integračních bodů. Nejjednodušší formulí typu (16.1) je formule

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \frac{1}{2}\varphi(R_0), \tag{16.2}$$

kde $R_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ je těžiště $\overline{T}_0$. Dva další příklady typu (16.1) jsou tyto formule:

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \frac{1}{6}(\varphi(R_1) + \varphi(R_2) + \varphi(R_3)), \tag{16.3}$$

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \frac{1}{6}(\varphi(S_1) + \varphi(S_2) + \varphi(S_3)), \tag{16.4}$$

kde $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$ jsou vrcholy trojúhelníka $\overline{T}_0$ a $S_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $S_2(0, \frac{1}{2})$, $S_3(\frac{1}{2}, 0)$ půlicí body jeho stran. Užitím vztahu

$$\int_{T_0} \xi_1^j \xi_2^k\,\mathrm{d}\xi = \frac{j!k!}{(j+k+2)!} \tag{16.5}$$

můžeme snadno dokázat, že kvadraturní formule (16.2), (16.3) jsou stupně přesnosti $d = 1$ a že kvadraturní formule (16.4) má stupeň přesnosti $d = 2$. Podobně lze zjistit, že kvadraturní formule

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \frac{1}{120}\Big(3\sum_{i=1}^{3}\varphi(R_i) + 8\sum_{j=1}^{3}\varphi(S_j) + 27\varphi(R_0)\Big)$$

má stupeň přesnosti $d = 3$. (Mnoho dalších kvadraturních formulí na $\overline{T}_0$ včetně tzv. *konických součinových formulí* lze nalézt v [St]; o konických součinových formulích viz též [Že3]. Zde pouze poznamenáváme, že tyto formule jsou založeny na myšlence transformovat trojúhelník na čtverec (resp. čtyřstěn na krychli) a potom užít ve směru každé souřadné osy Gaussovu integrační formuli zvoleného stupně přesnosti.)

Podle věty o transformaci integrálu platí

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x = |J_T| \int_{T_0} F^*(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi, \tag{16.6}$$

kde

$$F^*(\xi_1, \xi_2) = F(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)), \tag{16.7}$$

přičemž $x_1^*(\xi_1, \xi_2)$, $x_2^*(\xi_1, \xi_2)$ jsou pravé strany (14.1). Položme

$$\omega_{i,T} = |J_T|\omega_i^*, \quad B_{i,T} = (x_1^*(B_i^*), x_2^*(B_i^*)). \tag{16.8}$$

Vztahy (16.6), (16.8) a (16.1) dávají

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x \doteq \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,T} F(B_{i,T}), \tag{16.9}$$

protože podle věty 14.1 je $F(B_{i,T}) = F^*(B_i^*)$.

Uveďme několik příkladů. V případě formule (16.2) platí

$$I = 1,\ \omega_1^* = \frac{1}{2},\ B_1^* = R_0,\ \omega_{1,T} = \frac{1}{2}|J_T| \equiv \mathrm{mes}_2 T,\ B_{1,T} = P_0.$$

Formule (16.9) má tedy v tomto případě tvar

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x \doteq (\mathrm{mes}_2 T) F(P_0). \tag{16.10}$$

V případě formule (16.3) máme

$$I = 3,\ \omega_i^* = \frac{1}{6},\ B_i^* = R_i,\ \omega_{i,T} = \frac{1}{6}|J_T| \equiv \frac{1}{3}\mathrm{mes}_2 T,\ B_{i,T} = P_i\ (i = 1, 2, 3)$$

a formule (16.9) má tvar

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{1}{3}\mathrm{mes}_2 T \sum_{i=1}^{3} F(P_i). \tag{16.11}$$

V případě formule (16.4) platí

$$I = 3,\ \omega_i^* = \frac{1}{6},\ B_i^* = S_i,\ \omega_{i,T} = \frac{1}{6}|J_T| \equiv \frac{1}{3}\mathrm{mes}_2 T,\ B_{i,T} = Q_i\ (i = 1, 2, 3),$$

kde Q_1, Q_2, Q_3 jsou půlicí body stran trojúhelníka $\overline{T}$. Tedy formule (16.9) má v tomto případě tvar

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{1}{3}\mathrm{mes}_2 T \sum_{i=1}^{3} F(Q_i). \tag{16.12}$$

Aproximovat funkcionál

$$L(v) = \int_\Omega v f\,\mathrm{d}x, \quad f \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \tag{16.13}$$

pro $v \in X_h^{(n)} \subset W_2^1(\Omega)$ kvadraturní formulí (16.9) znamená nahradit (16.13) funkcionálem

$$L_h(v) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,T} f(B_{i,T}) v(B_{i,T}) \quad \forall v \in X_h^{(n)}, \tag{16.14}$$

který je definován na $X_h^{(n)}$. V případě $I = 1$ má vztah (16.14) tvar

$$L_h(v) = \sum_{\overline{T}\in\mathcal{T}_h} (\mathrm{mes}_2 T) f(P_0^T) v(P_0^T) \quad \forall v \in X_h^{(n)}. \tag{16.15}$$

Aproximovat funkcionál

$$a(v,w) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j}(x) \right) \mathrm{d}x, \;\; k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega}) \;\; \forall v,w \in W_2^1(\Omega) \tag{16.16}$$

pro $v, w \in X_h^{(n)} \subset W_2^1(\Omega)$ kvadraturní formulí (16.9) znamená nahradit (16.16) funkcionálem

$$a_h(v,w) = \sum_{\overline{T}\in\mathcal{T}_h} \sum_{m=1}^{I} \sum_{i,j=1}^{2} \omega_{m,T} k_{ij}(B_{m,T}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(B_{m,T}) \frac{\partial w}{\partial x_j}(B_{m,T}) \; \forall v,w \in X_h^{(n)}, \tag{16.17}$$

který je definován na $X_h^{(n)}$. V případě $I = 1$ má vztah (16.17) tvar

$$a_h(v,w) = \sum_{\overline{T}\in\mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^{2} (\mathrm{mes}_2 T) k_{ij}(P_0^T) \frac{\partial v}{\partial x_i}(P_0^T) \frac{\partial w}{\partial x_j}(P_0^T) \; \forall v,w \in X_h^{(n)}. \tag{16.18}$$

Omezíme-li se v (16.18) na $v, w \in X_h^{(1)}$, potom se tento vztah zjednoduší:

$$a_h(v,w) = \sum_{\overline{T}\in\mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^{2} (\mathrm{mes}_2 T) k_{ij}(P_0^T) \left.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_T \left.\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|_T \quad \forall v,w \in X_h^{(1)}. \tag{16.19}$$

Diskrétní problém, který vznikne, když v Definici 10.2 aproximujeme bilineární formu $a(v,w)$ bilineární formou $a_h(v,w)$ (definovanou obecně vztahem (16.17)) a lineární formu $L(v)$ lineární formou $L_h(v)$ (definovanou obecně vztahem (16.14)), je formulován takto:

16.1. Problém. Najít takovou funkci $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, že

$$a_h(u_h^{(n)}, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h^{(n)}. \tag{16.20}$$

16.2. Poznámka. a) V případě, že užíváme hermiteovské konečné prvky uvedené v 13. kapitole, modifikuje se Problém 16.1 takto: Najít $u_h^{(3,H)} \in W_h^{(3,H)}$ tak, že

$$a_h(u_h^{(3,H)}, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h^{(3,H)}. \tag{16.21}$$

Jak dále uvidíme, tvar konečných prvků nemá na numerickou integraci vliv; numerická integrace je pouze ovlivňována stupněm polynomů užitých při konstrukci konečných prvků. Proto se budeme zabývat pouze Problémem 16.1.

b) Protože v této kapitole je $\partial\Omega = \Gamma_1$, máme $V = W_0^{1,2}(\Omega)$. Tento speciální tvar prostoru V nezjednoduší naše úvahy ohledně numerické integrace přes oblast $\overline{\Omega}$; jediným důvodem pro předpoklad $\partial\Omega = \Gamma_1$ je absence křivkového integrálu v lineární formě $L(v)$. Numerická integrace v případě křivkového integrálu podél Γ_2 bude studována v následující kapitole.

Naše teoretické úvahy začneme opět s abstraktním odhadem chyby, který bude zobecněním odhadu z věty 11.1.

16.3. Věta (o abstraktním odhadu chyby při použití numerické integrace na oblasti $\overline{\Omega}$). *Nechť $\overline{\Omega}$ je dvojrozměrná ohraničená uzavřená oblast s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť bilineární forma $a(v,w)$ definovaná vztahem* (16.16) *je ohraničená na $W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, tj.*

$$|a(v,w)| \leq M\|v\|_{1,\Omega}\|w\|_{1,\Omega} \quad \forall v,w \in W_2^1(\Omega) \quad (M = \text{const}), \tag{16.22}$$

a V-eliptická, tj.

$$\beta\|v\|_{1,\Omega}^2 \leq a(v,v) \quad \forall v \in V \quad (\beta = \text{const} > 0). \tag{16.23}$$

Nechť formy $L(v)$, $L_h(v)$ a $a_h(v,w)$ jsou dány vztahy (16.13), (16.14) *a* (16.17). *Nechť formy $a_h(v,w)$ jsou stejnoměrně $V_h^{(n)}$-eliptické, tj. nechť existují takové konstanty $\widetilde{\beta} > 0$ a $0 < h_0 < 1$, že*

$$\widetilde{\beta}\|v\|_{1,\Omega}^2 \leq a_h(v,v) \quad \forall v \in V_h^{(n)} \quad \forall h \in (0,h_0), \tag{16.24}$$

kde $n \geq 1$ je dané přirozené číslo. Potom existuje právě jedno řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2 *a při daném h právě jedno řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ Problému* 16.1 *a pro všechna $h \in (0,h_0)$ platí*

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq C\Bigg\{ \inf_{v \in W_h^{(n)}} \|u - v\|_{1,\Omega} +$$

$$+ \sup_{\substack{w \in V_h^{(n)} \\ w \neq 0}} \frac{|L(w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} + \inf_{v \in W_h^{(n)}} \sup_{\substack{w \in V_h^{(n)} \\ w \neq 0}} \frac{|a(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \Bigg\}, \tag{16.25}$$

kde konstanta C nezávisí na řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ a prostoru $X_h^{(n)}$.

Důkaz. A) Předpoklady (16.13), (16.22) a (16.23) zaručují jednoznačnou existenci řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2 (viz 7. kapitolu). Podobně jako v 10. kapitole předpoklad (16.24) implikuje při daném n jednoznačnou existenci řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ Problému 16.1.

B) Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq \|u - v\|_{1,\Omega} + \|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W_h^{(n)}. \tag{16.26}$$

Abychom odhadli výraz $\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}$, zvolme $v \in W_h^{(n)}$ libovolně s výjimkou $v = u_h^{(n)}$. Protože $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, platí $u_h^{(n)} - v \in V_h^{(n)}$ a vztahy (16.24) a (16.20) implikují

$$\widetilde{\beta}\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}^2 \leq a_h(u_h^{(n)} - v, u_h^{(n)} - v) = L_h(u_h^{(n)} - v) - a_h(v, u_h^{(n)} - v). \tag{16.27}$$

Protože $V_h^{(n)} \subset V$, platí podle (6.11) a (6.9) (s $\Gamma_2 = \emptyset$)

$$a(u - v, u_h^{(n)} - v) - L(u_h^{(n)} - v) + a(v, u_h^{(n)} - v) = 0.$$

Přičtěme toto vyjádření nuly k pravé straně nerovnosti (16.27). S užitím (16.22) potom nalezneme

$$\widetilde{\beta}\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}^2 \le M\|u - v\|_{1,\Omega}\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} + |L_h(u_h^{(n)} - v) - L(u_h^{(n)} - v)| +$$
$$+ |a(v, u_h^{(n)} - v) - a_h(v, u_h^{(n)} - v)|.$$

Dělíme-li tuto nerovnost výrazem $\widetilde{\beta}\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}$ a položíme-li pro stručnost $w := u_h^{(n)} - v$, vidíme, že platí

$$\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} \le (M/\widetilde{\beta})\|u - v\|_{1,\Omega} +$$
$$+ (1/\widetilde{\beta}) \sup_{\substack{w \in V_h^{(n)} \\ w \neq 0}} \left\{ \frac{|L_h(w) - L(w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} + \frac{|a(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \right\}.$$

Kombinujeme-li tento výsledek s nerovností (16.26) a vezmeme-li infimum vzhledem k $v \in W_h^{(n)}$, dostaneme (16.25), kde $C = \max(1 + M/\widetilde{\beta}, 1/\widetilde{\beta})$. $\square$

První člen na pravé straně (16.25) vyjadřuje chybu interpolace metody konečných prvků a může být snadno odhadnut pomocí výsledků 14. kapitoly. Druhý člen je horní hranice chyby vzniklé v důsledku numerické integrace lineární formy $L(v)$ a třetí člen vyjadřuje horní hranici chyby vzniklé v důsledku numerické integrace bilineární formy $a(v, w)$. Odhad obou těchto horních hranic je hlavním obsahem této kapitoly.

Začneme s důkazem lemmatu, které má velký význam ve všech úvahách týkajících se odhadů chyb numerické integrace.

16.4. Lemma. *Nechť $k \ge 1$ je dané přirozené číslo. Potom*

$$|\varphi|_{j,T_0} \le C_1 |\varphi|_{i,T_0}, \quad 0 \le i \le j \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2(k), \tag{16.28}$$

$$\max_{|\alpha|=j} \max_{\overline{T}_0} |D^\alpha \varphi(\xi_1, \xi_2)| \le C_2 |\varphi|_{j,T_0}, \quad j \ge 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2(k), \tag{16.29}$$

kde konstanty C_1, C_2 závisejí pouze na daném čísle k.

Důkaz. Pišme libovolný polynom $\varphi \in \mathcal{P}_2(k)$ ve tvaru

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{t=0}^{k} \sum_{r+s=t} A_{rs}^{(t)} \xi_1^r \xi_2^s. \tag{16.30}$$

Počet koeficientů $A_{rs}^{(t)}$ je $N(k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. Položme

$$m = m(j) \equiv N(k) - N(j-1),$$

kde $0 \le j \le k$. Uvažujme lineární prostor $R^m = R^1 \times \cdots \times R^1$, kde R^1 je prostor reálných čísel. Pro $a = (a_1, \ldots, a_m) \in R^m$, $b = (b_1, \ldots, b_m) \in R^m$ platí

$$\beta a = (\beta a_1, \ldots, \beta a_m), \quad a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m),$$

kde $\beta \in R^1$.

Ke každému $a \in R^m$ zvolme polynom $\varphi_a \in \mathcal{P}_2(k)$, jehož koeficienty jsou tvaru

$$A_{k,0}^{(k)} = a_1,\ A_{k-1,1}^{(k)} = a_2,\ \ldots,\ A_{0,k}^{(k)} = a_{k+1},$$

$$A_{k-1,0}^{(k-1)} = a_{k+2},\ A_{k-2,1}^{(k-1)} = a_{k+3},\ \ldots,\ A_{0,k-1}^{(k-1)} = a_{2k+1},$$

$$\ldots$$

$$A_{j,0}^{(j)} = a_{m-j-1},\ A_{j-1,1}^{(j)} = a_{m-j},\ \ldots,\ A_{0,j}^{(j)} = a_m.$$

Zbývající koeficienty $A_{rs}^{(t)}$ $(t < j)$ jsou libovolné. Ukažme, že zobrazení $a \to |\varphi_a|_{j,T_0}$ je norma v prostoru R^m: Pro $a = (0, \ldots, 0)$ platí $|\varphi_a|_{j,T_0} = 0$; jestliže $|\varphi_a|_{j,T_0} = 0$, potom $\varphi_a \in \mathcal{P}_2(j-1)$, takže platí $a = (0, \ldots, 0)$. Jestliže $b = \beta a \in R^m$, potom

$$|\varphi_b|_{j,T_0} = |\beta\varphi_a|_{j,T_0} = |\beta| \cdot |\varphi_a|_{j,T_0}.$$

Konečně,

$$|\varphi_{a+b}|_{j,T_0} = |\varphi_a + \varphi_b|_{j,T_0} \le |\varphi_a|_{j,T_0} + |\varphi_b|_{j,T_0}.$$

Protože všechny normy v konečněrozměrném prostoru R^m jsou ekvivalentní, platí

$$C_1(k,j)\left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)^{1/2} \le |\varphi_a|_{j,T_0} \le C_2(k,j)\left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)^{1/2}, \tag{16.31}$$

kde kladné konstanty $C_1(k,j)$, $C_2(k,j)$ závisejí pouze na k a j. Nechť $0 \le i \le j$ a nechť $\varphi \in \mathcal{P}_2(k)$. Potom podle (16.31) platí

$$|\varphi|_{j,T_0} \le C_2(k,j)[(A_{k,0}^{(k)})^2 + \cdots + (A_{0,j}^{(j)})^2]^{1/2}, \tag{16.32}$$

$$C_1(k,i)[(A_{k,0}^{(k)})^2 + \cdots + (A_{0,i}^{(i)})^2]^{1/2} \le |\varphi|_{i,T_0}. \tag{16.33}$$

Násobíme-li (16.33) výrazem $C_2(k,j)/C_1(k,i)$, dostaneme z (16.32) a (16.33) nerovnost

$$|\varphi|_{j,T_0} \le (C_2(k,j)/C_1(k,i))|\varphi|_{i,T_0}.$$

Tato nerovnost dokazuje tvrzení (16.28), přičemž

$$C_1 = \max_{0 \le i \le j \le k} \frac{C_2(k,j)}{C_1(k,i)}.$$

Co se týče tvrzení (16.29), platí

$$\max_{(\xi_1,\xi_2)\in\overline{T}_0,\ |\alpha|=j} |D^\alpha \varphi| \le C_3(k,j)(|A_{k,0}^{(k)}| + \cdots + |A_{0,j}^{(j)}|) \le$$

$$\le C_3(k,j)m^{1/2}[(A_{k,0}^{(k)})^2 + \cdots + (A_{0,j}^{(j)})^2]^{1/2}; \tag{16.34}$$

druhá nerovnost plyne z Cauchyovy nerovnosti (7.23). Položme nyní $i = j$ v (16.33), násobme získaný vztah výrazem $C_3(k,j)m^{1/2}/C_1(k,j)$ a kombinujme výsledek s nerovností (16.34). Získáme tvrzení (16.29), přičemž

$$C_2 = (N(k))^{1/2} \max_{0 \le j \le k} \frac{C_3(k,j)}{C_1(k,j)}.$$

Tím je důkaz lemmatu dokončen. $\square$

16.5. Chybové funkcionály. Kvůli stručnosti vyjadřování zaveďme *chybové funkcionály* $E_T(w)$ a $E^*(\varphi)$ vztahy

$$E_T(w) = \int_T w(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,T} w(B_{i,T}), \tag{16.35}$$

$$E^*(\varphi) = \int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi - \sum_{i=1}^{I} \omega_i^* \varphi(B_i^*). \tag{16.36}$$

Funkcionál $E_T(w)$ vyjadřuje chybu numerické integrace funkce $w(x_1, x_2)$ na trojúhelníku $\overline{T}$ a funkcionál $E^*(\varphi)$ vyjadřuje chybu numerické integrace funkce $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ na trojúhelníku $\overline{T}_0$. Podle (16.6)–(16.9), (16.35) a (16.36) platí

$$E_T(F) = E^*(F^*|J_T|) = |J_T| \cdot E^*(F^*)\,. \tag{16.37}$$

Poznamenejme, že rozdíl $L(v) - L_h(v)$ může být stručně psán ve tvaru

$$L(v) - L_h(v) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} E_T(vf) \tag{16.38}$$

a rozdíl $a(v, w) - a_h(v, w)$ ve tvaru

$$a(v, w) - a_h(v, w) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} E_T\biggl(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \biggr). \tag{16.39}$$

16.6. Lemma. *Nechť $n \geq 1$ je dané přirozené číslo. Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$, kde $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$ (připomínáme, že symbol $\{\mathcal{T}_h\}$ označuje množinu triangulací, která splňuje podmínku minimálního úhlu – viz* (8.8), (8.9)). *Nechť*

$$k_{ij} \in C^1(\overline{T}) \quad (i, j = 1, 2) \tag{16.40}$$

a nechť kvadraturní formule na referenčním trojúhelníku $\overline{T}_0$ je taková, že

$$E^*(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2(2n - 2)\,. \tag{16.41}$$

Potom pro všechny funkce $v, w \in X_h^{(n)}$ platí

$$\left| E_T\biggl(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \biggr) \right| \leq C h_T \max_{i,j=1,2} |k_{ij}|_{C^1(\overline{T})} \|v\|_{1,T} \|w\|_{1,T}\,, \tag{16.42}$$

kde konstanta C nezávisí na $\overline{T}$, k_{ij}, v a w.

Důkaz. Podle (16.37) platí

$$E_T\biggl(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \biggr) = |J_T| \cdot E^*\biggl(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}^* \Bigl(\frac{\partial v}{\partial x_i} \Bigr)^* \Bigl(\frac{\partial w}{\partial x_j} \Bigr)^* \biggr).$$

Stejně jako v důkazu části a) věty 14.2 nalezneme, že

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^* = \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r^*}{\partial x_i}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^* = \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s^*}{\partial x_j}.$$

Odtud

$$\left|E_T\left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j}\right)\right| \le |J_T| \sum_{r,s=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left|\frac{\partial \xi_r^*}{\partial x_i}\right| \cdot \left|\frac{\partial \xi_s^*}{\partial x_j}\right| \cdot \left|E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right)\right|. \tag{16.43}$$

Předpoklad (16.40) a část a) věty 14.2 implikují, že $k_{ij}^* \in C^1(\overline{T}_0)$. Odtud, ze vztahu (16.36) a lemmatu 16.4 plyne, že

$$\left|E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right)\right| \le \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{I} |\omega_m^*|\right) \left\|k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le$$

$$\le C\|k_{ij}^*\|_{C^0(\overline{T}_0)} \left\|\frac{\partial v^*}{\partial \xi_r}\right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \left\|\frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le C\|k_{ij}^*\|_{C^1(\overline{T}_0)} |v^*|_{1,T_0} |w^*|_{1,T_0}. \tag{16.44}$$

Pro pevná v^*, w^* položme

$$F(k_{ij}^*) = E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right).$$

Získali jsme lineární ohraničený funkcionál na $C^1(\overline{T}_0)$, jehož norma je podle nerovnosti (16.44) menší nebo rovna $C|v^*|_{1,T_0}|w^*|_{1,T_0}$. Dále, protože $v^* \in \mathcal{P}_2(n)$, $w^* \in \mathcal{P}_2(n)$, předpoklad (16.41) implikuje

$$F(k_{ij}^*) = 0 \quad \forall k_{ij}^* \in \mathcal{P}_2(0).$$

Odtud podle Bramble-Hilbertova lemmatu (ve tvaru 4.4)

$$\left|E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right)\right| \le C|k_{ij}^*|_{C^1(\overline{T}_0)} |v^*|_{1,T_0} |w^*|_{1,T_0}.$$

Tato nerovnost a vztahy (14.23), (14.15) a (14.44) implikují

$$\left|E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right)\right| \le Ch_T |k_{ij}|_{C^1(\overline{T})} |v|_{1,T} |w|_{1,T}.$$

Kombinujeme-li tento výsledek s (16.43) a užijeme-li větu 14.1, dostaneme tvrzení věty 16.5. □

16.7. Věta. *Nechť bilineární forma $a(v,w)$, která je definována vztahem (16.16), je V-eliptická. Nechť funkce k_{ij} splňují podmínku*

$$k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}) \quad (i,j = 1,2). \tag{16.45}$$

Nechť $n \ge 1$ je dané přirozené číslo. Nechť kvadraturní formule (16.9) užitá pro výpočet bilineární formy $a_h(v,w)$ (viz (16.17)) má stupeň přesnosti $d = 2n-2$. Potom pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$, kde $h \in (0,h_0)$ a h_0 je dostatečně malé, platí

$$\widetilde{\beta}\|v\|_{1,\Omega}^2 \le a_h(v,v) \quad \forall v \in V_h^{(n)}, \quad \forall h \in (0,h_0) \quad (\widetilde{\beta} = \text{const} > 0),$$

tj. podmínka (16.24) stejnoměrné $V_h^{(n)}$-elipticity je splněna na množině $\{V_h^{(n)}\}$ korespondující s množinou $\{\mathcal{T}_h\}$.

Důkaz. Všechny podmínky lemmatu 16.6 jsou splněny pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$: předpoklad (16.45) dává (16.40) a protože formule (16.9) je generována formulí (16.1), vztah (16.41) také platí.

Pro stručnost položme

$$B_0 = \max_{i,j=1,2} |k_{ij}|_{C^1(\overline{\Omega})} \,. \tag{16.46}$$

Nerovnost (16.42) pak dává

$$\left| E_T\left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right| \le C B_0 h_T \|v\|_{1,T}^2 \,.$$

Odtud dostáváme pro všechna $v \in X_h^{(n)}$

$$- \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} E_T\left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \ge -C B_0 h \|v\|_{1,\Omega}^2 \,.$$

Protože $V_h^{(n)} \subset V$ a $a(v,w)$ je V-eliptická, platí

$$\beta \|v\|_{1,\Omega}^2 \le a(v,v) \quad \forall v \in V_h^{(n)} \quad (\beta = \text{const} > 0).$$

Poslední dvě nerovnosti spolu se vztahem (16.39) implikují

$$a_h(v,v) \ge (\beta - C B_0 h) \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V_h^{(n)}.$$

Položme $h_0 = \beta/(2CB_0)$. Potom podmínka (16.24) stejnoměrné $V_h^{(n)}$-elipticity platí pro $\widetilde{\beta} = \beta/2$. $\square$

16.8. Lemma. *Nechť $n \ge 1$ je dané přirozené číslo. Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$, kde $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Nechť*

$$k_{ij} \in C^n(\overline{T}) \quad (i,j = 1,2) \tag{16.47}$$

a nechť kvadraturní formule na referenčním trojúhelníku $\overline{T}_0$ je taková, že

$$E^*(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2(2n-2) \,. \tag{16.48}$$

Potom pro všechny funkce $v, w \in X_h^{(n)}$ platí

$$\left| E_T\left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \right| \le C h_T^n \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^n(\overline{T})} \|v\|_{n,T} \|w\|_{1,T} \,, \tag{16.49}$$

Důkaz. Projdeme-li důkaz lemmatu 16.6, vidíme, že stačí dokázat

$$\left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \le C h_T^n \|k_{ij}\|_{C^n(\overline{T})} \|v\|_{n,T} \|w\|_{1,T} \,. \tag{16.50}$$

Předpoklad (16.47) a lemma 14.4 implikují, že funkce

$$\psi = k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \tag{16.51}$$

náleží do $C^n(\overline{T}_0)$, takže platí

$$\left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \equiv \left| E^*\left(\psi \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \le C \left\| \psi \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le$$
$$\le C \|\psi\|_{C^0(\overline{T}_0)} \left\| \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le C \|\psi\|_{C^n(\overline{T}_0)} |w^*|_{1,T_0} \,.$$

V poslední nerovnosti jsme také užili odhad (16.29).

Protože $\partial w^*/\partial \xi_s \in \mathcal{P}_2(n-1)$, předpoklad (16.48) dává

$$E^*\left(\psi \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{P}_2(n-1)\,.$$

Užijeme-li lemma 4.4, kde nyní $F(\psi) = E^*(\psi\, \partial w^*/\partial \xi_s)$ s pevným $w^* \in \mathcal{P}_2(n)$, dostaneme vzhledem k posledním dvěma vztahům

$$\left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \le C |\psi|_{C^n(\overline{T}_0)} |w^*|_{1,T_0}\,. \tag{16.52}$$

Vztah (16.51), věta o derivování součinu spojitě diferencovatelných funkcí a fakt, že $D^\alpha v^* \equiv 0$ pro $|\alpha| = n+1$, dávají

$$|\psi|_{C^n(\overline{T}_0)} \le C(n) \sum_{m=0}^{n} |k_{ij}^*|_{C^m(\overline{T}_0)} \left| \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \right|_{C^{n-m}(\overline{T}_0)} \le$$

$$\le C(n) \sum_{m=1}^{n} |k_{ij}^*|_{C^m(\overline{T}_0)} |v^*|_{C^{n+1-m}(\overline{T}_0)}\,,$$

protože $|v^*|_{C^{n+1}(\overline{T}_0)} = 0$ pro všechna $v^* \in \mathcal{P}_2(n)$. Lemma 16.4 a vztahy (14.15), (14.23) a (14.44) pak implikují

$$|\psi|_{C^n(\overline{T}_0)} \le C(n) \sum_{m=1}^{n} |k_{ij}^*|_{C^m(\overline{T}_0)} |v^*|_{n+1-m,T_0} \le$$

$$\le C(n) \sum_{m=1}^{n} h_T^m |k_{ij}|_{C^m(\overline{T})} h_T^{n-m} |v|_{n+1-m,T} \le C(n) h_T^n \|k_{ij}\|_{C^n(\overline{T})} \|v\|_{n,T}\,.$$

Tento výsledek a vztah (16.52) spolu s (14.15) a (14.23) implikují nerovnost (16.50), což jsme chtěli dokázat. □

16.9. Lemma. *Nechť $n \ge 1$ je dané přirozené číslo. Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$, kde $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Nechť*

$$f \in C^n(\overline{T}) \tag{16.53}$$

a nechť kvadraturní formule na referenčním trojúhelníku $\overline{T}_0$ je taková, že

$$E^*(p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_2(2n-2). \tag{16.54}$$

Potom pro všechny funkce $v \in X_h^{(n)}$ platí

$$|E_T(vf)| \le C h_T^n (\mathrm{mes}_2 T)^{1/2} \|f\|_{C^n(\overline{T})} \|v\|_{1,T}\,, \tag{16.55}$$

kde konstanta C nezávisí na $\overline{T}$, f a v.

Důkaz. A) Nejprve probereme případ $n = 1$. Nechť $\varphi \in C^1(\overline{T}_0)$. Potom podle (16.36)

$$|E^*(\varphi)| \le \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{I} |\omega_i^*| \right) \|\varphi\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le C \|\varphi\|_{C^1(\overline{T}_0)} \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{T}_0)\,.$$

Tento vztah, linearita funkcionálu $E^*(\varphi)$ na $C^1(\overline{T}_0)$ a předpoklad (16.54) (kde nyní $n = 1$) dávají podle Lemmatu 4.4

$$|E^*(\varphi)| \le C |\varphi|_{C^1(\overline{T}_0)} \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{T}_0)\,. \tag{16.56}$$

Položme

$$\varphi = v^* f^*, \tag{16.57}$$

kde v^*, f^* jsou funkce v, f transformované z $\overline{T}$ na $\overline{T}_0$:

$$v^*(\xi_1, \xi_2) = v(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)), \tag{16.58}$$

$$f^*(\xi_1, \xi_2) = f(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)). \tag{16.59}$$

Podle Lemmatu 14.4 a předpokladu (16.53) platí, že $f^* \in C^1(\overline{T}_0)$. Lineárnost transformace (14.1) dává $v^* \in \mathcal{P}_2(1)$. Odtud $v^* f^* \in C^1(\overline{T}_0)$. Užijeme-li vztah (16.57) a větu o derivování součinu spojitě diferencovatelných funkcí, dostaneme

$$|\varphi|_{C^1(\overline{T}_0)} \leq C(|v^*|_{C^1(\overline{T}_0)} |f^*|_{C^0(\overline{T}_0)} + |v^*|_{C^0(\overline{T}_0)} |f^*|_{C^1(\overline{T}_0)}). \tag{16.60}$$

Lemma 16.4 a vztahy (14.15), (14.23), (14.44) potom implikují

$$|\varphi|_{C^1(\overline{T}_0)} \leq C\|f\|_{C^1(\overline{T})} \|v\|_{1,T}. \tag{16.61}$$

Konečně, ze vztahu (16.37) plyne

$$|E_T(vf)| = |J_T| \cdot |E^*(v^* f^*)|. \tag{16.62}$$

Podle (14.4) a (14.15) platí

$$|J_T| \leq Ch_T^2 \leq Ch_T(\mathrm{mes}_2 T)^{1/2}. \tag{16.63}$$

Vztahy (16.56), (16.57), (16.61) – (16.63) implikují (16.55) v případě $n = 1$.

B) V případě $n \geq 2$ vyjdeme z identity (16.62) a napíšeme $E^*(v^* f^*)$ ve tvaru

$$E^*(v^* f^*) = E^*(Af^*) + E^*((v^* - A)f^*), \tag{16.64}$$

kde A je konstanta závislá na v^* a definovaná vztahem

$$\int_{T_0} (v^* - A)\, \mathrm{d}\xi = 0. \tag{16.65}$$

Platí

$$|A| = 2\left| \int_{T_0} v^*\, \mathrm{d}\xi \right| \leq \sqrt{2} \|v^*\|_{0,T_0}, \tag{16.66}$$

kde nerovnost je důsledkem Schwarzovy nerovnosti (viz větu $\mathcal{P}$.15).

Nyní odhadneme oba výrazy na pravé straně (16.64). Předpoklad (16.53) a Lemma 14.4 dávají $f^* \in C^n(\overline{T}_0)$. Užitím této skutečnosti a odhadu (16.66) můžeme psát vzhledem k (16.36)

$$|E^*(Af^*)| \leq \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{I} |\omega_i^*| \right) |A| \cdot |f^*|_{C^0(\overline{T}_0)} \leq C\|v^*\|_{0,T_0} \|f^*\|_{C^n(\overline{T}_0)}.$$

Pro pevné v^* (a tedy také pro pevné $A \in \mathcal{P}_2(0)$) položme

$$F(f^*) = E^*(Af^*).$$

Vidíme, že $F(f^*)$ je lineární ohraničený funkcionál na $C^n(\overline{T}_0)$ s normou menší nebo rovnou $C\|v^*\|_{C^0(\overline{T}_0)}$. Podle předpokladu (16.54) (který v tomto kroku není plně využit) je

$$F(f^*) = 0 \quad \forall f^* \in \mathcal{P}_2(n-1).$$

Všechny předpoklady Lemmatu 4.4 jsou tedy splněny a my dostáváme

$$|E^*(Af^*)| \leq C\|v^*\|_{0,T_0} |f^*|_{C^n(\overline{T}_0)}.$$

Užijeme-li vztahy (14.23) a (14.44), nalezneme, že

$$|E^*(Af^*)| \leq Ch_T^n(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2}\|v\|_{0,T}|f|_{C^n(\overline{T})}\,. \tag{16.67}$$

Dále platí

$$|E^*((v^*-A)f^*)| \leq C\|(v^*-A)f^*\|_{C^0(\overline{T}_0)} \leq$$

$$\leq C\|(v^*-A)\|_{C^0(\overline{T}_0)}\|f^*\|_{C^0(\overline{T}_0)} \leq C\|v^*-A\|_{0,T_0}\|f^*\|_{C^{n-1}(\overline{T}_0)}\,.$$

V poslední nerovnosti jsme užili Lemma 16.4 a skutečnost, že $f^* \in C^n(\overline{T}_0)$. Protože $v^*-A \in \mathcal{P}_2(n)$, z předpokladu (16.54) plyne

$$E^*((v^*-A)f^*) = 0 \quad \forall f^* \in \mathcal{P}_2(n-2)\,.$$

Užijeme-li Lemma 4.4, kde nyní $F(f^*) = E^*((v^*-A)f^*)$ s pevným v^*-A, dostaneme z posledních dvou vztahů

$$|E^*((v^*-A)f^*)| \leq C\|v^*-A\|_{0,T_0}|f^*|_{C^{n-1}(\overline{T}_0)}$$

a tím spíše

$$|E^*((v^*-A)f^*)| \leq C\|v^*-A\|_{1,T_0}|f^*|_{C^{n-1}(\overline{T}_0)}\,.$$

Poincaréova nerovnost (viz (2.30)) a vztah (16.65) implikují

$$\|v^*-A\|_{1,T_0} \leq C|v^*-A|_{1,T_0} = C|v^*|_{1,T_0}\,.$$

Odtud podle (14.23) a (14.44)

$$|E^*((v^*-A)f^*)| \leq Ch_T^n(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2}|v|_{1,T}|f|_{C^{n-1}(\overline{T})}\,. \tag{16.68}$$

Zkombinujeme-li (16.64), (16.67) a (16.68) s (16.62) a užijeme-li vztahy (14.14) a (14.15), dostaneme (16.55) v případě $n \geq 2$. $\square$

16.10. Věta. *Nechť forma $a(v,w)$, která je definována vztahem (16.16), je V-eliptická. Nechť*

$$f \in C^n(\overline{\Omega}), \quad k_{ij} \in C^n(\overline{\Omega}) \quad (i,j=1,2), \tag{16.69}$$

kde $n \geq 1$ je dané přirozené číslo a $\Omega \subset R^2$ je ohraničená oblast s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť formy $L_h(v)$ a $a_h(v,w)$, které jsou definovány vztahy (16.14) a (16.17), jsou vypočteny kvadraturními formulemi (16.9) stupně přesnosti $d = 2n-2$. Nechť $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$ je přesné řešení Problému 6.2 (které existuje právě jedno - viz kapitolu 7). Potom pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$, kde $h \in (0,h_0)$, platí

$$\|u-u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq Ch^n\left\{\|f\|_{C^n(\overline{\Omega})} + \|u\|_{n+1,\Omega}\left(1+\max_{i,j=1,2}\|k_{ij}\|_{C^n(\overline{\Omega})}\right)\right\}, \tag{16.70}$$

kde $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ je jediné řešení Problému 16.1 definované na triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$ a kde konstanta C nezávisí na $\mathcal{T}_h$, h, u, f a k_{ij}.

Důkaz. A) V-elipticita bilineární formy $a(v,w)$ a předpoklad (16.69) zaručují, že podmínky věty 7.3 jsou splněny. Tedy řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ (a podle předpokladu dokonce $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$) Problému 6.2 existuje právě jedno.

Podle věty 16.7 jsou bilineární formy $a_h(v,w)$ stejnoměrně V_h-eliptické pro $h \in (0,h_0)$. Tedy stejně jako v důkazu věty 10.3 lze dokázat, že existuje právě jedno řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ Problému 16.1, které je definováno na triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$.

Zcela stejným způsobem lze ukázat, že všechny podmínky věty 16.3 o abstraktním odhadu chyby jsou splněny; platí tedy nerovnost (16.25).

B) Zbývá odhadnout pravou stranu nerovnosti (16.25). Nechť $I_h^{(n)}u \in W_h^{(n)}$ je $X_h^{(n)}$-interpolant řešení $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$, tj. funkce, která náleží do $W_h^{(n)}$ a splňuje vztahy $(I_h^{(n)}u)(P_i) = u(P_i)$ pro všechny uzlové body P_i triangulace $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Potom podle věty 8.4, což je důsledek věty 15.1, platí

$$\inf_{v \in W_h^{(n)}} \|u - v\|_{1,\Omega} \le \|u - I_h^{(n)}u\|_{1,\Omega} \le Ch^n |u|_{n+1,\Omega} \,. \tag{16.71}$$

Podle (16.38) a Lemmatu 16.9 dostaneme pro $w \in X_h^{(n)}$

$$|L(w) - L_h(w)| \le Ch^n \|f\|_{C^n(\overline{\Omega})} \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} (\mathrm{mes}_2 T)^{1/2} \|w\|_{1,T} \,.$$

Tento odhad a Cauchyova nerovnost implikují

$$|L(w) - L_h(w)| \le Ch^n (\mathrm{mes}_2 \Omega)^{1/2} \|f\|_{C^n(\overline{\Omega})} \|w\|_{1,\Omega} \,,$$

odkud

$$\sup_{\substack{w \in V_h^{(n)} \\ w \neq 0}} \frac{|L(w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \le Ch^n (\mathrm{mes}_2 \Omega)^{1/2} \|f\|_{C^n(\overline{\Omega})} \,. \tag{16.72}$$

Kvůli stručnosti položme

$$B_n = \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^n(\overline{\Omega})} \,.$$

Potom podle (16.39) a Lemmatu 16.8 platí

$$|a(I_h^{(n)}u, w) - a_h(I_h^{(n)}u, w)| \le CB_n h^n \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \|I_h^{(n)}u\|_{n,T} \|w\|_{1,T} \,.$$

Věta 15.1 implikuje

$$\|I_h^{(n)}u\|_{n,T} \le \|u\|_{n,T} + \|u - I_h^{(n)}u\|_{n,T} \le C\|u\|_{n+1,T}$$

a z Cauchyovy nerovnosti potom plyne

$$\sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \|I_h^{(n)}u\|_{n,T} \|w\|_{1,T} \le C\|u\|_{n+1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \,.$$

Tedy platí

$$\inf_{v \in W_h^{(n)}} \sup_{\substack{w \in V_h^{(n)} \\ w \neq 0}} \frac{|a(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \le CB_n h^n \|u\|_{n+1,\Omega} \,. \tag{16.73}$$

Zkombinujeme-li odhady (16.71) – (16.73) s nerovností (16.25), dostaneme odhad (16.70), což jsme chtěli dokázat. ☐

16.11. Věta. *Nechť jsou splněny všechny předpoklady Věty 16.10 s výjimkou $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$. Nechť funkce $\overline{u}$, která definuje Dirichletovu okrajovou podmínku v Problému 6.2 je tak hladká, že existuje taková funkce $z \in W_2^2(\Omega)$, že $\gamma z = \overline{u}$. Potom*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} = 0 \,, \tag{16.74}$$

kde $u \in W_2^1(\Omega)$ je jediné řešení Problému 6.2 a $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ jediné řešení Problému 16.1 definované na triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$.

Podobně jako v případě Věty 11.3 důkaz vynecháváme a odkazujeme na monografii [Že2, důkaz věty 11.9].

17. Teorie numerické integrace v případě nehomogenní Neumannovy okrajové podmínky

Budeme předpokládat, že existuje konečná množina úseček $\{\overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_r\}$, že (viz Obr.17.1)

$$\overline{\Gamma}_2 = \bigcup_{k=1}^{r} \overline{S}_k, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad (i \neq j), \tag{17.1}$$

kde S_k je vnitřek úsečky $\overline{S}_k$ $(k = 1, \dots, r)$.

Obr. 17.1

17.1. Definice. Označení

$$q \in PC^n(\Gamma_2) \tag{17.2}$$

bude znamenat toto: Derivace $\widetilde{q}_k^{(j)}(s)$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ funkce

$$\widetilde{q}_k(s) := q\left(\hat{x}_1^k + \frac{\hat{x}_2^k - \hat{x}_1^k}{\overline{s}_k} s, \hat{y}_1^k + \frac{\hat{y}_2^k - \hat{y}_1^k}{\overline{s}_k} s\right), \tag{17.3}$$

kde $[\hat{x}_1^k, \hat{y}_1^k]$, $[\hat{x}_2^k, \hat{y}_2^k]$ jsou koncové body úsečky $\overline{S}_k$ a $\overline{s}_k = \mathrm{mes}_1 \overline{S}_k$, jsou spojité v $(0, \overline{s}_k)$ a platí

$$\Big| \lim_{s \to 0+} \widetilde{q}_k^{(j)}(s) \Big| < \infty\,, \qquad \Big| \lim_{s \to \overline{s}_k -} \widetilde{q}_k^{(j)}(s) \Big| < \infty\,,$$

kde $j = 0, 1, \dots, n$.

Jestliže položíme pro $j = 0, 1, \dots, n$

$$\widetilde{q}_k^{(j)}(0) = \lim_{s \to 0+} \widetilde{q}_k^{(j)}(s), \quad \widetilde{q}_k^{(j)}(\overline{s}_k) = \lim_{s \to \overline{s}_k -} \widetilde{q}_k^{(j)}(s)\,,$$

potom můžeme psát

$$\widetilde{q}_k \in C^n(\langle 0; \overline{s}_k \rangle) \quad (k = 1, \dots, r)\,. \tag{17.4}$$

Toto je význam předpokladu (17.2).

17.2. Poznámka. a) Symbol PC je zkratka anglického "piecewise continuous" (česky: po částech spojitá).

b) Norma funkce $q \in PC^n(\Gamma_2)$ může být definována vztahem

$$\|q\|_{PC^n(\Gamma_2)} := \max_{k=1,\dots,r} \max_{j=0,\dots,n} \max_{s\in\langle 0;\overline{s}_k\rangle} |\widetilde{q}_k^{(j)}(s)| \,. \tag{17.5}$$

c) Jestliže $P_k = \overline{S}_i \cap \overline{S}_j$, potom uzlový bod P_k má dva lokální významy na Γ_2: $P_k = P_m^i$ a $P_k = P_s^j$. V tomto případě neexistuje hodnota $q(P_k)$ a hodnoty $q(P_m^i)$ a $q(P_s^j)$ definujeme pomocí odpovídajících hodnot funkcí $\widetilde{q}_i$ a $\widetilde{q}_j$ (viz (17.3), (17.4) a Obr. 17.1).

Nechť $\mathcal{T}_h$ je daná triangulace oblasti $\overline{\Omega}$ a nechť

$$\mathcal{M}_h = \{\overline{T}_i \in \mathcal{T}_h : \ \mathrm{mes}_1(\partial T_i \cap \Gamma_2) > 0\}. \tag{17.6}$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat jenom takové triangulace $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$, že $\overline{T}_i \in \mathcal{M}_h$ má pouze jednu stranu společnou s $\overline{\Gamma}_2$.

Nechť $\overline{T}_i \in \mathcal{M}_h$ je libovolný hraniční trojúhelník. Potom existuje taková úsečka $\overline{S}_k$, že $l_i \subset \overline{S}_k$, kde značíme

$$l_j := \partial T_j \cap \Gamma_2 \quad \forall \overline{T}_j \in \mathcal{M}_h. \tag{17.7}$$

Položme

$$q_i(\tau) := q\left(x_1^i + \frac{x_2^i - x_1^i}{\mathrm{mes}_1 l_i}\tau, y_1^i + \frac{y_2^i - y_1^i}{\mathrm{mes}_1 l_i}\tau\right), \tag{17.8}$$

kde $0 \le \tau \le \mathrm{mes}_1 l_i$ a $[x_1^i, y_1^i]$, $[x_2^i, y_2^i]$ jsou koncové body úsečky l_i. Inkluse $l_i \subset \overline{S}_k$ zaručuje existenci takové hodnoty s_1, že

$$x_1^i = \hat{x}_1^k + \frac{\hat{x}_2^k - \hat{x}_1^k}{\overline{s}_k} s_1 \,, \quad y_1^i = \hat{y}_1^k + \frac{\hat{y}_2^k - \hat{y}_1^k}{\overline{s}_k} s_1 \,.$$

Tato skutečnost a identity

$$\frac{\hat{x}_2^k - \hat{x}_1^k}{\overline{s}_k} = \frac{x_2^i - x_1^i}{\mathrm{mes}_1 l_i} \,, \quad \frac{\hat{y}_2^k - \hat{y}_1^k}{\overline{s}_k} = \frac{y_2^i - y_1^i}{\mathrm{mes}_1 l_i}$$

implikují

$$q_i(\tau) = \widetilde{q}_k(s_1 + \tau) \quad (0 \le \tau \le \mathrm{mes}_1 l_i) \,. \tag{17.9}$$

Pro stručnost označme seminormu funkce $\widetilde{q}$ v $PC^n(\Gamma_2)$ symbolem

$$\widetilde{K}_n := \max_{k=1,\dots,r} \max_{s\in\langle 0;\overline{s}_k\rangle} |\widetilde{q}_k^{(n)}(s)| \,. \tag{17.10}$$

Potom podle (17.9)

$$\max_{\tau\in\langle 0;\mathrm{mes}_1 l_i\rangle} |q_i^{(n)}(\tau)| \le \widetilde{K}_n \quad \forall \overline{T}_i \in \mathcal{M}_h \,. \tag{17.11}$$

Dále uvažujme zobrazení

$$\left.\begin{aligned} x = \varphi_i^*(t) &\equiv x_1^i + (x_2^i - x_1^i)t \\ y = \psi_i^*(t) &\equiv y_1^i + (y_2^i - y_1^i)t \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t \le 1) \,, \tag{17.12}$$

které transformuje úsečku $I = \langle 0; 1\rangle$ vzájemně jednoznačně na úsečku l_i, a definujme funkci

$$q_i^*(t) := q(\varphi_i^*(t), \psi_i^*(t)), \quad t \in I \,. \tag{17.13}$$

Porovnáme-li (17.8) se (17.12), (17.13), nalezneme, že

$$q_i^*(t) = q_i(t\,\mathrm{mes}_1 l_i), \quad t \in I \,.$$

Odtud

$$\max_{t\in I}|q_i^{*(n)}(t)| = (\mathrm{mes}_1 l_i)^n \max_{s\in\langle 0;\mathrm{mes}_1 l_i\rangle} |q_i^{(n)}(s)|\,. \tag{17.14}$$

Vztahy (17.1) – (17.14) spolu s inklusí

$$\overline{S}_i \cap \overline{S}_j \subset \sigma_h \quad (i\neq j)\,,$$

kde σ_h je množina všech uzlových bodů v triangulaci $\mathcal{T}_h$, obsahují všechny předpoklady a pomocné výsledky týkající se funkce q, které budou potřebné v této kapitole.

Uvažujme nějakou integrační formuli na úsečce I

$$\int_0^1 G^*(t)\mathrm{d}t \doteq \sum_{j=1}^{J} \beta_j^* G^*(t_j)\,, \tag{17.15}$$

kde β_j^* jsou koeficienty a t_j integrační body formule. Podle definice křivkového integrálu platí

$$\int_{l_i} F(x,y)\mathrm{d}s = \mathrm{mes}_1 l_i \int_0^1 F(\varphi_i^*(t),\psi_i^*(t))\mathrm{d}t\,. \tag{17.16}$$

Vztahy (17.15) a (17.16) implikují

$$\int_{l_i} F(x,y)\mathrm{d}s \doteq \sum_{j=1}^{J} \beta_j^i F(B_j^i)\,, \tag{17.17}$$

kde

$$\beta_j^i = (\mathrm{mes}_1 l_i)\beta_j^*\,, \quad B_j^i = [\varphi_i^*(t_j),\psi_i^*(t_j)]\,. \tag{17.18}$$

Uvedeme dva příklady: v případě jednobodové formule platí

$$J=1,\quad \beta_1^*=1 \quad t_1=\frac{1}{2},\quad \beta_1^i=\mathrm{mes}_1 l_i,\quad B_1^i=P_0^i\,,$$

kde P_0^i je půlicí bod úsečky l_i, a v případě lichoběžníkové formule

$$J=2,\quad \beta_j^*=\frac{1}{2},\quad t_1=0,\quad t_2=1,\quad \beta_j^i=\frac{1}{2}\mathrm{mes}_1 l_i,\quad B_j^i=P_j^i \quad (j=1,2)\,,$$

kde P_1^i, P_2^i jsou koncové body úsečky l_i.

Protože $\overline{\Gamma}_2$ je sjednocení úseček l_i, aproximace $L_h^\Gamma(w)$ lineární formy $L^\Gamma(w)$, kde $w\in V_h$, je tvaru

$$L_h^\Gamma(w) = \sum_{\overline{T}_i\in\mathcal{M}_h} \sum_{j=1}^{J} \beta_j^i q(B_j^i) w(B_j^i)\,. \tag{17.19}$$

Je třeba poznamenat, že v případech $B_j^i \in \overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2$ a $B_j^i = \overline{S}_k\cap\overline{S}_m$ jsou hodnoty $q(B_j^i)$ definovány ve smyslu Poznámky 17.2c, tj. jako limitní hodnoty funkce $\widetilde{q}_i(s)$ $(s\in(0,\overline{s}_i))$ v odpovídajících koncových bodech úsečky $\langle 0;\overline{s}_i\rangle$.

Podobně jako v kapitole 16 definujeme chybové funkcionály

$$E_{l_i}(F) = \int_{l_i} F(x,y)\mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{J} \beta_j^i F(B_j^i)\,, \tag{17.20}$$

$$E_I^*(F_i^*) = \int_0^1 F_i^*(t)\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{J} \beta_j^* F_i^*(t_j)\,, \tag{17.21}$$

kde

$$F_i^*(t) = F(\varphi_i^*(t),\psi_i^*(t)) \quad ((x,y)\in l_i)\,. \tag{17.22}$$

Ze vztahů (17.15) – (17.18) a (17.20) – (17.22) plyne

$$E_{l_i}(qw) = (\mathrm{mes}_1 l_i) E_I^*(q_i^* w_i^*)\,, \tag{17.23}$$

kde funkce $q_i^*(t)$ je dána vztahem (17.13) a kde

$$w_i^*(t) = w(\varphi_i^*(t),\psi_i^*(t)) \quad ((x,y)\in l_i)\,. \tag{17.24}$$

Nyní jsme připraveni dokázat hlavní výsledek této kapitoly.

17.3. Věta. *Nechť platí* (17.2). *Nechť integrační formule na referenční úsečce* $I = \langle 0; 1 \rangle$ *je taková, že*

$$E_I^*(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_1(2n-1)\,. \tag{17.25}$$

Potom pro všechna $w \in X_h^{(n)}$ *platí*

$$|E_{l_i}(qw)| \le C\widetilde{K}_n(\mathrm{mes}_1 l_i)^{1/2} h^n \|w\|_{0,l_i}\,, \tag{17.26}$$

takže

$$\sum_{\overline{T}_i \in \mathcal{M}_h} |E_{l_i}(qw)| \le C\widetilde{K}_n(\mathrm{mes}_1 \overline{\Gamma}_2)^{1/2} h^n \|w\|_{1,\Omega}\,, \tag{17.27}$$

kde konstanta C *nezávisí na* h *a* w *a veličina* $\widetilde{K}_n$ *je dána vztahem* (17.10).

Důkaz. A) Nejprve poznamenáváme, že

$$\|w_i^*\|_{0,I} = (\mathrm{mes}_1 l_i)^{-1/2} \|w\|_{0,l_i}\,. \tag{17.28}$$

Vztah (17.28) plyne z definice křivkového integrálu:

$$\|w\|_{0,l_i}^2 = \int_{l_i} w^2 \mathrm{d}s = \mathrm{mes}_1 l_i \int_0^1 (w_i^*)^2 \mathrm{d}t = \mathrm{mes}_1 l_i \|w_i^*\|_{0,I}^2\,.$$

B) Podle (17.21) platí

$$|E_I^*(q_i^* w_i^*)| \le \left(1 + \left|\sum_{j=1}^{J} \beta_j^*\right|\right) \max_{t \in I} |q_i^*(t) w_i^*(t)| \le$$

$$\le C \max_{t \in I} |q_i^*(t)| \max_{t \in I} |w_i^*(t)| \le C \max_{j=0,\dots,n} \max_{t \in I} |q_i^{*(j)}(t)| \max_{t \in I} |w_i^*(t)|\,.$$

Podobně jako v lemmatu 16.4 lze dokázat

$$\max_{t \in I} |w_i^*(t)| \le C\|w_i^*\|_{0,I} \quad \forall w_i^* \in \mathcal{P}_1(n). \tag{17.29}$$

Odtud

$$|E_I^*(q_i^* w_i^*)| \le C\|w_i^*\|_{0,I} \max_{j=0,\dots,n} \max_{t \in I} |q_i^{*(j)}(t)|\,.$$

Protože podle (17.25) platí

$$E_I^*(q_i^* w_i^*) = 0 \quad \forall q_i^* \in \mathcal{P}_1(n-1)\,,$$

z Bramble-Hilbertova lemmatu 4.4 plyne

$$|E_I^*(q_i^* w_i^*)| \le C\|w_i^*\|_{0,I} \max_{t \in I} |q_i^{*(n)}(t)|\,.$$

Zkombinujeme-li tento výsledek s (17.28), (17.14) a (17.11), dostaneme

$$|E_I^*(q_i^* w_i^*)| \le C\widetilde{K}_n(\mathrm{mes}_1 l_i)^{n-1/2} \|w\|_{0,l_i}\,. \tag{17.30}$$

Vztahy (17.30) a (17.23) implikují odhad (17.26), protože $\mathrm{mes}_1 l_i \le h$.

Sečteme-li (17.26) přes všechna i, pro která $\overline{T}_i \in \mathcal{M}_h$, a užijeme-li Cauchyovu nerovnost (7.23) a "stopovou" nerovnost (2.13), dostaneme (17.27). $\square$

Pomocí věty 17.3 a výsledků uvedených v kapitole 16 snadno získáme následující dvě konvergenční věty 17.4 a 17.5. Připomínáme, že přibližné řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ splňuje

$$a_h(u_h^{(n)}, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h^{(n)}\,, \tag{17.31}$$

kde bilineární forma $a_h(v,w)$ je dána vztahem (16.17) a lineární forma $L_h(v)$ vztahem

$$L_h(v) = L_h^{\Omega}(v) + L_h^{\Gamma}(v)\,. \tag{17.32}$$

Forma $L_h^{\Omega}(v)$ je definovaná pravou stranou vztahu (16.14), tj.

$$L_h^{\Omega}(v) = \sum_{\overline{T}_i \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{I_T} \omega_{i,T} f(B_{i,T}) v(B_{i,T})\,,$$

a lineární forma $L_h^{\Gamma}(v)$ vztahem (17.19). Ve shodě s (17.32) označujeme

$$L^{\Omega}(v) := \int_{\Omega} v f \mathrm{d}x\,, \quad L^{\Gamma}(v) := \int_{\Gamma_2} vq \mathrm{d}s\,. \tag{17.33}$$

Poznamenejme, že formy $L^{\Omega}(v)$ a $L_h^{\Omega}(v)$ jsou v kapitole 15 označeny pouze symboly $L(v)$ a $L_h(v)$.

17.4. Věta. *Nechť jsou splněny předpoklady vět* 16.10 *a* 17.3. *Potom*

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \le C h^n\,,$$

kde $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$ je jediné řešení Problému 6.2 a C je konstanta nezávislá na h.

17.5. Věta. *Nechť jsou splněny předpoklady vět* 16.11 *a* 17.3. *Potom*

$$\lim_{h \to 0+} \|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega}\,,$$

kde $u \in W_2^1(\Omega)$ je jediné řešení Problému 6.2.

Důkaz obou vět je jednoduchý: opět platí abstraktní odhad chyby (16.25), kde nyní

$$|L(w) - L_h(w)| \le |L^{\Omega}(w) - L_h^{\Omega}(w)| + |L^{\Gamma}(w) - L_h^{\Gamma}(w)|\,.$$

Podle $(17.33)_2$, (17.19) a (17.20) platí

$$|L^{\Gamma}(w) - L_h^{\Gamma}(w)| \le \sum_{\overline{T}_i \in M_h} |E_{l_i}(q_i w)|\,.$$

Tedy z věty 17.3 plyne

$$\sup_{w \in V_h^{(n)}} \frac{|L^{\Gamma}(w) - L_h^{\Gamma}(w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \le C \widetilde{K}_n (\mathrm{mes}_1 \Gamma_2)^{1/2} h^n\,.$$

Zbytek důkazu je tentýž jako důkazy vět 16.10 a 16.11. ☐

18. Trojúhelníkové konečné C^m-prvky

18.1. Lemma. *Nechť $P_i(x_i, y_i)$, $P_j(x_j, y_j)$ jsou dva body v rovině (x, y) a $m \ge 0$, $\lambda \ge 0$ dvě daná celá čísla. Nechť polynom $p(x, y) \in \mathcal{P}_2(n)$, kde*

$$n = 4m + \lambda + 1,$$

splňuje podmínky

$$D^{\alpha} p(P_i) = D^{\alpha} p(P_j) = 0, \quad |\alpha| \le 2m, \tag{18.1}$$

$$\frac{\partial^q p}{\partial \nu^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) = 0 \quad (r = 1, \dots, s;\ s = \lambda + q;\ q = 0, \dots, m), \tag{18.2}$$

kde $\partial/\partial\nu$ značí derivaci ve směru normály k přímce l určené body P_i, P_j a kde $Q_{ij}^{(1,s)}$, $Q_{ij}^{(2,s)}$, $\ldots$, $Q_{ij}^{(s,s)}$ je s bodů, které dělí úsečku P_iP_j na $s+1$ stejných dílů. (V případě $s=0$ je množina těchto bodů prázdná.) Potom v libovolném bodě této přímky platí

$$D^{\alpha}p(P)=0 \quad |\alpha|\le m, \quad P\in l. \tag{18.3}$$

Důkaz. Protože každou z $q+1$ derivací q-tého řádu

$$\frac{\partial^q p}{\partial\nu^q}(x,y),\ \frac{\partial^q p}{\partial\nu^{q-1}\partial\tau}(x,y),\ \ldots,\ \frac{\partial^q p}{\partial\nu\partial\tau^{q-1}}(x,y),\ \frac{\partial^q p}{\partial\tau^q}(x,y)\,, \tag{18.4}$$

kde $\partial/\partial\tau$ značí derivaci ve směru P_iP_j, lze psát ve tvaru lineární kombinace $q+1$ derivací

$$\frac{\partial^q p}{\partial x^q}(x,y),\ \frac{\partial^q p}{\partial x^{q-1}\partial y}(x,y),\ \ldots,\ \frac{\partial^q p}{\partial x\partial y^{q-1}}(x,y),\ \frac{\partial^q p}{\partial y^q}(x,y) \tag{18.5}$$

a naopak každou z $q+1$ derivací (18.5) lze psát ve tvaru lineární kombinace $q+1$ derivací (18.4), vidíme, že stačí dokázat

$$\frac{\partial^{a+b}p}{\partial\nu^a\partial\tau^b}(P)=0 \quad P\in l; \quad a,b=0,\ldots,m; \quad 0\le a+b\le m. \tag{18.6}$$

Vyjádřeme přímku l parametricky rovnicemi

$$x=x_i+(x_j-x_i)\tau, \quad y=y_i+(y_j-y_i)\tau \quad (-\infty<\tau<\infty)$$

a definujme pro $a=0,\ldots,m$ funkce

$$g_a(\tau)=\frac{\partial^a p}{\partial\nu^a}(x,y)\Big|_l=\frac{\partial^a p}{\partial\nu^a}(x_i+(x_j-x_i)\tau, y_i+(y_j-y_i)\tau). \tag{18.7}$$

Každá funkce $g_a(\tau)$ náleží do $\mathcal{P}_1(4m+\lambda+1-a)$. Podle (18.1) a (18.7) platí

$$\frac{\mathrm{d}^k g_a}{\mathrm{d}\tau^k}(0)=\frac{\mathrm{d}^k g_a}{\mathrm{d}\tau^k}(1)=0 \quad (k=0,\ldots,2m-a) \tag{18.8}$$

a podle (18.2) a (18.7) platí

$$g_a\Big(\frac{r}{\lambda+a+1}\Big)=0 \quad (r=1,\ldots,\lambda+a). \tag{18.9}$$

Podmínky (18.8) a (18.9) jsou hermiteovského typu a jejich celkový počet je $4m+\lambda+2-a$, což je počet koeficientů polynomu $g_a(\tau)$. Tedy podle věty o jednoznačném určení Hermiteova interpolačního polynomu jedné proměnné (která se snadno dokáže pomocí Rolleovy věty) z (18.8) a (18.9) plyne

$$g_a(\tau)\equiv 0 \quad (a=0,\ldots,m).$$

Diferencujeme-li b-krát tento vztah, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^b g_a}{\mathrm{d}\tau^b}(\tau)\equiv 0 \quad (b=0,1,2,\ldots). \tag{18.10}$$

Vzhledem k definici (18.7) funkcí $g_a(\tau)$ je však vztah (18.10) pouze jinak zapsaný vztah (18.6). □

18.2. Lemma. *Nechť $P_i(x_i,y_i)$, $P_j(x_j,y_j)$ jsou dva body v rovině (x,y) a $m\ge 0$, $\lambda\ge 0$ dvě daná celá čísla. Nechť polynom $p(x,y)\in\mathcal{P}_2(n)$, kde*

$$n=4m+\lambda+3,$$

splňuje podmínky (18.2) a podmínky

$$D^{\alpha}p(P_i)=D^{\alpha}p(P_j)=0, \quad |\alpha|\le 2m+1\,.$$

Potom v libovolném bodě P přímky l určené body P_i, P_j platí vztah (18.3).

Důkaz probíhá zcela stejně jako důkaz lemmatu 18.1.

18.3. Lemma. *Nechť pro polynom $p(x,y)\in\mathcal{P}_2(n)$ v libovolném bodě přímky l určené body $P_i(x_i,y_i)$, $P_j(x_j,y_j)$ platí vztah (18.3), kde $m<n$. Potom je tento polynom dělitelný funkcí $[f_{ij}(x,y)]^{m+1}$, kde*

$$f_{ij}(x,y)=-(y_j-y_i)(x-x_i)+(x_j-x_i)(y-y_i)\,, \tag{18.11}$$

tj. platí

$$p(x,y)=K[f_{ij}(x,y)]^{m+1}q_{n-m-1}(x,y)\,, \tag{18.12}$$

kde $q_{n-m-1}(x,y)\in\mathcal{P}_2(n-m-1)$ a $K\ne 0$ je konstanta.

Důkaz. Zvolme libovolně, ale pevně bod $P_k = [x_k, y_k]$, který neleží na přímce l. Zaveďme nové proměnné ξ, η rovnicemi (srovnej se (14.1))

$$x = x_i + (x_j - x_i)\xi + (x_k - x_i)\eta, \quad y = y_i + (y_j - y_i)\xi + (y_k - y_i)\eta, \tag{18.13}$$

tj. (srovnej se (14.6))

$$\xi = J_{ijk}^{-1}[-(y_k - y_i)(x - x_i) + (x_k - x_i)(y - y_i)], \quad \eta = J_{ijk}^{-1}[(y_j - y_i)(x - x_i) - (x_j - x_i)(y - y_i)], \tag{18.14}$$

kde

$$J_{ijk} = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i). \tag{18.15}$$

Definujme polynom $\widetilde{p}(\xi, \eta)$ vztahem

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = p(x_i + (x_j - x_i)\xi + (x_k - x_i)\eta, y_i + (y_j - y_i)\xi + (y_k - y_i)\eta). \tag{18.16}$$

Ze vztahů (18.3), (18.16) a toho, že parametrické rovnice přímky l jsou tvaru $x = x_i + (x_j - x_i)\xi,\ y = y_i + (y_j - y_i)\xi$, plyne

$$D^\alpha \widetilde{p}(\xi, 0) = 0\,, \quad |\alpha| \le m. \tag{18.17}$$

Polynom $\widetilde{p}(\xi, \eta)$ může být psán ve tvaru

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = \eta \widetilde{q}_{n-1}(\xi, \eta) + \widetilde{r}_n(\xi)\,, \tag{18.18}$$

kde $\widetilde{q}_{n-1}(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_2(n-1)$ a $\widetilde{r}_n(\xi) \in \mathcal{P}_1(n)$ je ta část polynomu $\widetilde{p}(\xi, \eta)$, která nezávisí na η. Jestliže aplikujeme rovnici (18.17) s $|\alpha| = 0$ na rovnici (18.18), vidíme, že platí $\widetilde{r}_n(\xi) \equiv 0$, tj.

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = \eta \widetilde{q}_{n-1}(\xi, \eta)\,. \tag{18.19}$$

Předpokládejme, že pro libovolné $\kappa \le m$ platí

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = \eta^\kappa \widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta)\,, \tag{18.20}$$

kde $\widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_2(n-\kappa)$. Z rovnic (18.17) a (18.20) plyne

$$\widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, 0) = \frac{1}{\kappa!}\frac{\partial^\kappa}{\partial \eta^\kappa}\big(\eta^\kappa \widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta)\big)\Big|_{\eta=0} = 0\,. \tag{18.21}$$

Položme

$$\widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta) = \eta \widetilde{q}_{n-\kappa-1}(\xi, \eta) + \widetilde{r}_{n-\kappa}(\xi)\,, \tag{18.22}$$

kde $\widetilde{q}_{n-\kappa-1}(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_2(n-\kappa-1)$ a $\widetilde{r}_{n-\kappa}(\xi) \in \mathcal{P}_1(n-\kappa)$ je ta část polynomu $\widetilde{q}_{m-\kappa}(\xi, \eta)$, která nezávisí na η. Z rovnic (18.21) a (18.22) plyne

$$\widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta) = \eta \widetilde{q}_{n-\kappa-1}(\xi, \eta)\,. \tag{18.23}$$

Z rovnice (18.19), předpokladu (18.20) a výsledku (18.23) nyní pomocí matematické indukce dostáváme

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = \eta^{m+1} \widetilde{q}_{n-m-1}(\xi, \eta)\,. \tag{18.24}$$

Podle (18.11) a (18.14) platí

$$\eta = J_{ijk}^{-1} f_{ij}(x, y), \tag{18.25}$$

Položíme-li $K = J_{ijk}^{-m-1}$ a užijeme-li transformaci (18.14), potom ze vztahů (18.16), (18.24) a (18.25) plyne vztah (18.12). $\square$

18.4. Věta. *Nechť $\overline{T}$ je trojúhelník s vrcholy P_1, P_2, P_3 a těžištěm P_0. Nechť $m \geq 0$ a κ, kde $1 \leq \kappa \leq 4$, jsou daná celá čísla. Potom existuje právě jeden polynom $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(4m+\kappa)$, který nabývá daných hodnot*

$$D^\alpha p(P_k)\,, \quad k = 1,2,3\,, \tag{18.26}$$

$$D^\beta p(P_0)\,, \tag{18.27}$$

$$\frac{\partial^q p}{\partial \nu_{ij}^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) \quad (i<j,\ i,j=1,2,3;\ r=1,\dots,s), \tag{18.28}$$

kde $\partial/\partial\nu_{ij}$ značí derivaci podle normály ke straně P_iP_j, kde body $Q_{ij}^{(r,s)}$ mají stejný význam jako v lemmatu 18.1 *a kde indexy α, β, q, s jsou určeny pomocí* (18.29$_\kappa$)*:*

$$|\alpha| \leq 2m, \quad |\beta| \leq m-2, \quad q = s = 1,\dots,m, \tag{18.29$_1$}$$

$$|\alpha| \leq 2m, \quad |\beta| \leq m-1, \quad q = s-1,\ s = 1,\dots,m+1, \tag{18.29$_2$}$$

$$|\alpha| \leq 2m+1, \quad |\beta| \leq m, \quad q = s = 1,\dots,m, \tag{18.29$_3$}$$

$$|\alpha| \leq 2m+1, \quad |\beta| \leq m+1, \quad q = s-1,\ s = 1,\dots,m+1\,. \tag{18.29$_4$}$$

Poznamenejme, že ve čtyřech speciálních případech některé z předpisů (18.29$_\kappa$) ztrácejí smysl; potom tyto podmínky neuvažujeme a nic nepředpisujeme. Tzn. že v případě $n=1$ nepředpisujeme nic v těžišti a na stranách trojúhelníku, v případech $n=2$ a $n=5$ nepředpisujeme nic v těžišti a v případě $n=3$ nic na stranách trojúhelníku.

Pro lepší orientaci čtenáře jsou polynomy prvního až devátého stupně hierarchie popsané ve větě 18.4 znázorněny na Obr. 18.1. Na těchto obrázcích tučným bodem značíme, že v daném uzlovém bodě je předepsána funkční hodnota, číslem k v kroužku značíme, že v daném bodě (tj. středu tohoto kroužku, který je totožný buď s některým vrcholem trojúhelníku, nebo těžištěm trojúhelníku) je předepsána funkční hodnota a všechny parciální derivace až do k-tého řádu včetně, tj. celkem $(k+1)(k+2)/2$ hodnot. Konečně jednoduchou, resp. dvojitou šipkou značíme, že v počátečním bodě této šipky je předepsána první, resp. druhá derivace ve směru této šipky (tj. první, resp. druhá derivace podle normály).

Obr. 18.1

Polynom 2. stupně hierarchie popsané ve větě 18.4 začal v aplikacích metody konečných prvků první užívat Veubecke [Ve], polynom 3. stupně této hierarchie publikoval jako první Holand [Ho] a polynom 5. stupně téměř současně publikovali Argyris, Fried a Scharpf [AFS], Bell [Be], Bosshard [Bo], Visser [Vi] a Zlámal [Zl]. Práce [Zl] je teoretické povahy a je v ní dokázána konvergence metody konečných prvků při užití polynomů 2., 3. a 5. stupně na oblasti s polygonální hranicí. Analýzou důkazových metod užitých v [Zl] a rozborem podmínek, které jednoznačně určují do té doby známé polynomy, sestrojil Ženíšek [Že1] hierarchii popsanou ve větě 18.4.

Důkaz věty 18.4. Větu dokážeme v případě $\kappa = 1$, tj.

$$n = 4m + 1\,. \tag{18.30}$$

Nejprve se přesvědčíme, že celkový počet parametrů (18.26) – (18.28) je roven počtu součinitelů úplného polynomu n-tého stupně dvou proměnných, tj. $(n+1)(n+2)/2$. Počet parametrů (18.26) předepsaných v jednom vrcholu P_k je

$$V = (2m+1)(2m+2)/2,$$

počet parametrů (18.27) je

$$T = (m-1)m/2$$

a počet parametrů (18.28) předepsaných na jedné straně P_iP_j je

$$S = m(m+1)/2.$$

Celkový počet parametrů (18.26) – (18.28) tedy je, jak se můžeme přesvědčit snadným výpočtem,

$$3(V+S)+T = (4m+2)(4m+3)/2,$$

což lze psát vzhledem k (18.30) ve tvaru

$$3(V+S)+T = (n+1)(n+2)/2,$$

což jsme chtěli ověřit. Abychom dokázali, že parametry (18.26) – (18.28) jednoznačně určují polynom $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$, stačí dokázat, že z podmínek

$$D^\alpha p(P_k) = 0 \quad (|\alpha| \le 2m), \qquad \frac{\partial^q p}{\partial \nu_{ij}^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) = 0, \tag{18.31}$$

$$D^\alpha p(P_0) = 0 \quad (|\alpha| \le m-2), \tag{18.32}$$

kde význam i, j, k, q, r, s je stejný jako v (18.26) – (18.28), plyne

$$p(x,y) \equiv 0\,. \tag{18.33}$$

Zaveďme ve shodě s lemmatem 18.3 lineární funkce

$$\begin{aligned} f_{12}(x,y) &= -(y_2-y_1)(x-x_1) + (x_2-x_1)(y-y_1),\\ f_{13}(x,y) &= -(y_3-y_1)(x-x_1) + (x_3-x_1)(y-y_1),\\ f_{23}(x,y) &= -(y_3-y_2)(x-x_2) + (x_3-x_2)(y-y_2). \end{aligned} \tag{18.34}$$

Je-li $n = 1$ (tj. $m = 0$), potom podle lemmat 18.1 a 18.3 z (18.31) plyne, že polynom $p(x,y)$ je dělitelný polynomem 3. stupně $f_{12}f_{13}f_{23}$, což je možné jedině tehdy, platí-li (18.33).

Je-li $n = 5$ (tj. $m = 1$), potom podle lemmat 18.1 a 18.3 z (18.31) plyne, že polynom $p(x,y)$ je dělitelný polynomem 6. stupně $(f_{12}f_{13}f_{23})^2$, což je možné jedině tehdy, platí-li (18.33).

Nechť nyní $n \ne 1$, $n \ne 5$ (tj. $m \ge 2$). Ze vztahů (18.31) podle lemmat 18.1, 18.3 plyne, že

$$p(x,y) = K[f_{12}(x,y)f_{13}(x,y)f_{23}(x,y)]^{m+1}q(x,y) \quad (K \ne 0), \tag{18.35}$$

kde $q(x,y) \in \mathcal{P}_2(m-2)$, tj.

$$q(x,y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + \cdots + b_M y^{m-2} \quad (M = (m-1)m/2). \tag{18.36}$$

Označme souřadnice těžiště P_0 symboly x_0, y_0. Protože bod $[x_0, y_0]$ neleží na žádné ze tří přímek P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3, platí podle (18.34)

$$f_{12}(x_0,y_0) f_{13}(x_0,y_0) f_{23}(x_0,y_0) \neq 0\,. \tag{18.37}$$

Z (18.32), kde $|\alpha| = 0$, plyne podle (18.35) a (18.37)

$$q(x_0,y_0) = 0\,. \tag{18.38}$$

Předpokládejme, že pro celé číslo k splňující nerovnost $0 \le k < m-2$ platí

$$D^\alpha q(x_0,y_0) = 0\,, \quad |\alpha| \le k\,. \tag{18.39}$$

Potom z (18.32), kde $|\alpha| = k+1$, plyne snadno pomocí (18.35), (18.37) a (18.39)

$$D^\alpha q(x_0,y_0) = 0\,, \quad |\alpha| \le k+1\,. \tag{18.40}$$

Z výsledku (18.38), předpokladu (18.39) a jeho důsledku (18.40) matematickou indukcí plyne

$$D^\alpha q(x_0,y_0) = 0\,, \quad |\alpha| \le m-2\,. \tag{18.41}$$

Z (18.41) pro $|\alpha| = m-2$ plyne, že součinitelé b_k, které vystupují v (18.36), jsou rovny nule u členů $x^i y^j$, pro něž $i+j = m-2$: podle (18.41) je totiž

$$\frac{\partial^{m-2} q}{\partial y^{m-2}}(x_0,y_0) = (m-2)!\,b_M = 0, \quad \frac{\partial^{m-2} q}{\partial x \partial y^{m-3}}(x_0,y_0) = (m-3)!\,b_{M-1} = 0, \quad \text{atd.}$$

Odtud a z (18.41), kde $|\alpha| = m-3$, plyne, že součinitelé b_k u členů $x^i y^j$, pro něž $i+j = m-3$, jsou rovny nule. Postupujeme-li tak dále, tj. užíváme-li předchozích výsledků a (18.41), kde postupně uvažujeme $|\alpha| = m-4, \ldots, 2, 1, 0$, zjistíme, že $q(x,y) \equiv 0$. Odtud podle (18.35) plyne (18.33). $\square$

V následující větě užijeme tohoto způsobu značení: Symbolem A budeme značit celkový počet vrcholů trojúhelníků v dané triangulaci $\mathcal{T}_h$ ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$, symbolem B celkový počet úseček v $\mathcal{T}_h$ (tj. stran trojúhelníků) a symbolem D celkový počet trojúhelníků. Vrcholy označíme symboly $P_1, P_2, \ldots, P_A$, úsečky symboly $l_1, l_2, \ldots, l_B$ a těžiště trojúhelníků symboly $R_1, R_2, \ldots, R_D$.

Obr. 18.2

Body, které dělí úsečku l_j na $s+1$ stejných dílů budeme značit $Q_j^{(1,s)}, Q_j^{(2,s)}, \ldots, Q_j^{(s,s)}$. Jednotkové normály ν_j k úsečkám l_j budeme orientovat podle tohoto pravidla: Jsou-li P_m, P_r, kde $m < r$, koncové body úsečky l_j, potom díváme-li se ve směru normály ν_j, vidíme bod P_r napravo od bodu P_m (viz Obr. 18.2).

18.5. Věta. *Nechť $\mathcal{T}_h$ je daná triangulace ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť $m \geq 0$ a κ, kde $1 \leq \kappa \leq 4$, jsou daná celá čísla. Potom existuje právě jedna funkce $w(x,y)$, která je m-krát spojitě diferencovatelná na $\overline{\Omega}$, na každém trojúhelníku $\overline{T}_k \in \mathcal{T}_h$ $(k = 1,\dots,D)$ je restrikcí polynomu z $\mathcal{P}_2(4m+\kappa)$ a v uzlových bodech triangulace nabývá předepsaných hodnot*

$$D^\alpha w(P_i) \quad (i = 1,\dots,A), \tag{18.42}$$

$$\frac{\partial^q w}{\partial \nu_j^q}(Q_j^{(r,s)}) \quad (j = 1,\dots,B;\ r = 1,\dots,s), \tag{18.43}$$

$$D^\beta w(R_k) \quad (k = 1,\dots,D), \tag{18.44}$$

kde indexy α, β, q, s jsou určeny podle (18.29_κ).

Důkaz. Z věty 18.4 plyne, že funkce $w(x,y)$ je na každém trojúhelníku $\overline{T}_k \in \mathcal{T}_h$ $(k = 1,\dots,D)$ jednoznačně určena těmi hodnotami (18.42) – (18.44), které příslušejí trojúhelníku $\overline{T}_k$. Z lemmatu 18.1, resp. 18.2 potom plyne, že hodnoty

$$D^\alpha w(P), \quad |\alpha| \leq m, \quad P \in l_j \quad (j = 1,\dots,B)$$

jsou jednoznačně určeny hodnotami (18.42) a (18.43), které jsou předepsány pouze na úsečce l_j. $\square$

Právě uvedené trojúhelníkové konečné C^m-elementy mají aplikace v přibližném řešení okrajových problémů eliptických parciálních diferenciálních rovnic řádu $2(m+1)$. Praktický význam mají C^1-elementy při přibližném řešení průhybu tenkých desek. Modelovým problémem ohybu vetknuté tenké desky je Dirichletův okrajový problém biharmonické rovnice:

$$\Delta^2 w(x,y) = f(x,y) \quad \forall [x,y] \in \Omega, \tag{18.45}$$

$$w(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \forall [x,y] \in \partial\Omega. \tag{18.46}$$

Tomuto okrajovému problému odpovídá tento variační problém (jeho odvození z okrajového problému (18.45), (18.46) pomocí několikerého užití Greenovy věty je uvedeno v [Re, str. 279 – 283]):

18.6. Problém. Nechť

$$V = \{v \in W_2^2(\Omega) :\ v = \partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0 \text{ na } \partial\Omega\}. \tag{18.47}$$

Najít funkci $w \in V$, pro kterou platí

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega vf \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \forall v \in V. \tag{18.48}$$

Má-li oblast $\overline{\Omega}$ polygonální hranici, potom vzhledem k větám 1.18 a 18.5 lze užít k přibližnému řešení problému 18.6 trojúhelníkové C^1-prvky (podrobnosti lze najít v [KKLŽ]).

Důkaz konvergence metody konečných prvků je opět založen na interpolačním teorému, který ve tvaru věty 18.7 byl dokázán v [BZ]:

18.7. Věta. *Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Nechť $u \in W_2^k(\Omega)$, kde $2m+2 \leq k \leq 4m+2$ a nechť $u_I \in \mathcal{P}_2(4m+1)$ je interpolační polynom funkce u jednoznačně určený podmínkami*

$$D^\alpha u_I(P_k) = D^\alpha u(P_k), \quad |\alpha| \leq 2m \quad (k = 1,2,3), \tag{18.49}$$

$$D^\beta u_I(P_0) = D^\beta u(P_0), \quad |\beta| \leq m-2, \tag{18.50}$$

$$\frac{\partial^q u_I}{\partial \nu_{ij}^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) = \frac{\partial^q u}{\partial \nu_{ij}^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) \quad (i < j,\ i,j = 1,2,3;\ r = 1,\dots,s), \tag{18.51}$$

kde indexy α, β, q, s jsou určeny pomocí (18.29_1). *Potom pro $0 \leq p \leq k$ platí*

$$\|u - u_I\|_{p,T} \leq \frac{C}{(\sin\vartheta_T)^p} h_T^{k-p} |u|_{k,T}, \tag{18.52}$$

kde ϑ_T je nejmenší úhel trojúhelníku $\overline{T}$ a kde konstanta C nezávisí na $\overline{T}$ a funkci u.

19. Metoda konečných prvků v oblastech s nepolygonální hranicí

V této kapitole se omezíme na aproximaci dané oblasti Ω oblastí Ω_h s polygonální hranicí $\partial\Omega_h$. O samotné oblasti Ω budeme předpokládat, že má lipschitzovskou hranici ve smyslu poznámky 2.2 a že se skládá z konečného počtu hladkých oblouků, které jsou třídy C^2 (tj. funkce vystupující v parametrickém vyjádření $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ příslušného oblouku mají spojité všechny derivace alespoň do druhého řádu včetně).

Aproximující oblast Ω_h je přitom taková, že všechny vrcholy (rohy) její hranice $\partial\Omega_h$ leží na $\partial\Omega$, přičemž každá úsečka, která je částí $\partial\Omega_h$ je stranou nějakého trojúhelníku $\overline{T}$, který náleží do triangulace $\mathcal{T}_h$ uzavřené oblasti $\overline{\Omega}_h$. Konečně předpokládáme, že každý roh hranice $\partial\Omega$ (tj. bod, ve kterém se stýkají dva hladké oblouky patřící $\partial\Omega$) je vrcholem $\partial\Omega_h$, a tedy uzlovým bodem triangulace $\mathcal{T}_h$. Podobně uzlovými body $\mathcal{T}_h$ jsou body, ve kterých se stýkají části $\overline{\Gamma}_1$ a $\overline{\Gamma}_2$ hranice $\partial\Omega$.

Budeme opět aproximovat okrajový problém (6.1) – (6.3). Diskrétní schéma vytvoříme ve dvou krocích: Nejprve aproximujeme oblast Ω oblastí Ω_h a pro $v, w \in W_2^1(\Omega_h)$ definujeme

$$\widetilde{a}_h(v, w) := \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega_h} \widetilde{k}_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \,, \tag{19.1}$$

kde $\widetilde{k}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ jsou *prodloužení* funkcí $k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ (viz definici 19.1), které mají vlastnost

$$\widetilde{k}_{ij} \in C^1(\widehat{\Omega}) \quad (i, j = 1, 2), \tag{19.2}$$

přičemž $\widehat{\Omega}$ je uzávěr takové ohraničené oblasti $\widetilde{\Omega}$, že

$$\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega}_h \quad \forall h \in (0, h_0) \,. \tag{19.3}$$

Vlastnost (19.2) zaručuje věta 19.2. Podobně s pomocí prodloužení $\widetilde{f} \in C^1(\widehat{\Omega})$ funkce $f \in C^1(\overline{\Omega})$ definujeme pro všechna $v \in W_2^1(\Omega_h)$

$$\widetilde{L}_h^{\Omega}(v) := \int_{\Omega_h} v \widetilde{f} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \tag{19.4}$$

Vrcholy (rohy) polygonu $\partial\Omega_h$ dělí hranici $\partial\Omega$ na konečnou množinu $\{\lambda\}$ hladkých oblouků, z nichž každý je aproximován nějakou úsečkou λ^* patřící do množiny úseček $\{\lambda^*\}$, jejichž sjednocení tvoří hranici $\partial\Omega_h$. Nejpřirozenější definice formy $\widetilde{L}_h^{\Gamma}(v)$ má tvar

$$\widetilde{L}_h^{\Gamma}(v) := \sum_{\lambda \subset \Gamma_2} \mathrm{mes}_1 \lambda^* \int_0^1 q(\varphi_\lambda(t), \psi_\lambda(t)) v(\varphi_\lambda^*(t), \psi_\lambda^*(t)) \mathrm{d}t \quad \forall v \in W_2^1(\Omega_h) \,, \tag{19.5}$$

kde $x = \varphi_\lambda^*(t)$, $y = \psi_\lambda^*(t)$ $(t \in \langle 0; 1 \rangle)$ je parametrické vyjádření úsečky λ^*, která aproximuje oblouk λ s parametrickým vyjádřením $x = \varphi_\lambda(t)$, $y = \psi_\lambda(t)$ $(t \in \langle 0; 1 \rangle)$. Předpokládáme, že

$$q \in PC^1(\Gamma_2). \tag{19.6}$$

19.1. Definice. Nechť u je reálná funkce definovaná na množině $M \subset R^N$. Funkce U definovaná na množině $D \supset M$ se nazývá *prodloužením* funkce u, jestliže

$$U(x_1, \ldots, x_N) = u(x_1, \ldots, x_N) \quad \text{pro } [x_1, \ldots, x_N] \in M.$$

19.2. Věta. *Nechť hranice $\partial\Omega$ dvojrozměrné ohraničené oblasti Ω je po částech hladká a nemá body vratu. Nechť $v \in C^1(\overline{\Omega})$ a nechť $D \supset \overline{\Omega}$ je libovolná oblast. Potom existuje funkce $\widetilde{v} \in C^1(\overline{D})$, která je prodloužením funkce v, tj. $\widetilde{v}(x,y) = v(x,y)$ pro všechny body $[x,y] \in \overline{\Omega}$.*

Důkaz věty 19.2 je velmi komplikovaný a lze jej nalézt v [Fi, Dodatek]. V této kapitole budeme potřebovat ještě jednu větu o prodloužení.

19.3. Věta. *Nechť hranice $\partial\Omega$ dvojrozměrné ohraničené oblasti Ω je po částech hladká a nemá body vratu. Nechť její hladké části jsou třídy C^k. Nechť $D \supset \overline{\Omega}$ je libovolná oblast. Potom existuje takový lineární a ohraničený operátor prodloužení $\mathcal{E} : W_2^k(\Omega) \to W_2^k(D)$, že konstanta C vystupující v nerovnosti*

$$\|\mathcal{E}(v)\|_{k,D} \leq C\|v\|_{k,\Omega} \quad \forall v \in W_2^k(\Omega)$$

závisí pouze na oblasti D. Operátor $\mathcal{E}$ je také lineární a ohraničený operátor prodloužení z prostoru $W_2^{k-i}(\Omega)$ do prostoru $W_2^{k-i}(D)$ $(1 \leq i \leq k)$. Shodně s větou 19.2 užíváme značení $\widetilde{v} = \mathcal{E}(v)$.

Důkaz věty 19.3 je uveden v [OR, str. 20-22]. Je zajímavé, že navazuje na důkaz věty 19.2, který je uveden v [Fi]. Je třeba zdůraznit, že uvedené věty byly dokázány v dvojrozměrném případě. V trojrozměrném případě je situace komplikovanější a předpoklady o hranici oblasti Ω musejí být silnější, nebo tvrzení vět jsou změněná.

V druhém kroku aproximujeme formy $\widetilde{a}_h(v,w)$, $\widetilde{L}_h^\Omega(v)$ a $\widetilde{L}_h^\Gamma(v)$, kde $v, w \in X_h \equiv X_h^{(1)}$ integračními formulemi a výsledek této aproximace označíme symboly $a_h(v,w)$, $L_h^\Omega(v)$ a $L_h^\Gamma(v)$. Přitom je nutné se omezit na takové integrační formule, jejichž integrační body leží uvnitř trojúhelníků T, nebo jsou totožné s vrcholy těchto trojúhelníků. Důvod je prostý: existenci prodloužení $\widetilde{k}_{ij} \in C^1(\widehat{\Omega})$, $\widetilde{f} \in C^1(\widehat{\Omega})$ (která potřebujeme k důkazu konvergenčních vět) máme zaručenu; neznáme však hodnoty funkcí $\widetilde{k}_{ij}$, $\widetilde{f}$ v $\widehat{\Omega} - \overline{\Omega}$. To např. znamená, že v případě hraničních trojúhelníků $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ nemůžeme užívat integrační formuli, jejíž uzlové body jsou půlicími body stran trojúhelníků. S tímto omezením můžeme vytvořit formy $a_h(v,w)$ a $L_h^\Omega(v)$ stejným způsobem jako v kapitole 16.

Zbývá aproximovat formu $\widetilde{L}_h^\Gamma(v)$ danou vztahem (19.5), kde se omezíme na $v \in X_h$. Vzhledem k definici této formy můžeme užít libovolnou integrační formuli (17.15), takže dostaneme

$$L_h^\Gamma(v) = \sum_{\lambda \subset \Gamma_2} \mathrm{mes}_1 \lambda^* \sum_{j=1}^{J} \beta_j^* q(\varphi_\lambda(t_j), \psi_\lambda(t_j)) v(\varphi_\lambda^*(t_j), \psi_\lambda^*(t_j)). \tag{19.7}$$

Označíme-li úsečky, jejichž sjednocení je $\overline{\Gamma}_{2h} \subset \partial\Omega_h$, symboly $l_1, \ldots, l_r$ a užijeme-li v (19.7) lichoběžníkovou formuli, potom při lokálním označení koncových bodů úsečky l_i symboly P_1^i, P_2^i se vztah (19.7) zjednoduší na tvar

$$L_h^\Gamma(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{2} \mathrm{mes}_1 l_i q(P_j^i) v(P_j^i). \tag{19.8}$$

Nyní můžeme formulovat následující diskrétní problém v dvojrozměrné oblasti s nepolygonální hranicí.

19.4. Problém. Nechť dvojrozměrná oblast Ω má lipschitzovskou hranici (ve smyslu poznámky 2.2), jejíž hranice se skládá z konečného počtu hladkých oblouků, které jsou třídy C^2. Nechť aproximující oblast Ω_h je přitom taková, že všechny vrcholy (rohy) její hranice $\partial\Omega_h$ leží na $\partial\Omega$, přičemž každá úsečka, která je částí $\partial\Omega_h$ je stranou nějakého trojúhelníku $\overline{T}$, který náleží do triangulace $\mathcal{T}_h$ uzavřené oblasti $\overline{\Omega}_h$. Nechť funkce $\overline{u}$ je tak hladká, že existuje taková funkce $z \in W_2^2(\Omega)$, že $\gamma z = \overline{u}$ na Γ_1. Označme

$$W_h = \{v \in X_h \equiv X_h^{(n)} : v(P_k) = \overline{u}(P_k) \ \forall P_k \in \overline{\Gamma}_1\}, \tag{19.9}$$

$$V_h = \{v \in X_h : v(P_k) = 0 \ \ \forall P_k \in \overline{\Gamma}_1\} \equiv \{v \in X_h : v = 0 \text{ na } \overline{\Gamma}_1\}, \tag{19.10}$$

kde $P_k \in \sigma_h$ (přičemž σ_h označuje množinu všech uzlových bodů v $\mathcal{T}_h$). Nalezněte takovou funkci $u_h \in W_h$, že

$$a_h(u_h, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h\,, \tag{19.11}$$

kde

$$L_h(v) = L_h^\Omega(v) + L_h^\Gamma(v) \tag{19.12}$$

a formy $a_h(v,w)$, $L_h^\Omega(v)$, $L_h^\Gamma(v)$ jsou aproximací forem $\widetilde{a}_h(v,w)$, $\widetilde{L}_h^\Omega(v)$, $\widetilde{L}_h^\Gamma(v)$ pomocí numerické integrace; způsob aproximace byl popsán před formulací Problému 19.4.

19.5. Věta (o abstraktním odhadu chyby). *Nechť existuje taková konstanta $\widetilde{\beta} > 0$ nezávislá na h, že pro $h \in (0, h_0)$ platí*

$$\widetilde{\beta}\|v\|_{1,\Omega_h}^2 \le a_h(v,v) \quad \forall v \in V_h\,. \tag{19.13}$$

Potom pro $h \in (0, h_0)$ každý Problém 19.4 má právě jedno řešení $u_h \in W_h$ a toto řešení splňuje odhad

$$\|\widetilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} \le C\Bigg\{ \sup_{\substack{w\in V_h\\ w\neq 0}} \frac{|\widetilde{a}_h(\widetilde{u},w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} + $$

$$+ \inf_{v\in W_h}\left(\|\widetilde{u} - v\|_{1,\Omega_h} + \sup_{\substack{w\in V_h\\ w\neq 0}} \frac{|\widetilde{a}_h(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}}\right)\Bigg\} \tag{19.14}$$

kde $\widetilde{u} \in W_2^1(\widetilde{\Omega})$ je prodloužení (ve smyslu věty 19.3) řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2 a C je konstanta nezávislá na h a u.

Důkaz. Pro libovolné $v \in W_h$ platí

$$\|\widetilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} \le \|\widetilde{u} - v\|_{1,\Omega_h} + \|u_h - v\|_{1,\Omega_h}. \tag{19.15}$$

Protože $u_h - v \in V_h$, můžeme psát podle (19.13), bilineárnosti formy $a_h(v,w)$ a vztahu (19.11)

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}\|u_h - v\|_{1,\Omega_h}^2 &\le a_h(u_h - v, u_h - v) = a_h(u_h, u_h - v) - a_h(v, u_h - v) = \\ &= L_h(u_h - v) - a_h(v, u_h - v) \le |L_h(u_h - v) - \widetilde{a}_h(\widetilde{u}, u_h - v)| + \\ &+ |\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, u_h - v) - \widetilde{a}_h(v, u_h - v)| + |\widetilde{a}_h(v, u_h - v) - a_h(v, u_h - v)|\,.\end{aligned}$$

Je-li $\|u_h - v\|_{1,\Omega_h} > 0$, můžeme získaný odhad podělit $\|u_h - v\|_{1,\Omega_h}$. Užijeme-li ohraničenost formy $\widetilde{a}_h(v,w)$, která plyne z (19.1), dostaneme

$$|\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, u_h - v) - \widetilde{a}_h(v, u_h - v)| \le M\|\widetilde{u} - v\|_{1,\Omega_h}\|u_h - v\|_{1,\Omega_h}.$$

Položíme-li konečně na pravé straně $w := u_h - v$, dostaneme po předchozích úpravách

$$\widetilde{\beta}\|u_h - v\|_{1,\Omega_h} \le \sup_{w\in V_h} \frac{|\widetilde{a}_h(\widetilde{u},w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} + M\|\widetilde{u} - v\|_{1,\Omega_h} + \sup_{w\in V_h}\frac{|\widetilde{a}_h(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}}. \quad (19.16)$$

Kombinací (19.15) a (19.16) dostaneme snadno (19.14). □

Pokud oblast Ω má polygonální hranici, redukuje se věta 19.5 na již známé výsledky. Plyne to z nerovnosti

$$|\widetilde{a}_h(\widetilde{u},w) - L_h(w)| \le |\widetilde{a}_h(\widetilde{u},w) - \widetilde{L}_h(w)| + |\widetilde{L}_h^{\Omega}(w) - L_h^{\Omega}(w)| + |\widetilde{L}_h^{\Gamma}(w) - L_h^{\Gamma}(w)|. \quad (19.17)$$

V případě, že $\partial\Omega$ je polygon (či množina polygonů), je první člen na pravé straně (19.17) roven nule a ostatní výrazy na pravých stranách (19.14) a (19.17) již byly odhadnuty a podmínka (19.13) dokázána.

K důkazu nerovnosti (19.13) (která vyjadřuje tzv. stejnoměrnou V_h-eliptičnost bilineárních forem $a_h(v,w)$) potřebujeme tzv. diskrétní tvar Friedrichsovy nerovnosti

$$\|v\|_{1,\Omega_h} \le C|v|_{1,\Omega_h} \quad \forall v \in V_h, \quad \forall h \in (0,h_0). \quad (19.18)$$

Důkaz (19.18) je uveden v [Že2, str. 221-226]. Kromě toho potřebujeme nerovnost

$$\sum_{i,j=1}^{2} \widetilde{k}_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad (\mu > 0), \quad (19.19)$$

která platí pro skoro všechna $x \in \widetilde{\Omega}$ a všechna $\xi_1, \xi_2 \in R^2$ a je zesílením předpokladu (7.24). Stejně jako v důkazu lemmatu 7.5 z nerovností (19.18) a (19.19) okamžitě dostaneme

$$\widetilde{a}_h(v,v) \ge C\mu\|v\|_{1,\Omega_h}^2 \quad \forall v \in V_h, \quad \forall h \in (h,h_0). \quad (19.20)$$

Pomocí vztahu (19.20) a lemmatu 16.6 dostaneme (19.13) podobným způsobem jako jsme dostali v důkazu věty 16.7 nerovnost (16.24) v případě polygonální oblasti.

Co se týče odhadu prvního členu na pravé straně (19.14) (či prvního členu na pravé straně (19.17), lze komplikovanými úvahami dokázat (viz [Že2, str. 176-187, 197-201, 263-266], že v případě $u \in W_2^1(\Omega)$ platí

$$|\widetilde{a}_h(\widetilde{u},w) - L_h(w)| \le Ch^{1/2}\|w\|_{1,\Omega_h} \quad \forall w \in V_h \quad (19.21)$$

a v případě $u \in W_2^2(\Omega)$

$$|\widetilde{a}_h(\widetilde{u},w) - L_h(w)| \le Ch\|w\|_{1,\Omega_h} \quad \forall w \in V_h. \quad (19.22)$$

Tím je dokázáno pro trojúhelníkové prvky s lineárním polynomem, že v případě nepolygonální hranice $\partial\Omega$ jsou konvergenční výsledky stejné jako v případě polygonální hranice.

20. Závěr

Materiál tohoto skripta lze rozdělit přibližně do čtyř nestejně velkých částí:

1. V kapitolách $1-5$ jsme si vybudovali nezbytný matematický aparát potřebný k analýze metody konečných prvků.

2. V kapitolách 6 a 7 jsme se seznámili s variačními formulacemi okrajových problémů lineárních eliptických parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu a dokázali věty o existenci a jednoznačnosti řešení příslušných variačních problémů.

3. V kapitolách $8-17$ jsme se detailně zabývali všemi základními aspekty metody konečných prvků pro řešení okrajových problémů eliptických PDR druhého řádu na oblastech s polygonální hranicí. Kapitola 18 byla věnována trojúhelníkovým konečným C^m-prvkům a jejich aplikacím na okrajové problémy lineárních eliptických PDR řádu $2(m+1)$. V celém skriptu jsme se zabývali dvojrozměrnými problémy a trojúhelníkovými prvky.

4. V kapitole 19 jsme otevřeli problematiku metody konečných prvků na dvojrozměrných oblastech s nepolygonální hranicí.

Domnívám se, že je to víc než dost pro základní informaci o metodě konečných prvků. Souběžné cvičení na počítačích osvětlí problematiku metody konečných prvků z trochu jiného pohledu.

Studenti by se měli dále seznámit s těmito konečnými prvky:
a) obdélníkové a čtyřstěnné prvky (viz [KKLŽ]);
b) dvojrozměrné a trojrozměrné izoparametrické prvky (viz [KKLŽ]);
c) zakřivené trojúhelníkové prvky (viz [Že2]).

Dále by se měli seznámit se základy těchto problémů a jejich řešení:
1. časově závislé problémy - lineární parabolické a hyperbolické (viz [KKLŽ], [Že2]);
2. nelineární problémy (alespoň tzv. asymptoticky lineární [Že2]).

V pátém ročníku budou mít studenti matematického inženýrství dva předměty z aplikací metody konečných prvků, které doplní jejich znalosti v právě uvedených směrech.